Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. II

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

Настоящая работа является продолжением статьи [1].

1. Классификация подалгебр алгебры $AP(2,2)$. В качестве базиса алгебры $AO(2,2)$ возьмем систему таких генераторов:

$$B_1 = -\frac{1}{2}(J_{14}+J_{23}), \quad B_2 = \frac{1}{2}(J_{24}-J_{13}), \quad B_3 = \frac{1}{2}(J_{12}-J_{34}),$$
$$C_1 = \frac{1}{2}(J_{14}-J_{23}), \quad C_2 = -\frac{1}{2}(J_{13}+J_{24}), \quad C_3 = \frac{1}{2}(J_{12}+J_{34}),$$

Пусть $AP(1,2) = \langle P_1, P_3, P_4\rangle \mathbin{\supset\!\!\!+} \langle J_{ab}\,|\,a,b=1,3,4\rangle$, $AP(2,1) = \langle P_1,P_2,P_3\rangle \mathbin{\supset\!\!\!+} \langle J_{ab}\,|\,a,b=1,2,3\rangle$. Проведем на основании [2] классификацию подалгебр алгебры $AP(2,2)$ относительно эквивалентности.

Теорема 1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ с точностью до эквивалентности исчерпываются расщепляемыми подалгебрами $K\subset AP(1,2)$, $L\subset AP(2,1)$, алгебрами $K\oplus\langle P_2\rangle$, $L\oplus\langle P_4\rangle$ и такими алгебрами:*

$F_1 = \langle P_1+P_3, P_2+P_4\rangle$, $F_2=\langle B_1-B_3\rangle$,
$F_j = \langle B_2\rangle$: 0, $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2-P_4\rangle$, $j=3,4,5,6$,
$F_j=\langle B_3\rangle$: 0, $\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$, $j=7,8$,
$F_j=\langle -B_1+B_3+C_2\rangle$: 0, $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$, $j=9,10,11$,
$F_{12}=\langle B_1-B_3+C_3\rangle$, $F_{13}=\langle B_1-B_3-C_3\rangle$,
$F_j=\langle B_2+eC_2\rangle$: 0, $\langle P_1+P_3\rangle$, $\langle P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2-P_4\rangle$, $0<e<1$, $j=14,\dots,18$,
$F_{19}=\langle B_2+C_2,P_2+P_4\rangle$, $F_j=\langle B_2-eC_3\rangle$: 0, $\langle P_1+P_3,P_2-P_4\rangle$, $e>0$, $j=20,21$,
$F_{22}=\langle B_3+eC_3\rangle$, $0<|e|<1$, $F_{23}=\langle B_1-B_3,B_2\rangle$,
$F_{24}=\langle B_1-B_3,C_2\rangle$, $F_{25}=\langle B_1-B_3,C_3\rangle$, $F_{26}=\langle B_2,C_2\rangle$, $F_{27}=\langle B_2,C_3\rangle$,
$F_{28}=\langle B_3,C_3\rangle$, $F_{29}=\langle B_2+dC_2,B_1-B_3\rangle$, $d>0$, $d\neq 1$,
$F_{30}=\langle B_2-dC_3,B_1-B_3\rangle$, $d>0$, $F_{31}=\langle B_1-B_3-C_2,C_1-C_3\rangle$,
$F_{32}=\langle B_1-B_3,B_2-C_2,C_1-C_3\rangle$, $F_{33}=AO(2,2)$.

Доказательство. Среди эквивалентных расщепляемых подалгебр алгебры $AP(2,2)$ из перечня, приведенного в [2], выбираем одну подалгебру, а остальные исключаем. Поскольку все случаи в чем-то аналогичны, ограничимся рассмотрением только нескольких, наиболее характерных, случаев.

Так как

$$B_1-B_3 = -\frac{1}{2}(x_1+x_3)(\partial_2+\partial_4)+\frac{1}{2}(x_2-x_4)(\partial_1-\partial_3),$$

Укр. мат. журн., 1989, **41**, № 5, 579–584.

