Подалгебры псевдоортогональной алгебры $AO(3,3)$

А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

В работе проведена классификация всех подалгебр посевдоортогональной алгебры $AO(3,3)$ с точностью до $O(3,3)$-сопряженности.

Введение

Ряд уравнений теоретической и математической физики инвариантны относительно группы $C(2,2)$ конформных преобразований псевдоевклидова пространства $R_{2,2}$ [1]. Поэтому подалгебры алгебры Ли $AC(2,2)$ группы $C(2,2)$ можно использовать для поиска инвариантных и частично инвариантных решений таких уравнений. Известно (см. например [2]), что задача классификации подалгебр алгебры $AC(2,2)$ относительно $C(2,2)$-сопряженности эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры $AO(3,3)$ относительно $O(3,3)$-сопряженности. Решению последней задачи и посвящена настоящая работа. Работа тесно примыкает к исследованиям, выполненными в [3]. Следуя [3], все подалгебры алгебры $AO(3,3)$ мы разбиваем на три класса, характеризуя каждый из них изотропным рангом. В §§ 1, 2 изложена классификация подалгебр изотропных рангов 0 и 1 алгебры $AO(3,3)$. В § 3 задача классификации подалгебр изотропного ранга 3 алгебры $AO(3,3)$ сведена к задаче классификации подалгебр алгебры $AIGL(3,R)$, являющейся алгеброй Ли группы $IGL(3,R)$ неоднородных преобразований трехмерного вещественного пространства. Так как классификация подалгебр алгебры $AIGL(3,3)$ изложена в [4], то отсюда получаем классификацию подалгебр изотропного ранга 3 алгебры $AO(3,3)$. При решении указанных выше задач используется ряд общих принципов классификации подалгебр произвольной алгебры Ли, изложенных в [5, 6, 7].

§ 1. Подалгебры изотропного ранга 0 алгебры $AO(3,3)$

Пусть R — поле вещественных чисел, $V = R_{3,3}$ — псевдоевклидово пространство сигнатуры $(3,3)$, $\{Q_1,\dots,Q_6\}$ — ортонормированный базис пространства V. Псевдоортогональной группой $O(3,3)$ называется группа, сохраняющая форму $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5-x_6y_6$. Если в базисе $\{Q_1,\dots,Q_6\}$ пространства V матрица f равна S, то $f\in O(3,3)$ тогда и только тогда, когда $S^TJ_{3,3}S = J_{3,3}$, где

$$J_{3,3} = \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & -E_3 \end{pmatrix},$$

E_3 — единичная матрица порядка 3, S^T — матрица, транспонированная к матрице S. Таким образом, группу $O(3,3)$ можно определить как группу всех квадратных матриц Δ порядка 6 над полем вещественных чисел R, удовлетворяющих матричному уравнению $\Delta^TJ_{3,3}\Delta = J_{3,3}$. Отсюда вытекает, что алгебра Ли $AO(3,3)$ группы $O(3,3)$ состоит из всех вещественных матриц X, удовлетворяющих соотношению $X\cdot J_{3,3} + J_{3,3}\cdot X^T = 0$. Пусть E_{ik} — матрица порядка 6, имеющая

Препринт 89.67, Киев, Институт математики АН УССР, 1989, 40 с.

единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах $(i,k=1,\ldots,6)$. Базис алгебры $AO(3,3)$ образуют матрицы: $J_{ab}=E_{ab}-E_{ba}$ $(a<b;\ a,b=1,2,3)$, $J_{ai}=-E_{ai}-E_{ia}$ $(a=1,2,3;\ i=4,5,6)$, $J_{cd}=-E_{cd}+E_{dc}$ $(c<d;\ c,d=4,5,6)$.

Каждый внутренний автоморфизм $\Delta\to C\Delta C^{-1}$ группы $O(3,3)$ индуцирует автоморфизм $\varphi_c: X\to CXC^{-1}$ алгебры Ли $AO(3,3)$. Этот автоморфизм мы будем называть $O(3,3)$-автоморфизмом алгебры $AO(3,3)$, соответствующим матрице C. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры $AO(3,3)$ будем называть $O(3,3)$-сопряженными, если $CL_1C^{-1}=L_2$.

Подалгебра $L\subset AO(3,3)$ называется подалгеброй класса 0, если V не содержит вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L. Будем говорить, что подалгебра $L\subset AO(3,3)$ относится к классу $r>0$ или имеет изотропный ранг r, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно L, равен r. Для подалгебры класса 0 изотропный ранг полагаем равным нулю. Очевидно, любая подалгебра L алгебры $AO(3,3)$ имеет изотропный ранг 0, 1 или 3.

В настоящем параграфе мы изучим с точностью до $O(3,3)$-сопряженности подалгебры класса 0 алгебры $AO(3,3)$. Пусть L — одна из таких подалгебр. Тогда пространство V разлагается в прямую ортогональную сумму неприводимых L-подпространств $V_1,\ldots\ldots,V_s$ каждое из которых невырождено. Если (p_i,q_i) — сигнатура пространства V_i, в силу теоремы Витта можно предполагать, что V_i обладает базисом

$$Q_{j_i},\ldots,Q_{j_{p_i}},Q_{j_{p_i+1}},\ldots,Q_{j_{p_i+q_i}}. \tag{1.1}$$

Здесь $j_1<\cdots<j_{p_i}\le 3$, $3<j_{p_i+1}<\cdots<j_{p_i+q_i}\le 6$. Если $J\in L$, то $\mathrm{ad}\,J$ можно рассматривать как линейное преобразование $\hat{J}_i$ пространства V_i. Матрица $\pi_i(J)$ преобразования $\hat{J}_i$ в базисе (1.1) пространства V_i содержится в $AO(p_i,q_i)$. Отображение $\pi_i: L\to AO(p_i,q_i)$ является гомоморфизмом, а $\pi_i(L)$ неприводимой подалгеброй алгебры $AO(p_i,q_i)$. Так как отображение $J\to(\pi_1(J),\ldots,\pi_s(J)$ есть изоморфизм L в алгебру $\pi_1(L)\times\cdots\times\pi_s(L))$, то будем говорить, что L разлагается относительно базиса $\{Q_1,\ldots,Q_6\}$ в подпрямое произведение алгебр $\pi_1(L),\ldots,\pi_s(L)$ и записыватъ это так:

$$L=\pi_1(L)\mathbin{\underset{\cdot}{\times}}\cdots\mathbin{\underset{\cdot}{\times}}\pi_s(L).$$

Пусть $L_i=\{J\in L'\,|\,\pi_j(J)=0 \text{ для всех } j\ne i\}$, где $L'=\pi_1(L)\times\cdots\times\pi_s(L)$. Легко видеть, что L_i — подалгебра алгебры L' и что мы имеем разложение $L=L_1+\cdots+L_s$. Условимся алгебру L_i отождествлять с алгеброй $\pi_i(L)$. В этом смысле мы будем говорить, что L_i — неприводимая подалгебра алгебры $AO(p_i,q_i)$. Таким образом, подалгебра L класса 0 алгебры $AO(3,3)$ либо неприводимая, либо разлагается в подпрямую сумму неприводимых подалгебр.

Теорема 1.1. *Алгебра $AO(3,3)$ содержит с точностью до $O(3,3)$-сопряженности только одну собственную неприводимую подалгебру, которая сопряжена с алгеброй* $\langle J_{12}-J_{45},J_{13}-J_{46},J_{23}-J_{56},J_{15}-J_{24},J_{26}-J_{35},J_{16}-J_{34}\rangle$.

