Принцип относительности Галилея и нелинейные уравнения в частных производных

В.И. ФУЩИЧ

1. Симметрия нелинейных уравнений. Рассмотрим нелинейные уравнения параболического типа для действительной функции u и комплексной функции ψ

$$A(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\Delta u + B(t,x,u,\underset{1}{u}), \tag{1}$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = A_{ab}(t,x,\psi,\psi^*,\underset{1}{\psi},\underset{1}{\psi}^*)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_a\partial x_b} + B(t,x,\psi,\psi^*,\underset{1}{\psi},\underset{1}{\psi}^*), \tag{2}$$

$u=u(t,x)$, $\psi=\psi(t,x)$, $*$ — означает комплексное сопряжение,

$$\underset{1}{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0},\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad a,b=\overline{1,n},$$
$$\underset{1}{\psi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0},\frac{\partial \psi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right), \quad x_0\equiv t,$$
$$\underset{1}{\psi}^* = \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x_0},\frac{\partial \psi^*}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial \psi^*}{\partial x_n}\right).$$

В том случае, когда $A_{ab}=\lambda\delta_{ab}$, λ — произвольный параметр, δ_{ab} — символ Кронекера и $B=0$, уравнение (2) совпадает с линейныч уравнением Шредингера

$$i\psi_t = \lambda\Delta\psi, \quad \psi_t\equiv\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{3}$$

Будем говорить, что для уравнений (1), (2) выполняется принцип относительности Галилея, если они инвариантны относительно преобразований Галилея [1–3]

$$t\to t'=t, \quad x_a\to x'_a = x_a + v_a t, \tag{4}$$

v_a — параметры преобразования, т.е. компоненты скорости движения одной инерциальной системы отсчета относительно другой.

Хорошо известно, что максимальной локальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности уравнения (3) является обобщенная группа Галилея $G_2(1,n)$. Базисные элементы алгебры Ли $AG_2(1,n)$ группы $G_2(1,n)$ имеют вид

$$P_\mu = \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu,\nu=\overline{1,n}, \tag{5a}$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad a,b=\overline{1,n}, \tag{5b}$$

Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики”, 12–15 сентября 1989 г., Тернополь, Ч. II, С. 444–452.

$$G_a = t\partial_a - \frac{1}{2\lambda}x_a, \tag{5c}$$

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}, \tag{5d}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4\lambda} - \frac{nt}{2}. \tag{5e}$$

Обозначим символом $AG(1,n) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a\rangle$ алгебру Ли группы Галилея $G(1,n)$, базисные элементы которой задаются формулами (5a)–(5c). Алгебры Ли с базисными элементами (5a)–(5d), (5a)–(5e) обозначим, соответственно, символами

$$AG_1 \equiv \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D\rangle, \tag{6}$$

$$AG_2 \equiv \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D, \Pi\rangle. \tag{7}$$

Из приведенного следует, что для линейного уравнения теплопроводности (1) ($A=1$, $B=0$) и уравнения (3) выполняется принцип относительности Галилея, если при преобразовании (4) функции u и ψ преобразуются следующим образом

$$u \to u' = \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}v_a\left(x_a + \frac{1}{2}v_a t\right)\right\}u, \tag{8}$$

$$\psi \to \psi' = \exp\left\{-\frac{i}{2\lambda}v_a\left(x_a + \frac{1}{2}v_a t\right)\right\}\psi. \tag{9}$$

Полное описание нелинейных уравнений вида (1), для которых выполняется принцип относительности Галилея, дает

Теорема 1 [3]. *Уравнение (1) инвариантно относительно преобразований (4), (8) тогда и только тогда, когда*

$$A(t,x,u) = g_1(t,w), \quad w = u\exp\left\{\frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t}\right\}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} B(t,x,u,\underset{1}{u}) = ug_2(w,w_1,\ldots,w_n) + \\ + \{g_1(t,w)-\lambda\}\left\{\frac{x_a u_a}{t} + \frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t^2}u\right\}, \quad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$w_a = \frac{\partial w}{\partial x_a} = \left(u_a + \frac{\lambda^{-1}x_a u}{t}\right)\exp\left\{\frac{\lambda^{-1}|x|^2}{4t}\right\}, \tag{12}$$

g_1, g_2 — произвольные гладкие функции.

Теорема 2 [6]. *Все уравнения вида (2), инвариантные относительно алгебры $AG_2(1,n)$, эквивалентны уравнению*

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \lambda\Delta\psi + (\psi\psi^*)^{2/n}\psi F(\theta), \tag{13}$$

$$\theta = (\psi\psi^*)^{(-2n-2)/n}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial x_a}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial x_a}, \tag{14}$$

$F(\theta)$ — произвольная гладкая функция.