то

$$\langle B_1 - B_3, P_1 - P_3\rangle \approx \langle P_2 + P_4, P_1 - P_3\rangle,$$
$$\langle B_1 - B_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle \approx \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle.$$

Далее ранги алгебр $\langle B_1, B_2, B_3\rangle$, $\langle B_1 - B_3, B_2, C_2\rangle$, $\langle B_1 - B_3, B_2 + dC_2, C_1 - C_3\rangle$ равны 3. Поскольку эти алгебры суть подалгебры $AO(2,2)$, то функция $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ является их инвариантом. Следовательно, рассматриваемые подалгебры эквивалентны алгебре $AO(2,2)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ исчерпываются с точностью до эквивалентности нерасщепляемыми подалгебрами $K \subset AP(1,2)$, $L \subset AP(2,1)$, алгебрами $K \oplus \langle P_2\rangle$, $L \oplus \langle P_4\rangle$ и такими алгебрами:*

$K_j = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$: 0, $\langle P_1 - P_3\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$, $j = 1,2,3$,
$K_4 = \langle B_1 - B_3 + P_2, P_1 - P_3\rangle$,
$K_5 = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_3, P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_4\rangle$, $\alpha > 0$,
$K_j = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4\rangle$: 0, $\langle P_1 - P_3\rangle$, $j = 6,7$,
$K_j = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_2\rangle$: 0, $\langle P_1 - P_3\rangle$, $j = 8,9$,
$K_{10} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_1, P_1 - P_3, P_2 + \alpha P_4\rangle$, $\alpha > 0$,
$K_j = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$: 0, $\langle P_1 + P_3\rangle$, $j = 11,12$,
$K_j = \langle B_2 + C_2 + P_2\rangle$: $\langle P_2 + P_4\rangle$, $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4\rangle$, $j = 13,14$,
$K_{15} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3\rangle$, $K_{16} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4\rangle$,
$K_{17} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4\rangle$,
$K_{18} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$, $\alpha > 0$,
$K_{19} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$, $\alpha > 0$,
$K_{20} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$,
$K_j = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4\rangle$: 0, $\langle P_1 - P_3\rangle$, $j = 21,22$,
$K_{23} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_4, P_2 + P_4\rangle$,
$K_{24} = \langle B_1 - B_3, 3B_2 + C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4\rangle$.

Доказательство. Если ранг алгебры $L \subset AP(2,2)$ равен r, а генераторы L имеют вид $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i(x_1,\ldots,x_s)\partial_i$, где $s \geq r$, то $L \approx \langle P_1,\ldots,P_r\rangle$.

Отсюда вытекает

$$\langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3\rangle \approx \langle P_2, P_4, P_1 - P_3\rangle,$$
$$\langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle \approx \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle,\ \beta > 0.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично или по схеме, приведенной в доказательстве теоремы 1. Теорема доказана.

2. Инвариантны подалгебр алгебры $AP(2,2)$ и подалгебр коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$. Пусть $y_1 = x_1 + x_3$, $\bar{y}_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 + x_1$, $\bar{y}_2 = x_2 - x_4$. Запись $L : f_1(x),\ldots,f_s(x)$ означает, что функции $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ образуют полную систему инвариантов алгебры L. В силу результатов п.1 и [3] ограничимся подалгебрами, описанными в теоремах 1 [1], 1, 2.

а) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры $AP(2,2)$.

F_5: $\bar{y}_1\bar{y}_2$; F_6: $\bar{y}_1 y_2^{-1}$; F_8: $\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2$; F_{11}: $2\ln\bar{y}_2 + \bar{y}_1\bar{y}_2^{-1}$; F_{17}: $\bar{y}_1^{1-e}\bar{y}_2^{1+e}$;
F_{18}: $\bar{y}_1^{1-e}y_2^{1+e}$; F_{21}: $\operatorname{arctg}(y_2\bar{y}_1^{-1}) + \frac{e}{2}\ln(\bar{y}_1^2 + y_2^2)$; F_{33}: $(y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2)^{1/2}$;
K_3: $y_1^2 + 2y_2$; K_5: $\frac{\alpha}{2}y_1^2 + \alpha x_2 - x_4$; K_{10}: $\frac{1}{2}y_1^2 - \alpha x_2 + x_4$; K_{14}: $\ln\bar{y}_1 - \bar{y}_2$;
K_{22}: $\frac{1}{2}(y_2\bar{y}_2 + y_2^2 y_1^{-1} + \frac{1}{4}\bar{y}_2^2 y_1)^{1/2}$; K_{23}: $(y_1\bar{y}_1 + \frac{1}{2}y_1\bar{y}_2^2)^{1/2}$;

K_{24}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+\bar y_2^2 y_1^{-1})^{1/2}$.

b) Инварианты подалгебр коразмерности 2 алгебры $AP(2,2)$.