Доказательство. Подалгебра L алгебры $AO(3,3)$ называется нормальной, если полупростая часть подалгебры L содержится в $AO(3)\oplus AO(3)$. Из результатов работы [8] вытекает, что $AO(3,3)$ не содержит нормальных неприводимых подалгебр. Опишем неприводимые подалгебры алгебры $AO(3,3)$, не являющиеся нормальными. Пусть L — одна из таких подалгебр и $L = L_1 + L_2$ — ее разложение Картана, где L_1 — максимальная компактная подалгебра алгебры L. В силу предположения относительно L можно считать, что $L_1 = \langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56} \rangle$, т.е. L представляется матрицами

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

где $X \in AO(3)$. Пусть

$$K = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ Z^T & 0 \end{pmatrix}$$

— два произвольных элемента, содержащихся в L_2. Так как

$$[K, T] = \begin{pmatrix} YZ^T - ZY^T & 0 \\ 0 & Y^T Z - Z^T Y \end{pmatrix},$$

то

$$YZ^T - ZY^T = Y^T Z - Z^T Y. \tag{1.2}$$

В случае, если $Y = Y^T$, а $Z = Z_1 + Z_2$, где $Z_1^T = -Z_1$, $Z_2^T = Z_2$, равенство (1.2) принимает вид

$$YZ_1 + Z_1 Y = 0. \tag{1.3}$$

Подпространство N, состоящее из векторов $\begin{pmatrix} p \\ \lambda p \end{pmatrix}$, инвариантно относителъно подалгебры L_1. Если допустить, что для любого $K \in L_2$ матрица Y симметрическая, то подпространство N инвариантно относительно L, что противоречит условию. Следовательно, можно предполагать, что Z не является симметрической матрицей. Тогда матрица Z разлагается в сумму кососимметрической матрицы Z_1 и симметрической матрицы Z_2. С точностью до $O(3,3)$-сопряженности можно допускать, что $Z_1 = J_{12}$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} 0 & U \\ U^T & 0 \end{pmatrix},$$

— матрица из L_2. Полагая в (1.3) $Y = U$, а Z равно поочередно $J_{12} + Z_2$, $J_{23} - [J_{13}, Z_2]$, $J_{13} - [J_{23}, Z_2]$, получаем систему

$$J_{ab} \cdot U + U \cdot J_{ab} = 0 \quad (a, b = 1, 2, 3), \tag{1.4}$$

имеющую единственное нулевое решение.

Пусть

$$Z_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_2 & \gamma_1 \end{pmatrix},$$

Из коммутационных соотношений

$$[L_{12}, Z] = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 & -2\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \beta_2 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[L_{13}, [J_{23}, Z]] = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & \gamma_1 - \beta_1 & -2\beta_2 \\ \gamma_1 - \beta_1 & 0 & -\alpha_3 \\ -2\beta_2 & -\alpha_3 & 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

и условия (1.4) имеем $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$. Из соотношения $[J_{23}, [J_{23}, J_{12} + \alpha_1 E]] = -J_{12}$ получаем $\alpha_1 = 0$. Таким образом, алгебра $AO(3,3)$ содержит единственную с точностью до $O(3,3)$-сопряженности собственную неприводимую подалгебру

$$L = \langle J_{12} - J_{45}, J_{13} - J_{46}, J_{23} - J_{56}, J_{15} - J_{24}, J_{26} - J_{35}, J_{16} - J_{34} \rangle.$$

Теорема доказана.

Найдем все максималъные подалгебры класса 0 алгебры $AO(3,3)$, используя для этого тип разложения пространства V в прямую ортогональную сумму неприводимых подпространств. Пусть, например, L — максимальная подалгебра класса 0 алгебры $AO(3,3)$ и $V = V_1 \oplus V_2$ — прямая ортогональная сумма двух L-неприводимых подпространств $V_1 = \langle Q_1, Q_2, Q_4 \rangle$ и $V_2 = \langle Q_3, Q_5, Q_6 \rangle$. Мы будем говорить, что разложение подпространства V относится к типу $(++-)(+--)$. Очевидно, подалгебра L совпадает с алгеброй $\langle J_{12}, J_{14}, J_{24} \rangle \oplus \langle J_{35}, J_{36}, J_{56} \rangle$. Все максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(3,3)$ выписаны в таблице 1.

Таблица 1

Максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(3,3)$

№ п/п	Тип разложения пространства V	Максимальные подалгебры класса 0
1	$(+++---)$	$AO(3,3)$
2	$(+++--)(-)$	$AO(3,2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,\dots,5 \rangle$
3	$(+)(++---)$	$AO(2,3) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,\dots,6 \rangle$
4	$(++)(+---)$	$\langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = 3,\dots,6 \rangle$
5	$(+++-)(--)$	$\langle J_{ab} \mid a,b = 1,\dots,4 \rangle \oplus \langle J_{56} \rangle$
6	$(+++)(---)$	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
7	$(++-)(+--)$	$\langle J_{12}, J_{14}, J_{24} \rangle \oplus \langle J_{35}, J_{36}, J_{56} \rangle$
8	$(+)(+)(+---)$	$AO(1,3) = \langle J_{ab} \mid a,b = 3,\dots,6 \rangle$
9	$(+++-)(-)(-)$	$AO(3,1) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,\dots,4 \rangle$
10	$(+)(++)(---)$	$\langle J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
11	$(+)(++-)(--)$	$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34} \rangle \oplus \langle J_{56} \rangle$
12	$(++)(+--)(-)$	$\langle J_{12} \rangle \oplus \langle J_{34}, J_{35}, J_{45} \rangle$
13	$(+++)(--)(-)$	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle \oplus \langle J_{45} \rangle$
14	$(+)(+)(+)(---)$	$AO(3) = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56} \rangle$
15	$(-)(-)(-)(+++)$	$AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$

Теперь уже нетрудно получить описание всех подалгебр класса 0 алгебры $AO(3,3)$ с точностью до $O(3,3)$-сопряженности. Пусть, например, разложение пространства V относится к типу $(+++)(---)$. Подалгебра L, для которой указанное разложение пространства V существует, является либо прямой суммой $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$, либо разлагается в подпрямую сумму $L_1 \dot{+} L_2$ двух неприводимых подалгебр L_1 и L_2. Следовательно, $L_1 = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $L_2 = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$. Нетрудно убедиться, что с точностью до $O(3,3)$-сопряженности подалгебра $L_1 \dot{+} L_2$ сопряжена с алгеброй $L' = \langle J_{12}+J_{45}, J_{13}-J_{46}, J_{23}+J_{56}\rangle$. Однако, изотропный ранг алгебры L' равен 3, так как V содержит трехмерное вполне изотропное подпространство $\langle Q_1+Q_4, Q_2-Q_5, Q_3+Q_6\rangle$, инвариантное относительно алгебры L'. Это доказывает, что если разложение пространства относится к типу $(+++)(---)$, то этому разложению соответствует единственная подалгебра (с точностью до $O(3,3)$-сопряженности), совпадающая с $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

Подалгебры изотропного ранга 0 алгебры $AO(3,3)$:

$AO(3,3)$, $\langle J_{12}-J_{45}, J_{13}-J_{46}, J_{23}-J_{56}, J_{15}-J_{24}, J_{26}-J_{35}, J_{16}-J_{34}\rangle$,
$AO(3,2) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$,
$\langle -2J_{12}+J_{45}, J_{14}+J_{25}+\sqrt{3}J_{35}, -J_{15}+J_{24}-\sqrt{3}J_{34}\rangle$,
$AO(2,3) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{26}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$,
$\langle -2J_{56}+J_{23}, J_{36}+J_{25}+\sqrt{3}J_{24}, -J_{26}+J_{35}-\sqrt{3}J_{34}\rangle$,
$AO(2)\oplus AO(1,3) = \langle J_{12}, J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$,
$AO(3,1)\oplus AO(2) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{56}\rangle$,
$AO(1,3) = \langle J_{34}, J_{35}, J_{36}, J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$,
$AO(3)\oplus AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$,
$AO(2,1)\oplus AO(1,2) = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, J_{35}, J_{36}, J_{56}\rangle$,
$AO(3,1) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$,
$AO(2)\oplus AO(3) = \langle J_{23}, J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$, $AO(3) = \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$,
$AO(2,1)\oplus AO(2) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{56}\rangle$, $AO(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$,
$AO(2)\oplus AO(1,2) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$, $AO(3)\oplus AO(2) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$.

§ 2. Подалгебры изотропного ранга 1 алгебры $AO(3,3)$

Согласно определению подалгебра $L \subset AO(3,3)$ имеет изотропный ранг 1 или относится к классу 1, если ранг максимального вполне изотропного подпространства $V_{(1)}$, инвариантного относительно L, равен 1. В силу теоремы Витта можно предполагать, что $V_{(1)} = \langle Q_1 + Q_6\rangle$. Максимальная подалгебра, оставляющая $V_{(1)}$ инвариантным, совпадает с алгеброй $A_{(1)} = \langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle \oplus \langle J_{16}\rangle)$, где $G_a = J_{1a} - J_{a6}$ $(a = 2,3,4,5)$. Подалгебра $\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$ является алгеброй Ли псевдоортогональной группы $O(2,2)$, а подалгебра $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$ является алгеброй Ли группы Пуанкаре $P(2,2)$. Учитывая, что элемент J_{16} играет роль дилатации, получаем, что $A_{(1)}$ является алгеброй Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(2,2)$, т.е. $A_{(1)} = A\tilde{P}(2,2)$. Любая подалгебра $L \subset AO(3,3)$ изотропного ранга 1, оставляющая $V_{(1)}$ инвариантным, содержится в $A_{(1)}$ и ее проекция $\pi(L)$ на подалгебру $AO(2,2)$ имеет изотропный ранг 0. Таким образом, нам необходимо провести классификацию с точностью до $O(2,2)$-сопряженности подалгебр изотропного ранга 0 алгебры и расширить каждую из них с помощью дилатации J_{16}. Максимальные подалгебры изотропного ранга 0 алгебры $AO(2,2)$ находим, следуя § 1. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

Максимальные подалгебры класса 0 алгебры $AO(2,2)$

№ п/п	Тип разложения пространства V	Максимальные подалгебры класса 0
1	$(++--)$	$AO(2,2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4,5\rangle$
2	$(++-)(-)$	$AO(2,1) = \langle J_{23}, J_{24}, J_{25}\rangle$
3	$(+)(+--)$	$AO(1,2) = \langle J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$
4	$(++)(--)$	$AO(2) \oplus AO(2) = \langle J_{23}, J_{45}\rangle$
5	$(+)(+)(--)$	$AO(2) = \langle J_{45}\rangle$
6	$(++)(-)(-)$	$AO(2) = \langle J_{23}\rangle$

Из таблицы 2 видно, что если подалгебра $L \subset AO(2,2)$ изотропно-ранга 0 не является максимальной, то она либо неприводима, а потому сопряжена с алгеброй $\langle J_{25}+J_{34}, J_{24}-J_{35}, J_{23}-J_{45}, J_{23}\rangle$ [6], либо является подпрямой суммой подалгебр $\langle J_{23}\rangle$ и $\langle J_{45}\rangle$. Во втором случае $L = \langle J_{23}+\gamma J_{45}\rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\,[1,-1,1,1,1,1]$, отображает L на $\langle J_{23}-\gamma J_{45}\rangle$. Следовательно, можно предполагать, что $\gamma > 0$. Если $\gamma = 1$, то алгебра $\langle J_{23}+J_{45}\rangle$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $\langle Q_2+Q_5, Q_3+Q_4\rangle$, что противоречит предположению о L. Таким образом, $L = \langle J_{23}+\gamma J_{45}\rangle$ $(\gamma > 0;\ \gamma \neq 1)$.

Проведем далее с точностью до $\tilde{O}(2,2)$-сопряженности классификацию всех подалгебр L алгебры $A\tilde{O}(2,2) = AO(2,2) \oplus \langle J_{16}\rangle$, обладающих тем свойством, что $\pi(L)$ является подалгеброй изотропного ранга 0 алгебры $AO(2,2)$. Это задача классификации подалгебр прямой суммы двух алгебр Ли. Применяя теорему Ли–Гурса, получаем следующие подалгебры:

$F_1 = \langle J_{23}+\alpha J_{16}\rangle$, $F_2 = \langle J_{23}, J_{16}\rangle$, $F_3 = \langle J_{45}+\alpha J_{16}\rangle$,
$F_4 = \langle J_{45}, J_{16}\rangle$, $F_5 = \langle J_{23}+\gamma J_{45}+\alpha J_{16}\rangle$, $F_6 = \langle J_{23}+\gamma J_{45}, J_{16}\rangle$,
$F_7 = \langle J_{23}+\alpha J_{16}, J_{45}+\beta J_{16}\rangle$, $F_8 = \langle J_{23}, J_{45}, J_{16}\rangle$, $F_9 = \langle J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$,
$F_{10} = \langle J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16}\rangle$, $F_{11} = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$,
$F_{12} = \langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{16}\rangle$, $F_{13} = \langle J_{25}+J_{34}, J_{24}-J_{35}, J_{23}-J_{45}, J_{23}+\alpha J_{10}\rangle$,
$F_{14} = \langle J_{25}+J_{34}, J_{24}-J_{35}, J_{23}-J_{45}, J_{23}, J_{16}\rangle$,
$F_{15} = AO(2,2) \oplus \langle J_{16}\rangle$, $F_{16} = AO(2,2)$.

Здесь $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$.

Найдем все расширения подалгебр F_i в алгебре $A\tilde{P}(2,2)$. Нахождение расщепляемых расширений подалгебры F_i сводится к задаче классификации с точностью до $\tilde{O}(2,2)$-сопряженности всех подпространств пространства $W = \{G_2, G_3, G_4, G_5\}$, инвариантных относителъно F_i. Рассмотрим, например, подалгебру F_1. Ее проекция $\pi(F_1)$ на $AO(2,2)$ совпадает с $\langle J_{23}\rangle$. Пространство W имеет с точностью до $O(2,2)$-сопряженности только следующие $\langle J_{23}\rangle$-инвариантные, а значит, и F_1-инвариантные подпространства: 0, $\langle G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$. Аналогично рассматриваются остальные подалгебры F_i.