В трехмерном случае наиболее простые уравнения выглядят как [4, 5]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \lambda\Delta\psi + \lambda_1|\psi|^{4/3}\psi(t,x), \quad x\in R^3, \tag{15}$$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \lambda\Delta\psi + \lambda_2|\psi|^{-4}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial x_a}\frac{\partial|\psi|^2}{\partial x_a}, \tag{16}$$

λ, λ_1, λ_2 — произвольные константы.

Среди множества уравнений вида [1]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \lambda\Delta\psi + F(\psi,\psi^*), \tag{17}$$

F — произвольная гладкая функция, только уравнение (15) инвариантно относительно алгебры $AG_2(1,3)$.

Итак, приведенные теоремы дают явное описание классов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, инвариантных относительно группы Галилея $G(1,n)$ и ее расширений.

2. Редукция уравнения (15). Воспользуемся теперь симметрийными свойствами нелинейного уравнения (15) для его редукции, т.е. приведения многомерного уравнения к набору уравнений с меньшим числом переменных.

Решения уравнения (15) ищем в виде [1]

$$\psi(x) = f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \tag{18}$$

где φ — функция, подлежащая определению, зависит только от трех новых переменных $\omega_1=\omega_1(t,x)$, $\omega_2=\omega_2(t,x)$, $\omega_3=\omega_3(t,x)$. Явный вид функции $f(x)$ находится из требования, чтобы в уравнение для $\varphi(\omega)$, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ не входили явно переменные (x_0,x_1,x_2,x_3). Инвариантные переменные ω_1, ω_2, ω_3 являются первыми интегралами соответствующих уравнений Эйлера–Лагранжа.

Используя инвариантность уравнения (15) относительно группы $G_2(1,3)$, получены виражения для $f(x)$ и ω_1, ω_2, ω_3, при которых анзац (18) редуцирует четырехмерное уравнение к трехмерному уравнению. Явные выражения для $f(x)$ и $\omega(x)$ задаются формулами [4]:

$$\begin{gathered} f(x) = \left(1-x_0^2\right)^{-3/4}\exp\left\{\frac{1}{2}imx_0x^2\left(1-x_0^2\right)^{-1}\right\}, \quad \omega_1 = (\alpha\cdot x)\left(1-x_0^2\right)^{-1/2}, \\ \omega_2 = x^2\left(1-x_0^2\right)^{-1}, \quad \omega_3 = \mathrm{arctg}\, x_0 + \mathrm{arctg}\left\{(\beta\cdot x)(\gamma\cdot x)^{-1}\right\}; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} f(x) = x_0^{-3/2}\exp\left(-\frac{i}{2}x^2x_0^{-1}\right), \quad x^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2, \quad \omega_1 = (\alpha\cdot x)x_0^{-1}, \\ \omega_2 = x^2x_0^{-2}, \quad \omega_3 = x_0^{-1} + \mathrm{arctg}\left\{(\beta\cdot x)(\gamma\cdot x)^{-1}\right\}; \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} f(x) = x_0^{-3/4}, \quad \omega_1 = (\alpha\cdot x)x_0^{-1/2}, \\ \omega_2 = x^2x_0^{-1}, \quad \omega_3 = -\ln x_0 + \mathrm{arctg}\left\{(\beta\cdot x)(\gamma\cdot x)^{-1}\right\}; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} f(x) = x_0^{-3/4}, \quad \omega_1 = (\alpha\cdot x)x_0^{-1/2}, \quad \omega_2 = (\beta\cdot x)x_0^{-1/2}, \\ \omega_3 = (\gamma\cdot x)x_0^{-1/2}, \quad (\beta\cdot x) = \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3; \end{gathered} \tag{22}$$

$$f(x) = 1, \quad \omega_1 = (\alpha \cdot x), \quad \omega_2 = x^2,$$
$$\omega_3 = -x_0 + \operatorname{arctg}\left\{(\beta \cdot x)(\gamma \cdot x)^{-1}\right\}; \tag{23}$$

α, β, γ — постоянные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha \cdot \beta) = (\beta \cdot \gamma) = (\gamma \cdot \alpha) = 0.$$

Редуцированные уравнения, полученные с помощью анзацев (19)–(23) имеют вид

$$L\varphi + 6\varphi_2 - i\lambda^{-1}\varphi_3 + \frac{\lambda^2}{4}\omega_2\varphi - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \tag{24}$$

$$L\varphi \equiv \varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2^2 - \omega_1^2)\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12},$$

$$L\varphi + 6\varphi_2 + i\lambda^{-1}\varphi_3 - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \tag{25}$$

$$L\varphi + 6\varphi_2 + i\lambda^{-1}\varphi_3 - \frac{1}{4}\lambda^{-2}\omega_2\varphi - \lambda^{-1}\lambda_1|\varphi|^{4/3}\varphi = 0, \tag{26}$$

$$\varphi_a \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}, \quad \varphi_{ab} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b}, \quad a, b = \overline{1,3}.$$