F_1: $\bar y_1$, $\bar y_2$; F_4: $(\bar y_2 y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln(\bar y_1 y_2^{-1})$; F_{10}: $\frac12 y_1\bar y_2$, $\ln y_1+\frac12 y_2 y_1^{-1}$;
F_{15}: $(y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln(\bar y_1^{1-e}\bar y_2^{1+e})$; F_{16}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $\frac12\ln(y_1^{e-1}\bar y_2^{e+1})$;
F_{19}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $\bar y_2$; F_{23}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\bar y_2 y_1^{-1}$;
F_{24}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac14\ln(y_1\bar y_2)$; F_{25}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac14\ln(y_1^2+\bar y_2^2)$;
F_{26}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $(y_2\bar y_2)^{1/2}$; F_{27}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $y_1y_2-\bar y_1\bar y_2$;
F_{28}: $(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, $(x_3^2+x_4^2)^{1/2}$; F_{29}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac14\ln(y_1^{d-1}\bar y_2^{d+1})$;
F_{30}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\operatorname{arctg} y_1\bar y_2^{-1}+\frac{d}{4}\ln(y_1^2+\bar y_2^2)$;
F_{31}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln y_1-\frac14 y_2y_1^{-1}$; F_{32}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln y_1$;
K_2: $y_2+\frac12 y_1^2$, $\frac14\bar y_2$; K_4: $y^{1/2}$, $x_4+\frac12 y_1\bar y_2$; K_7: y_1, $x_2+y_1x_4$;
K_9: y_1, $x_4+y_1x_2$; K_{12}: $\frac12\bar y_2$, $\ln\bar y_1-\frac12 y_2$; K_{13}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $\frac12\ln y_1+\frac12\bar y_2$;
F_{15}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+y_2^2y_1^{-1})^{1/2}$, $\frac12\ln y_1$; F_{16}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2-2x_2^2y_1^{-1}-2\bar y_1)^{1/2}$, y_1;
K_{17}: $\frac12\{(y_2-\bar y_2(1-y_1))^2+(2\bar y_1-\bar y_2^2)(1+(1-y_1)^2)\}^{1/2}$, y_1;
K_{18}: $(y_1\bar y_1+x_2^2)^{1/2}$, $d\ln y_1+x_4$; K_{19}: $(y_1\bar y_1-x_4^2)^{1/2}$, $d\ln y_1+x_2$;
K_{20}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+2\bar y_2\ln y_1)^{1/2}$, $\frac12\ln\bar y_2$;
K_{21}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2+y_2^2y_1^{-1})^{1/2}$, $(y_1\bar y_2+2y_2)y_1^{-1/2}$.

в) Инварианты подалгебр коразмерности 3 алгебры $AP(2,2)$.

F_2: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln y_1$, $\frac12\ln\bar y_2$; F_3: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $(y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln(y_1\bar y_2^{-1})$;
F_7: $(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, $(x_3^2+x_4^2)^{1/2}$, $\arcsin(x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2})-\arcsin(x_4(x_3^2+x_4^2)^{-1/2})$;
F_9: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $y_1\bar y_2$, $\frac12\ln y_1+\frac14 y_2y_1^{-1}$;
F_{12}: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $y_1^2+\bar y_2^2$, $\bar y_1\bar y_2^{-1}-y_1(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)(y_1^2\bar y_2+\bar y_2^3)^{-1}-$
$-2\arcsin(\bar y_2(y_1^2+\bar y_2^2)^{-1/2}$;
F_{13}: $(y_1y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $y_1^2+\bar y_2^2$, $\bar y_1\bar y_2^{-1}(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2)y_1(y_1^2\bar y_2+\bar y_2^3)^{-1}+$
$+2\arcsin(\bar y_2(y_1^2+\bar y_2^2)^{-1/2}$;
F_{14}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $(y_2\bar y_2)^{1/2}$, $\frac12\ln(\bar y_1^{1-e}\bar y_2^{1+e})$;
F_{20}: $(y_1y_1+y_2\bar y_2)^{1/2}$, $y_1y_2-\bar y_1\bar y_2$, $e\ln(y_1^2+\bar y_2^2)-2\operatorname{arctg}(\bar y_2y_1^{-1})$;
F_{22}: $(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$, $(x_3^2+x_4^2)^{1/2}$, $(1-e)\arcsin(x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2})-$
$-(1+e)\arcsin(x_4(x_3^2+x_4^2)^{-1/2})$;
K_1: $x_3+\frac12 y_1\bar y_2$, $\frac14 y_2+\frac18 y_1^2\bar y_2$; K_6: $(y_1\bar y_1+x_2^2)^{1/2}$, y_1, $x_2+y_1x_4$;
K_8: $(y_1\bar y_1-x_4^2)^{1/2}$, y_1, $x_4+y_1x_2$; K_{11}: $(y_1\bar y_1)^{1/2}$, $\bar y_2$, $\frac14 y_2+\frac12\ln y_1$.