Найдем все нерасщепляемые расширения подалгебр F_i в алгебре $A\tilde{P}(2,2)$. Каждая из подалгебр F_i действует вполне приводимо на подпространстве W. Следовательно, F_i обладает расщепляемыми расширениями тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) F_i полупроста, 2) F_i аннулирует только нулевое подпространство пространства V. Среди подалгебр F_i существуют только две подалгебры $\langle J_{23}\rangle$ и $\langle J_{45}\rangle$, не удовлетворяющие сформулированному критерию, и потому только эти подалгебры обладают нерасщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(2,2)$. Рассмотрим, например, подалгебру $\langle J_{23}\rangle$. Можно предполагать, что подалгебра L, удовлетворяющая условию $\pi(L) = \langle J_{23}\rangle$, является полупрямой суммой $L = W_1 \subset\!\!\!\!+ \langle J_{23} + \delta G_4 + \sigma G_5\rangle$, где $W_1 \subset W$ — подпространство, инвариантное относительно $\langle J_{23}\rangle$. Пусть $W_1 = 0$ или $W_1 = \langle G_2, G_3\rangle$. Используя автоморфизм $\exp[\mathrm{ad}\,(tJ_{45})]$, можем положить $\delta = 0$. Последовательно применяя автоморфизм $\varphi_1 = \exp[\mathrm{ad}\,(tJ_{16})]$ и автоморфизм φ_2, определяемый матрицей $\mathrm{diag}\,[1,-1,1,1,1,1]$, можно положить $\sigma = 1$. Пусть $W = \langle G_4\rangle$ или $W = \langle G_2, G_3, G_4\rangle$. Тогда $\sigma = 0$. Последовательное применение автоморфизмов φ_1 и φ_2 позволяет считать $\sigma = 1$. Следовательно, мы получаем следующие нерасщепляемые расширения алгебры $\langle J_{23}\rangle$: $\langle J_{23} + G_5\rangle$: 0, $\langle G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4\rangle$.

Подалгебры изотропного ранга 1 алгебры $AO(3,3)$:

$\langle J_{23} + \alpha J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23} + G_5\rangle$: 0, $\langle G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4\rangle$;
$\langle J_{45} + \alpha J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_3, G_4, G_5\rangle$ $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{45}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_3, G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{45} + G_2\rangle$: 0, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23} + \gamma J_{45} + \alpha J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23} + \gamma J_{45}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23} + \alpha J_{16}, J_{45} + \beta J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{45}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3\rangle$, $\langle G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$: 0, $\langle G_2\rangle$, $\langle G_3, G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2\rangle$, $\langle G_3, G_4, G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$: 0, $\langle G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_5\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4\rangle$, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{25} + J_{34}, J_{24} - J_{35}, J_{23} - J_{45}, J_{23} + \alpha J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$;
$\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}, J_{16}\rangle$: 0, $\langle G_2, G_3, G_4, G_5\rangle$.

§ 3. Подалгебры изотропного ранга 3 алгебры $AO(3,3)$

В настоящем параграфе задача классификации подалгебр $L \subset AO(3,3)$ изотропного ранга 3 сведена к задаче классификации подалгебр алгебры $AIGL(3,R)$, которая является алгеброй Ли группы неоднородных преобразований трехмерного вещественного пространства. Алгебра $AIGL(3,R)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & Y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1 \in AGL(3,R)$, $Y_1 \in R^3$. Ее базис образуют матрицы

$$\tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde K_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde L_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde L_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde L_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde D_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde D_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde T_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tilde T_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \tilde T_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть $L\subset AO(3,3)$ — подалгебра изотропного ранга 3. В силу теоремы Витта можно считать, что L оставляет инвариантными подпространство $V_{(3)}=\langle Q_1+Q_4,Q_2+Q_5,Q_3+Q_6\rangle$. Все такие подалгебры содержатся в максималъной подалгебре $A_{(3)}$ класса 3, которая является нормализатором в $AO(3,3)$ вполне изотропного подпространства $V_{(3)}$. Согласно работе [3] каждый элемент J алгебры $A_{(3)}$ однозначно представляется в виде

$$J=\begin{pmatrix}J_1&-J_1\\J_1&-J_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-J_2\\J_2&-J_2-J_2^T\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

где $J_1\in AO(3)$, $J_2\in AGL(3,R)$. Символически это будем записыватъ так: $J=(J_1;J_2)$. В соответствии с разложением (3.1) мы можем утверждать, что алгебра $A_{(3)}$, рассматривается как векторное пространство, разлагается в декартово произведение $AO(3)\times AGL(3,R)$. Отсюда следует, что базис алгебры $A_{(3)}$ образуют матрицы

$K_{12}=J_{12}-J_{45}$, $K_{13}=J_{13}-J_{46}$, $K_{23}=J_{23}-J_{56}$, $D_1=J_{14}-J_{25}$,
$D_2=J_{14}-J_{36}$, $S=-\frac12(J_{14}+J_{25}+J_{36})$, $T_3=\frac12(J_{12}+J_{15}-J_{24}+J_{45})$,
$T_2=\frac12(-J_{13}-J_{16}+J_{34}-J_{46})$, $T_1=\frac12(J_{23}+J_{26}-J_{35}+J_{56})$.

Алгебра матриц $(\tilde J_1;0)$, где $\tilde J_1$ пробегает $AO(3)$, образует коммутативный идеал V_1 алгебры $A_{(3)}$, факторалгебра $A_{(3)}/V_1$ по которому изоморфна алгебре $AGL(3,R)$. Следовательно, $A_{(3)}$ изоморфна алгебре $AIGL(3,R)$ и этот изоморфизм φ определяется как линейное отображение φ:

$\tilde K_{12}\to K_{12}$, $\tilde K_{13}\to K_{13}$, $\tilde K_{23}\to K_{23}$, $\tilde L_{12}\to L_{12}$, $\tilde L_{13}\to L_{13}$,

$\tilde{L}_{23} \to L_{23}$, $\tilde{D}_1 \to D_1$, $\tilde{D}_2 \to D_2$, $\tilde{S} \to S$, $\tilde{T}_1 \to T_1$, $\tilde{T}_2 \to T_2$, $\tilde{T}_3 \to T_3$.

В дальнейшем будем рассматривать следующий базис алгебры $AIGL(3,R)$:

$\tilde{A}_1 = -\tilde{D}_1$, $\tilde{A}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{12} - \tilde{L}_{12})$, $\tilde{A}_3 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{12} + \tilde{L}_{12})$,
$\tilde{D} = -\frac{1}{3}\tilde{D}_1 + \frac{2}{3}\tilde{D}_2 + \frac{2}{3}\tilde{S}$, $\tilde{S}$, $\tilde{P}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{13} + \tilde{L}_{13})$,
$\tilde{P}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{23} + \tilde{L}_{23})$, $\tilde{K}_{13}$, $\tilde{A}_2^1 = \frac{1}{2}(\tilde{K}_{23} - \tilde{L}_{23})$, $\tilde{T}_1$, $\tilde{T}_2$, $\tilde{T}_3$.