Трехмерные уравнения в частных производных вида (24)–(26) редуцируются к набору нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего типа

$$a_2(\tau)\ddot{z}(\tau) + a_1(\tau)\dot{z}(\tau) + b|z|^{4/3}z = 0,$$
$$a_2(\tau) = a_{21} + a_{22}\tau, \quad a_1 = a_{11} + a_{12}\tau, \quad a(\tau) = \text{const}, \quad b = \text{const}, \tag{27}$$

z — комплексная функция.

Некоторые из ОДУ вида (27) удалось точно решить.

Таким образом, процесс редукции многомерного уравнения в частных производных к ОДУ дал возможность построить частные точные решения уравнения (15).

Явный вид точных решений уравнения (15) задается формулами

$$u(x) = \left(1 - x_0^2\right)^{-3/4} \exp\left\{\frac{i}{4}\lambda^{-1}x^2\left(1 - x_0\right)^{-1}\right\}, \quad \lambda = -\frac{2}{3}i; \tag{28}$$

$$u(x) = \{c_0x_0 - (c \cdot x)\}^{-3/2} \exp\left\{-\frac{i}{4}\lambda^{-1}x^2x_0^{-1}\right\},$$
$$(c \cdot x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad c^2 = \frac{4}{15}\lambda^{-1}\lambda_1, \tag{29}$$

c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные;

$$u(x) = x_0^{-3/2} \exp\left\{-\frac{i}{4}\lambda^{-1}\left(x^2 - r \cdot x\right)x_0^{-1}\right\}, \quad r^2 = -16\lambda\lambda_1; \tag{30}$$

$$u(x) = \left(\frac{4}{3}\lambda^{-1}x^2\right)^{-3/4} \exp\left\{-\frac{i}{4}\lambda^{-1}x^2x_0^{-1}\right\}; \tag{31}$$

$$u(x) = x_0^{-3/2}\varphi(\omega_1)\exp\left\{-\frac{i}{4}\lambda^{-1}x^2x_0^{-1}\right\}, \quad \omega_1 = (\alpha\cdot x)x_0^{-1}, \tag{32}$$

где функция $\varphi(\omega_1)$ определяется эллиптическим интегралом

$$\int_0^{\varphi} dy\left(k_1 + y^{10/3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{3}{5}\lambda^{-1}\lambda_1\right)^{1/2}(\omega_1 + k_2), \tag{33}$$

k_1, k_2 — произвольные постоянные;

$$u(x) = \left(\frac{c_0}{3}\lambda_1\right)^{3/4} x_0^{-1/2}\exp\left\{ic_0x_0^{-1/3} - \frac{i}{4}\lambda^{-1}(c\cdot x)x_0^{-1}\right\}, \tag{34}$$

$c^2 = 1$, c_0 — постоянная.

Формулы (28)–(34) задают многопараметрические семейства точных решений многомерного нелинейного уравнения (15). Некоторые из полученных решений неаналитичны по параметру λ_1.

Воспользовавшись свойством инвариантности уравнения (151 относительно группы $G_2(1,n)$, можно построить по решениям (28)–(34) новые семейства точных решений. Пусть $u_1(x_0,x_1,x_2,x_3)$ решение уравнения (15), тогда новые решения u_2, u_3 определяются через u_1 с помощью таких формул

$$u_2 = u_1(x_0, x_1 \to x_1 + v_1x_0, x_2 \to x_2 + v_2x_0, x_3 \to x_3 + v_3x_0)\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\lambda^{-1}\left(\frac{1}{2}v^2x_0 + (v\cdot x)\right)\right\},$$
$$u_3 = u_1\left(x_0 \to \frac{x_0}{1-dx_0}, x_1 \to \frac{x_1}{1-dx_0}, x_2 \to \frac{x_2}{1-dx_0}, x_3 \to \frac{x_3}{1-dx_0}\right)\times$$
$$\times(1-dx_0)^{-3/2}\exp\left\{\frac{i}{4}\lambda^{-1}\frac{dx^2}{1-dx_0}\right\},$$

где стрелки означают соответсвующую замену, d — произвольная постоянная.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения, в Теоретико-алгебраические исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 4–19.
3. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.
4. Fushchych W.I., Serov N.I., On some exact solutions of three-dimensional nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, L929–L933.
5. Фущич В.И., О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа, Препринт № 86.85, Киев, Институт математики АН УССР, 1986, 44 с.
6. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наукова думка, 1989, 340 с.