г) Инварианты подалгебр коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$. Здесь $y_1=x_1+x_5$, $\bar y_1=x_1-x_5$, $y_2=x_2+x_4$, $\bar y_2=x_2-x_4$.

$\mathcal{L}_1$: $y_2-\bar y_1x_3-\frac14(2d-\bar y_1^2)\bar y_2+\frac14\beta(2\alpha\bar y_1-\frac13\bar y_1^3)$; $\mathcal{L}_2$: $x_3-\frac12\bar y_1\bar y_2$;
$\mathcal{L}_3$: $x_3-\frac14(\bar y_1^2+\bar y_2^2)$; $\mathcal{L}_4$: $x_3+\frac14(\bar y_2^2-\bar y_1^2)$; $\mathcal{L}_5$: $\alpha\beta\ln\bar y_1+\frac12\beta y_2y_1^{-1}-\beta x_3+\frac12\bar y_1\bar y_2$;
$\mathcal{L}_6$: $(\bar y_1\bar y_2x_3-y_1\bar y_1-\frac14\bar y_1^2\bar y_2^2)^{1/2}$; $\mathcal{L}_7$: $x_3-\alpha\ln\bar y_1-\frac12\bar y_1\bar y_2$; $\mathcal{L}_8$: $x_3-\frac12\bar y_1\bar y_2$;
$\mathcal{L}_9$: $x_3-\alpha\ln\bar y_1-\frac12 y_2\bar y_1^{-1}$; $\mathcal{L}_{10}$: $x_3-\frac{\mu}{4}\ln(2y_2-\bar y_1^2)$;
$\mathcal{L}_{11}$: $x_3-\frac14\bar y_1^2+\frac{\alpha}{2}\ln\bar y_2$; $\mathcal{L}_{12}$: $\frac12(2y_2\bar y_2-2x_3^2-\bar y_1^2\bar y_2)^{1/2}$;
$\mathcal{L}_{13}$: $\frac{1}{\sqrt2}(y_1-x_3\bar y_2-\frac{\beta}{2}\bar y_1+\frac14\bar y_1\bar y_2^2+\frac12\alpha\beta\bar y_2-\frac{\beta}{8}\bar y_2^2-\frac{1}{12}\alpha\bar y_2^3+\frac{1}{32}\bar y_2^4)$;
$\mathcal{L}_{14}$: $x_3-\frac12\bar y_1\bar y_2+\frac14\alpha\bar y_2^2-\frac{1}{12}\bar y_2^3$; $\mathcal{L}_{15}$: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2-x_3^2-y_1^2\bar y_2^{-2}-2x_3y_1\bar y_2^{-1})^{1/2}$;
$\mathcal{L}_{16}$: $x_3+\frac12\bar y_1^2\bar y_2^{-1}$; $\mathcal{L}_{17}$: $x_3+\frac{\alpha}{2}\ln y_2+\frac12\bar y_1^2\bar y_2^{-1}$;
$\mathcal{L}_{18}$: $(y_1\bar y_1-x_3^2+y_2\bar y_2-2\gamma x_3-\gamma\bar y_1^2\bar y_2^{-1}-\gamma^2)^{1/2}$; $\mathcal{L}_{19}$: $(y_1\bar y_1+y_2\bar y_2-x_3^2+\bar y_1^2\bar y_2^{-1})^{1/2}$;
$\mathcal{L}_{20}$: $x_3+\frac12\beta\ln(\bar y_1\bar y_2)+\frac12\alpha\ln(\bar y_2\bar y_1^{-1})$; $\mathcal{L}_{21}$: $x_3-\alpha\operatorname{arctg}(\bar y_2\bar y_1^{-1})+\frac12\beta\ln(\bar y_1^2+\bar y_2^2)$.