Подействовав на этот базис изоморфизмом φ, получаем базис алгебры $A_{(3)}$:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \varphi(\tilde{A}_1), \quad A_2 = \varphi(\tilde{A}_2), \quad A_3 = \varphi(\tilde{A}_3),\\
&D = \varphi(\tilde{D}), \quad S = \varphi(\tilde{S}), \quad P_1 = \varphi(\tilde{P}_1),\\
&P_2 = \varphi(\tilde{P}_2), \quad K_{13} = \varphi(\tilde{K}_{13}), \quad A_2^1 = \varphi(\tilde{A}_2^1),\\
&T_i = \varphi(\tilde{T}_i) \quad (i = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть $\tilde{G}_1$ — группа $IGL(3,R)$-автоморфизмов алгебры $AIGL(3,R)$. Тогда группа $G_1 = \varphi\tilde{G}_1\varphi^{-1}$ является группой автоморфизмов алгебры $A_{(3)}$. В силу результатов работы [3] группа $O(3,3)$-автоморфизмов, оставляющая инвариантным вполне изотропное подпространство $V_{(3)}$, индуцирует на $A_{(3)}$ группу $IGL(3,R)$-автоморфизмов, совпадающую с G_1. Таким образом, задача классификации подалгебр алгебры $A_{(3)}$ с точностью до сопряженности относительно группы G_1 эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры $AIGL(3,R)$ с точностью до $IGL(3,R)$-сопряженности. Поэтому мы можем выделить следующие два этапа при класскфикации подалгебр алгебры $A_{(3)}$. На первом этапе находятся все подалгебры алгебры $AIGL(3,R)$ с точностью до $IGL(3,R)$-сопряженности. Полученое множество подалгебр обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}$. Изоморфизм $\varphi : AIGL(3,R) \to A_{(3)}$, рассмотренный выше, позволяет получить все подалгебры алгебры $A_{(3)}$ с точностью до сопряженности относительно группы G_1. Это множество $\mathfrak{A}$ подалгебр определяется следующим образом: $\mathfrak{A} = \{\varphi(\tilde{L}) \mid \tilde{L} \in \tilde{\mathfrak{A}}\}$. Две подалгебры $L_1, L_2 \in \mathfrak{A}$ могут быть сопряжены с помощью некоторого $O(3,3)$-автоморфизма, не входящего в G_1. Следовательно, на втором этапе выделяется задача классификации подалгебр из множества $\mathfrak{A}$ с точностью до $O(3,3)$-сопряженности. Для решения указанной задачи рассмотрим следующие вполне изотропные подпространства V:

$S_1 = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_6\rangle$, $S_2 = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 - Q_6\rangle$,
$S_3 = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 - Q_6\rangle$, $S_4 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 - Q_6\rangle$,
$S_5 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 - Q_6\rangle$, $S_6 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 + Q_5, Q_3 + Q_6\rangle$,
$S_7 = \langle Q_1 + Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 + Q_6\rangle$, $S_8 = \langle Q_1 - Q_4, Q_2 - Q_5, Q_3 + Q_6\rangle$.

Обозначим через C_i следующие матрицы: $C_1 = \mathrm{diag}\,[1,1,1,1,1,-1]$, $C_2 = \mathrm{diag}\,[1,1,1,1,-1,1]$, $C_3 = \mathrm{diag}\,[1,1,1,-1,1,1]$, Пусть φ_i — $O(3,3)$-автоморфизм алгебры $AO(3,3)$, определяемый матрицей C_i $(i = 1,2,3)$. Группу $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, порожденную автоморфизмами φ_i, обозначим через G_2. Порядок группы G_2 равен 8.

Теорема 3.1. *Если подалгебры $L_1, L_2 \subset A_{(3)}$ сопряжены относительно группы $O(3,3)$-автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы $\{G_1, G_2\}$.*

Доказательство. Отметим, что с точностью до $IGL(3,R)$-сопряженности существуют только следующие вполне изотропные подпространства ранга 3: S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть f — $O(3,3)$-автоморфизм, отображающий алгебру $L_1 \subset A_{(3)}$ на алгебру $L_2 \subset A_{(3)}$. Если S_1 — единственное вполне изотропное подпространство ранга 3, инвариантное относительно L_1, то этим же свойством обладает и подалгебра L_2, а потому $f(S_1) = S_1$. Следовательно, $f \in G_1$. Предположим далее, что существует L_1-ивариантное вполне изотропное подпространство W_1 ранга 3, отличное от S_1. Не нарушая общности можно считать, что $f(W_1) = S_1$, $f(S_1) = W_2$, где W_2 — L_2-ивариантное вполне изотропное подпространство. Пусть θ_1 и θ_2 — $IGL(3,R)$-автоморфизм алгебры $A_{(3)}$, отображающие W_1 и W_2 соответственно на S_i и S_j $(i, j \in \{2,3,4\})$. Обозначим через L_1' и L_2' подалгебры $A_{(3)}$, удовлетворяющие условиям $\theta_1(L_1) = L_1'$, $\theta_2'(L_2) = L_2'$. Автоморфизм $f' = \theta_2 f \theta_1^{-1}$, отображает L_1' на L_2', а пару подпространств $(S_1; S_i)$ на пару подпространств $(S_j; S_1)$. Так как $f'(S_1 \cap S_i) = S_1 \cap S_j$, то отсюда вытекает, что $S_i = S_j$. Следовательно, $f' = \psi\theta$, где $\psi \in G_2$, $\theta \in G_1$. Но тогда $\theta_2 f \theta_1^{-1} = \psi\theta$, откуда $f = \theta_2^{-1}\psi\theta\theta_1$, а значит, $f \in \{G_1, G_2\}$. Теорема доказана.

В работе [3] все подалгебры алгебры $AIGL(3,R)$ были разбиты на четыре класса $\tilde{\mathfrak{M}}_0$, $\tilde{\mathfrak{M}}_1$, $\tilde{\mathfrak{M}}_2$, $\tilde{\mathfrak{M}}_3$. В соответствии с этим все подалгебры алгебры $AO(3,3)$ разбиваются на четыре класса $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, где $\mathfrak{N}_i = \{\varphi(\tilde{L}) \,|\, \tilde{L} \in \tilde{\mathfrak{M}}_i, \}$ $(i = 0,1,2,3)$.

Рассмотрим, например, задачу классификации подалгебр класса $\mathfrak{N}_3$, с точностью до $O(3,3)$-сопряженности. Класс $\mathfrak{M}_3$, определяется как множество всех алгебр $\tilde{L} \subset AIGL(3,R)$, являющихся расширениями подалгебр $\tilde{F}$ класса $\mathfrak{M}_3$, алгебры $AGL(3,R)$. По определению подалгебра $\tilde{F}$ класса оставляет инвариантным ряд

K_0: $0 \subset \langle\tilde{T}\rangle \subset \langle\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\rangle \subset \langle\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3\rangle$.