Значения $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$для алгебр приведены в теоремах 1, 2 и леммах 1–7 [1].

3. **Симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера.** Если алгебра $L\subset AP(2,2)$ имеет только один инвариант, то обозначим его через ω. Если полная система инвариантов алгебры L состоит из s, $s=2,3$, инвариантов, то эти инварианты обозначим через $\omega_1,\ldots,\omega_s$, нумеруя их в том порядке, в каком они выписаны в п. 2.

Уравнение (1) [1] в результате подстановки $u=\varphi(\omega)$, которая соответствует алгебрам F_j, $j=5,6,8,11,17,18,21$, K_3, E_{14}, редуцируется к функциональному уравнению $F(\varphi,0)=0$; для остальных подалгебр коразмерности 1 алгебры $AP(2,2)$ получаем уравнение

$$k\varphi''+l\omega^{-1}\varphi'=F(\varphi,k(\varphi')^2), \tag{1}$$

где $k=\alpha^2-1$, $l=0$ для K_5, K_{10}; $k=1/2$, $l=0$ для K_{22}; $k=1$, $l=3$ для F_{33}, K_{24}; $k=1$, $l=1$ для K_{23}.

Пусть $\varphi_i=\partial\varphi/\partial\omega_i$, $\varphi_{ij}=\partial^2\varphi/\partial\omega_i\partial\omega_j$. Подстановка $u=\varphi(\omega_1,\omega_2)$, соответствующая алгебре F_1 , редуцирует уравнение (1) [1] к функциональному уравнению $F(\varphi,0)=0$. В остальных случаях получаем следующие уравнения:

$$\varphi_{11}+k\omega_1^{-1}\varphi_{12}+l\omega_1^{-1}\varphi_1=F(\varphi,(\varphi_1)^2+k\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=-1$, $l=1$ для F_4; $k=1+e$, $l=1$ для F_{15}; $k=e-1$, $l=1$ для F_{16}; $k=0$, $l=1$ для F_{19}; $k=0$, $l=3$ для F_{23}; $k=1$, $l=3$ для F_{24}, F_{25}, F_{31}, F_{32}, K_{15}, K_{20}; $k=d$, $l=3$ для F_{29}, F_{30}; $k=1$, $l=1$ для K_{13};

$$k\varphi_{12}=F(\varphi,k\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=1$ для F_{10}, K_2; $k=-1$ для K_{12};

$$\varphi_{11}+k\varphi_{22}+\omega_1^{-1}\varphi_1+k\omega_2^{-1}\varphi_2=F(\varphi,(\varphi_1)^2+k(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для F_{26}; $k=-1$ для F_{28};

$$\varphi_{11}-4\omega_1^2\varphi_{22}+4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12}+\omega_1^{-1}\varphi_1=F_1(\varphi,(\varphi_1)^2+4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2-4\omega_1^2(\varphi_2)^2)$$

для F_{27};

$$k(1-\omega_1^2)\varphi_{22}=F(\varphi,k(1-\omega_1^2)(\varphi_2)^2),$$

где $k=1$ для K_7; $k=-1$ для K_4, K_9;

$$\varphi_{11}+k\varphi_{22}+2\omega_1^{-1}(\alpha\varphi_{12}+\varphi_1)=F(\varphi,(\varphi_1)^2+k(\varphi_2)^2+2\alpha\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2),$$

где $k=1$ для K_{19}; $k=-1$ для K_{18};

$$\varphi_{11}+2(\omega_2-2)\omega_1^{-1}\varphi_{12}+(3-2\omega_2^{-1})\omega_1^{-1}\varphi_1=F(\varphi,(\varphi_1)^2+2(\omega_2-2)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2)$$

для K_{16};

$$\begin{aligned}&(\omega_2-1)\varphi_{11}+2((\omega_2-1)^2+1)\omega_1^{-1}\varphi_{12}+4(\omega_2-1)\omega_1^{-1}\varphi_1=\\&\quad=F(\varphi,(\omega_2-1)(\varphi_1)^2+2((\omega_2-1)^2+1)\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2)\end{aligned}$$

для K_{17};

$$\varphi_{11}+8\varphi_{22}+3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12}+3\omega_1^{-1}\varphi_1=F(\varphi,(\varphi_1)^2+8(\varphi_2)^2+3\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_1\varphi_2)$$

для K_{21}.

При подстановке $u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ уравнение (1) [1] редуцируется к уравнению от трех переменных ω_1, ω_2, ω_3. Поскольку

$$\Box u = (\Box\omega^a)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a} + (\omega^a_{x_\mu}\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = (\omega^a_{x_\mu}\omega^b_{x^\mu})\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_b},$$

где $\omega^a_{x_\mu} = \partial\omega_a/\partial x_\mu$, то для записи редуцированого уравнения достаточно указать вид $\Box u$. Ниже приведены значения для каждой подалгебры коразмерности 3 алгебры $AP(2,2)$.

$$\begin{aligned}
&F_2: \ \varphi_{11} + \omega_1^{-1}(\varphi_{12} + \varphi_{13} + 3\varphi_1);\\
&F_3: \ \varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}(\varphi_{13} + \varphi_1) - \omega_2^{-1}(\varphi_{23} - \varphi_2);\\
&F_7: \ \varphi_{11} - \varphi_{22} + (\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2})\varphi_{33} + \omega_1^{-1}\varphi_1 - \omega_2^{-1}\varphi_2;\\
&F_9: \ \varphi_{11} + (4\omega_2\varphi_{12} + \varphi_{13} + 3\varphi_1)\omega_1^{-1} + \varphi_{23};\\
&F_{12}: \ \varphi_{11} - 4(\omega_1^2 - 2\omega_2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + \omega_1^{-1}(4\omega_2\varphi_{12} + 3\varphi_1);\\
&F_{13}: \ \varphi_{11} - 4(2\omega_2 + \omega_1^2)\omega_2^{-2}\varphi_{33} + 4\omega_2\omega_1^{-1}\varphi_{12} + 3\omega_1^{-1}\varphi_1;\\
&F_{14}: \ \varphi_{11} + \varphi_{22} + \omega_1^{-1}((1-e)\varphi_{13} + \varphi_1) + \omega_2^{-1}((1+e)\varphi_{23} + \varphi_2);\\
&F_{20}: \ \varphi_{11} - 4\omega_1^2\varphi_{22} - 8\varphi_{23} + \omega_1^{-1}(4e\omega_2\varphi_{12} - 8\varphi_{23} + 3\varphi_1);\\
&F_{22}: \ \varphi_{11} - \varphi_{22} + \{(1-e)^2\omega_1^{-2} - (1+e)^2\omega_2^{-2}\}\varphi_{33} + \varphi_1 - \varphi_2;\\
&K_1: \ -(1+\omega_3)\varphi_{11} + \varphi_{23};\\
&K_6: \ \varphi_{11} + (1-\omega_2^2)\varphi_{33} + 2\omega_1^{-1}(\omega_2\varphi_{12} + \omega_3\varphi_{13} + \varphi_1);\\
&K_8: \ \varphi_{11} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{33} + 2\omega_1^{-1}(\omega_2\varphi_{12} + \omega_3\varphi_{13} + \varphi_1);\\
&K_{11}: \ \varphi_{11} + \varphi_{23} + \omega_1^{-1}(\varphi_{13} + \varphi_1).
\end{aligned}$$

Подстановка $u = \varphi(\omega)$, соответствующая подалгебрам коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$, редуцирует уравнение (1) [1] к обыкновенному дифференциальному уравнению (1), где $k = -2\alpha$, $l = 0$ для $\mathcal{L}_1$; $k = \beta(1-\beta)$, $l = 0$ для $\mathcal{L}_5$; $k = -1$, $l = -1$ для $\mathcal{L}_6$; $k = 1/2$, $l = 2$ для $\mathcal{L}_{12}$; $k = 1$, $l = 4$ для $\mathcal{L}_{15}$, $\mathcal{L}_{18}$, $\mathcal{L}_{19}$; $k = -\beta$, $l = 0$ для $\mathcal{L}_{13}$; $k = -1$, $l = 0$ для $\mathcal{L}_j$, $j = 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21$.

1. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравненния Даламбера. II, *Укр. мат журн.*, 1988, **40**, № 4, 411–424.
2. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2,n)$, Препринт № 85.89, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 50 с.
3. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.