В классе $\mathfrak{M}_3$, существует максимальная подалгебра $\tilde{M}_3$, содержащая любую подалгебру из $\mathfrak{M}_3$. Она обладает базисом $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_3$, $\tilde{D}$, $\tilde{S}$, $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$. Следовательно, элементы $A_1 = \varphi(\tilde{A}_1)$, $A_3 = \varphi(A_3)$, $D = \varphi(\tilde{D})$, $S = \varphi(\tilde{S})$, $P_1 = \varphi(\tilde{P}_1)$, $P_2 = \varphi(\tilde{P}_2)$, образуют базис алгебры $M_3 = \varphi(\tilde{M}_3)$. В силу теоремы 3.1 классификацию подалгебр класса $\mathfrak{N}_3$ достаточно провести с точностью до сопряженности относительно группы $\{G_1, G_2\}$, где $G_1 = \varphi\tilde{G}_1\varphi^{-1}$, $G_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Группа G_1 в силу работы [4] порождается группами G и S_3, где $G = \varphi\tilde{G}\varphi^{-1}$, $S_3 = \varphi\tilde{S}_3\varphi^{-1}$, G — группа автоморфизмов ряда K_0, а $\tilde{S}_3$ — симметрическая группа степени 3. Каждый элемент $\tilde{\theta} \in \tilde{S}_3$ мы рассматриваем как эндоморфизм пространства $\tilde{V} = \langle\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3\rangle$, действующий по формуле $\tilde{\theta}(\tilde{T}_1) = T_{i_1}$, $\tilde{\theta}(\tilde{T}_2) = T_{i_2}$, $\tilde{\theta}(\tilde{T}_3) = T_{i_3}$, где i_1, i_2, i_3 некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Группа $\tilde{S}_3$ порождается подстановками

$$\tilde{\theta}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 & \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_3 & \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & \tilde{T}_2 & \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_1 & \tilde{T}_3 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\{G_1, G_2\} = \{G_2, S_3, G\}$, где $S_3 = \{\theta_1, \theta_2\}$, $\theta_1 = \varphi\tilde{\theta}_1\varphi^{-1}$, $\theta_2 = \varphi\tilde{\theta}_2\varphi^{-1}$.

Введем в рассмотрение следующие автоморфизмы: $\hat{\varphi}_1 = \theta_1\varphi_1$, $\hat{\varphi}_2 = \theta_1\theta_2\varphi_2$, $\hat{\varphi}_3 = \varphi_3$, $\hat{\varphi}_4 = \varphi_{C_1}\theta_2\theta_1\varphi_1\varphi_2$, $\hat{\varphi}_5 = \varphi_{C_2}\theta_1\varphi_1\varphi_3$, $\hat{\varphi}_6 = \varphi_{C_1}\theta_1\theta_2\varphi_2\varphi_3$, $\hat{\varphi}_7 = \theta_2\theta_1\varphi_1\varphi_2\varphi_3$, где $\varphi_{C_1} = \varphi\tilde{\varphi}_{C_1}\varphi^{-1}$, $\varphi_{C_2} = \varphi\tilde{\varphi}_{C_2}\varphi^{-1}$, $C_1 = \mathrm{diag}\,[-1,1,-1]$, $C_2 = \mathrm{diag}\,[1,-1,-1]$, Действия этих автоморфизмов на генераторы A_1, A_3, D, S, P_1, P_2, T_1, T_3 выписаны в таблице 3 и 4.

Таблица 3

	A_1	A_3	D
$\hat\varphi_1$	$-\frac{1}{2}(A_1-3D-2S)$	P_2	$-\frac{1}{2}(A_1-D+2S)$
$\hat\varphi_2$	$-D+2S$	$*$	D
$\hat\varphi_3$	$D-2S$	T_3	D
$\hat\varphi_4$	$-\frac{1}{2}(A_1-D-2S)$	$*$	$-\frac{1}{2}(A_1-D+2S)$
$\hat\varphi_5$	$-\frac{1}{2}(A_1-D-2S)$	T_1	$-\frac{1}{2}(A_1-D+2S)$
$\hat\varphi_6$	A_1	A_3	D
$\hat\varphi_7$	$-\frac{1}{2}(A_1+3D-2S)$	$-P_2$	$-\frac{1}{2}(A_1-D+2S)$
θ_2	$-\frac{1}{2}(A_1-3D+2S)$	P_1	$-\frac{1}{2}(A_1+D-2S)$
$\theta_1\theta_2$	$-A_1$	$*$	D

Таблица 4

	S	P_1	P_2	T_1	T_2	T_3
$\hat\varphi_1$	$-\frac{1}{2}(A_1-D)$	$*$	$*$	$-P_1$	A_3	T_1
$\hat\varphi_2$	$-\frac{1}{2}(A_1-D)$	P_2	T_2	P_1	T_1	$-A_3$
$\hat\varphi_3$	$-\frac{1}{2}(A_1-D)$	$-T_2$	P_2	T_1	$-P_1$	A_3
$\hat\varphi_4$	$-S+D$	$*$	A_3	$*$	P_1	P_2
$\hat\varphi_5$	$-S+D$	A_3	$*$	P_1	$*$	P_2
$\hat\varphi_6$	$-S+D$	T_1	T_2	$*$	$*$	$*$
$\hat\varphi_7$	$-S$	$-P_1$	$-A_3$	$*$	$*$	$*$
θ_2	S	A_3	$*$	T_1	T_3	T_2
$\theta_1\theta_2$	S	P_2	P_1	T_2	T_1	T_3

В табл. 3 и 4 символом $*$ мы обозначаем элементы алгебры $AO(3,3)$, не содержащиеся в M_3, и потому не представляющие для нас интереса.

Пусть $\tilde L \subset AGL(3,R)$ — произвольная подалгебра, $\tilde L_0$ — ее вполне приводимая часть. Тогда $\varphi(\tilde L) \subset M_3$ и $\varphi(\tilde L_0)$ будем называть вполне приводимой частью алгебры $\varphi(\tilde L)$. Нетрудно убедиться, что группа G действует тождественно на вполне приводимой части $\varphi(\tilde L_0)$, а каждый элемент группы $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_7,\theta_1,\theta_2\}$ отображает вполне приводимую часть $\varphi(\tilde L_0)$ алгебры $\varphi(\tilde L)$ на вполне приводимую часть $\varphi(\tilde L_0')$ алгебры $\tilde L'$. Поэтому разобъем подалгебры из $\mathfrak{N}_3$ на классы в зависимости от структуры вполне приводимой части.

1. Класс $\mathfrak{N}_3^1$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

1) $\phi_1(\alpha) = \langle A_1+\alpha S, D\rangle$ $(\alpha \neq 0; 2)$;
2) $\phi_2(\beta) = \langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S\rangle$ $(\beta \neq 0; -1; -2)$;
3) $\phi_3(\gamma) = \langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S\rangle$ $(\gamma \neq 0; 1; 2)$.

Каждый из автоморфизмов $\hat\varphi_i$ $(i=1,\ldots,7)$, θ_1, θ_2 осуществляет подстановку на множестве подалгебр $\{\phi(\alpha), \phi_2(\beta), \phi_3(\gamma)\}$. Действие каждого из указанных автоморфизмов приведены в табл. 5.

Таблица 5

	$\phi_1(\alpha)$	$\phi_2(\beta)$	$\phi_3(\gamma)$
$\hat{\varphi}_1$	$\phi_2\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$	$\phi_1\left(-\frac{2}{\beta+1}\right)$	$\phi_3\left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$\phi_1\left(-\frac{4}{\alpha}\right)$	$\phi_2(-\beta)$	$\phi_3\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$\phi_1\left(\frac{4}{\alpha}\right)$	$\phi_2\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$\phi_3(\gamma)$
$\hat{\varphi}_4$	$\phi_3\left(\frac{2+\alpha}{\alpha}\right)$	$\phi_2\left(-\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)$	$\phi_1(2\gamma-2)$
$\hat{\varphi}_5$	$\phi_3\left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)$	$\phi_1(-2\beta-2)$	$\phi_2\left(\frac{2-\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_6$	$\phi_1(-\alpha)$	$\phi_3\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$\phi_2\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$\phi_3\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$	$\phi_2(-\beta-2)$	$\phi_1(2\gamma-2)$
$\theta_1\theta_2$	$\phi_1(-\alpha)$	$\phi_3(-\beta)$	$\phi_2(-\gamma)$
θ_2	$\phi_2\left(\frac{\alpha-2}{2}\right)$	$\phi_1(2\beta+2)$	$\phi_3(2-\gamma)$

II. Класс $\mathfrak{N}_3^2$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

1) $F_1(t) = \langle A_1 + tD, S\rangle$ $(t \neq \pm 1)$;
2) $F_2(\alpha) = \langle A_1 + \alpha S, D - S\rangle$ $(\alpha \neq 0; -1)$;
3) $F_3(\beta) = \langle A_1 + \beta S, D + \beta S\rangle$ $(\beta \neq 0; -1)$;
4) $F_4(\gamma) = \langle A_1 + \gamma S, D - \gamma S\rangle$ $(\gamma \neq 0; 1)$.

Каждый из автоморфизмов $\hat{\varphi}_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$ осуществляет подстановку на множестве всех подалгебр $\{F_1(t), F_2(\alpha), F_3(\beta), F_4(\gamma)\}$. Действие каждого из указанных автоморфизмов приведены в табл. 6.

Таблица 6

	$F_1(t)$	$F_2(\alpha)$	$F_3(\beta)$	$F_4(\gamma)$
$\hat{\varphi}_1$	$F_3\left(\frac{t-1}{2}\right)$	$F_1\left(\frac{3-\alpha}{\alpha+1}\right)$	$F_2\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$	$F_4\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$F_3\left(\frac{2}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{2}{1-\alpha}\right)$	$F_2\left(-\frac{2+\beta}{\beta}\right)$	$F_1\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$F_3\left(-\frac{2}{t+1}\right)$	$F_4\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)$	$F_1\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$	$F_2\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_4$	$F_2\left(\frac{t-3}{t+1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$	$F_1(-1-2\beta)$	$F_3\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)$
$\hat{\varphi}_5$	$F_2\left(\frac{t+3}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)$	$F_3\left(-\frac{\beta+1}{\beta}\right)$	$F_1(2\gamma-1)$
$\hat{\varphi}_6$	$F_2(t)$	$F_1(\alpha)$	$F_3\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$	$F_4\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$F_1\left(\frac{3-t}{t+1}\right)$	$F_3\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)$	$F_2(2\beta+1)$	$F_4(1-\gamma)$
$\theta_1\theta_2$	$F_1(-t)$	$F_2(-\alpha)$	$F_4(-\beta)$	$F_3(-\gamma)$
θ_2	$F_1\left(-\frac{t+3}{t-1}\right)$	$F_4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$	$F_3(-\beta-1)$	$F_2(2\gamma-1)$

III. Класс $\mathfrak{N}_3^3$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

1) $L_1(x) = \langle A_1 + xD - (x+1)S\rangle$ $(x \neq \pm 1)$;
2) $L_2(y) = \langle A_1 + yD + (1-y)S\rangle$ $(y \neq \pm 1)$;
3) $L_3(t) = \langle A_1 + tD\rangle$ $(t \neq \pm 1)$;

4) $L_4(\alpha) = \langle A_1 + D + \alpha S\rangle$ ($\alpha \neq 0; -2$);
5) $L_5(\gamma) = \langle A_1 - D + \gamma S\rangle$ ($\gamma \neq 0; 2$);
6) $L_6(\beta) = \langle D + \beta S\rangle$ ($\beta \neq 0; 1$);

Действия каждого из автоморфизмов $\hat{\varphi}_i$ ($i = 1, \ldots, 7$), θ_1, θ_2 приведены в табл. 7.

Таблица 7

	$L_1(x)$	$L_2(y)$	$L_3(t)$	$L_4(\alpha)$	$L_5(\gamma)$	$L_6(\beta)$
$\hat{\varphi}_1$	$L_6\left(\frac{x-1}{2}\right)$	$L_4(y-1)$	$L_2\left(\frac{3-t}{1+t}\right)$	$L_3\left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)$	$L_1\left(\frac{4-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_5\left(\frac{2}{\beta+1}\right)$
$\hat{\varphi}_2$	$L_2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$	$L_4\left(\frac{4}{y-1}\right)$	$L_6\left(\frac{2}{t-1}\right)$	$L_5\left(-\frac{4}{\alpha}\right)$	$L_1\left(\frac{4-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_3\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$
$\hat{\varphi}_3$	$L_4\left(-\frac{4}{x+1}\right)$	$L_2\left(\frac{y+3}{y-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{2}{t+1}\right)$	$L_1\left(-\frac{\alpha+4}{\alpha}\right)$	$L_5\left(\frac{4}{\gamma}\right)$	$L_3\left(\frac{2+\beta}{-\beta}\right)$
$\hat{\varphi}_4$	$L_4\left(-\frac{4}{x+1}\right)$	$L_3\left(\frac{y-3}{y+1}\right)$	$L_5\left(\frac{2t-2}{t+1}\right)$	$L_1(-\alpha-1)$	$L_6\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right)$	$L_2(-1-2\beta)$
$\hat{\varphi}_5$	$L_3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$	$L_4\left(\frac{4}{y-1}\right)$	$L_5\left(\frac{2+2t}{t-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{2+\alpha}{\alpha}\right)$	$L_1(\gamma-1)$	$L_2(-1-2\beta)$
$\hat{\varphi}_6$	$L_5(x+1)$	$L_4(y-1)$	$L_3(t)$	$L_2(\alpha+1)$	$L_1(\gamma-1)$	$L_6\left(-\frac{\beta}{\beta+1}\right)$
$\hat{\varphi}_7$	$L_1\left(\frac{3-x}{1+x}\right)$	$L_3\left(\frac{3-y}{1+y}\right)$	$L_2\left(\frac{3-t}{1+t}\right)$	$L_4(\alpha)$	$L_6\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)$	$L_5(2+2\beta)$
$\theta_1\theta_2$	$L_2(-x)$	$L_1(-y)$	$L_3(-t)$	$L_5(-\alpha)$	$L_4(-\gamma)$	$L_6(\beta)$
θ_2	$L_3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$	$L_2\left(\frac{y+3}{y-1}\right)$	$L_1\left(\frac{t+3}{t-1}\right)$	$L_6\left(-\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)$	$L_5(\gamma)$	$L_4(-2\beta-2)$

IV Класс $\mathfrak{N}_3^4$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

1) $\phi_1 = \langle D\rangle$; 2) $\phi_2 = \langle D - S\rangle$; 3) $\phi_3 = \langle S\rangle$; 4) $\phi_4 = \langle A_1 + D\rangle$;
5) $\phi_5 = \langle A_1 + D - 2S\rangle$; 6) $\phi_6 = \langle A_1 - D\rangle$; 7) $\phi_7 = \langle A_1 - D + 2S\rangle$.

Действия автоморфизмов $\hat{\varphi}_i$ ($i = 1, \ldots, 7$) на множестве подалгебр $\{\phi_1, \ldots, \phi_7\}$ приведены в табл. 8.

Таблица 8

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7
$\hat{\varphi}_1$	ϕ_7	ϕ_3	ϕ_6	ϕ_4	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_5
$\hat{\varphi}_2$	ϕ_1	ϕ_4	ϕ_6	ϕ_3	ϕ_7	ϕ_2	ϕ_5
$\hat{\varphi}_3$	ϕ_1	ϕ_4	ϕ_6	ϕ_2	ϕ_5	ϕ_3	ϕ_7
$\hat{\varphi}_4$	ϕ_7	ϕ_4	ϕ_2	ϕ_6	ϕ_5	ϕ_3	ϕ_1
$\hat{\varphi}_5$	ϕ_7	ϕ_4	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_6	ϕ_5
$\hat{\varphi}_6$	ϕ_1	ϕ_3	ϕ_2	ϕ_4	ϕ_7	ϕ_6	ϕ_5
$\hat{\varphi}_7$	ϕ_7	ϕ_6	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_2	ϕ_1

V. Класс $\mathfrak{N}_3^5$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых нулевая или совпадает с $\langle A_1, D, S\rangle$.

VI. Класс $\mathfrak{N}_3^6$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых совпадает с $\langle A_1 + \alpha D + \beta S\rangle$ ($\alpha \neq \pm 1$, $\alpha + \beta \neq \pm 1$).

VII. Класс $\mathfrak{N}_3^7$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из следующих типов:

1) $\langle D, S\rangle$; 2) $\langle A_1, D\rangle$; 3) $\langle A_1 \pm S, D - S\rangle$;
4) $\langle A_1 \pm D, S\rangle$; 5) $\langle A_1 \pm 2S, D\rangle$; 6) $\langle A_1, D - 2S\rangle$.

VIII. Класс $\mathfrak{N}_3^8$ состоит из подалгебр, вполне приводимая часть которых совпадает с $\langle A_1+\alpha S, D+\beta S\rangle$ ($\alpha \neq \pm\beta,\ \pm(\beta+2)$; $\beta \neq 0,-1$).

Допустим, что мы проводим классификацию подалгебр класса $\mathfrak{N}_3^1$ с точностью до $O(3,3)$-сопряженности. С этой целью из класса подалгебр $\mathfrak{N}_3$ выбираем множество $\mathfrak{L}$ тех подалгебр, вполне приводимая часть которых принадлежит к одному из типов $\phi_1(\alpha)$, $\phi_2(\beta)$, $\phi_3(\gamma)$. Пусть L_1 и L_2 — подалгебры из множества $\mathfrak{L}$, которые $O(3,3)$-сопряжены между собой, т.е $f(L_1)=L_2$ для некоторого автоморфизма $f \in \{G,H\}$, где $H=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_7,\theta_1,\theta_2\}$. Подпространство $f^{-1}(S_1)$ вполне изотропно и инвариантно относительно подалгебры L. Нетрудно убедиться, что существует $IGL(3,R)$-автоморфизм ψ, отображающий $f^{-1}(S_1)$ на некоторое подпространство S_i ($i\in\{1,\ldots,7\}$), причем $\psi(L_1)=L_1$ Автоморфизм $f\psi$ отображает L_1 на L_2, а S_i на S_1. Таким образом, можно предполагать, что $f(L_1)=L_2$ и $f(S_i)=S_1$. Но тогда $f=f_1\varphi_i$ для некоторого $IGL(3,R)$-автоморфизма f_1. Так как автоморфизм f_1 отображает $A_{(3)}$ на $A_{(3)}$, то автоморфизм φ_i отображает L_1 на подалгебру $\varphi_i(L_1)$, содержащуюся в $A_{(3)}$. Поэтому автоморфизм f_1 отображает $\varphi_i(L_1)\subset A_{(3)}$ на подалгебру $L_2\subset A_{(3)}$. Но тогда в силу работы [4] автоморфизм f_1 можно представить в виде $f_1=f_2\theta$, где $\theta\in S_3$, а f_2 — $IGL(3,R)$-автоморфизм, оставляющий инвариантным композиционный ряд

$$0\subset\langle T_1\rangle\subset\langle T_1,T_2\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle. \tag{3.3}$$

Отсюда вытекает следующий алгоритм исследования подалгебр множества $\mathfrak{L}$ на сопряженность относительно группы $\{G,H\}$.

1) Берем произвольную подалгебру $L\in\mathfrak{L}$ и находим те автоморфизмы φ множества $\{\hat\varphi_1,\ldots,\hat\varphi_7\}$, для каждого из которых $\varphi(L)\subset A_{(3)}$.

2) Для каждого из найденных автоморфизмов φ находим такой автоморфизм θ группы S_3, что $\theta\varphi(L)\subset M_3$.

3) Находим такой $IGL(3,R)$-автоморфизм f_2, оставляющий инвариантным ряд (3.3), что $L'=f_2\theta\varphi(L)\subset\mathfrak{L}$. Если $L'\neq L$, то подалгебру L' вычеркиваем из множества $\mathfrak{L}$.

4) В множестве $\mathfrak{L}_1$, которое мы получили из множества $\mathfrak{L}$ после вычеркивания в нем всех подалгебр, которые $O(3,3)$-сопряжены подалгебре L, выбираем произвольную подалгебру, не совпадающую с L, и повторяем для нее вычисления, предусмотренные предыдущими пунктами. Через конечное число шагов в множестве $\mathfrak{L}$ останутся лишь те подалгебры, которые не сопряжены между собой относительно группы $\{G,H\}$.

Полная классификация подалгебр изотропного ранга 3 алгебры $AO(3,3)$ с точностью до $O(3,3)$-сопряженности изложена ниже. Если речь идет о подалгебрах $U_1 \subset\!\!\!\!+ F,\ldots,U_s \subset\!\!\!\!+ F$, то будем употреблять обозначение F: $U_1,\ldots,U_s$. Подпространство $\langle T_{i_1},\ldots,T_{i_k}\rangle$ будем обозначать $(i_1,\ldots,i_k)$. Положим

$A_1'=\frac{1}{2}A_1-\frac{3}{2}D+S$, $A_2'=\varphi(\tilde{A}_2')$, $A_3'=P_2$, $P_1'=P_1$, $P_2'=-A_3$,
$D'=-\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}D-S$.

1) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^1$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A_1+\alpha S, D\rangle$ $(0<\alpha<2)$;
$\langle A_1+\alpha S, D, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(0<\alpha<2)$;
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(-2<\beta<0;\ \beta\neq-1)$;
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3, P_1, T_1\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 2)$;

$\langle A_1+\alpha S, D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(0<|\alpha|<2)$;
$\langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma>1,\ \gamma\neq 2)$;
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 2)$;
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3\rangle$ $(0<\alpha<2)$: (3), (1,3);
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3\rangle$ $(\alpha\neq 0,\pm 2)$: (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, A_3\rangle$ $(-2<\beta<0,\ \beta\neq -1)$: 0, (3);
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, A_3, T_1\rangle$ $(\beta>-1,\ \beta\neq 0)$;
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, A_3\rangle$ $(\beta\neq 0,1,-2)$: (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S, A_3, T_3\rangle$ $(0<\gamma<2,\ \gamma\neq 1)$;
$\langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S, A_3, T_1, T_2\rangle$ $(\gamma>1,\ \gamma\neq 2)$;
$\langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S, A_3\rangle$ $(\gamma\neq 0,1,2)$: (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq 2)$;
$\langle A_1+\alpha S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(0<|\alpha|<2)$;
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\beta\neq 0,-1,-2)$;
$\langle A_1+\beta S, D-(\beta+2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(-2<\beta<0,\ \beta\neq -1)$;
$\langle A_1+\gamma S, D+(\gamma-2)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma\neq 0,1,2)$;

2) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^2$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A_1+\alpha D, S\rangle$ $(0\leq\alpha<1)$: 0, (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha D, S, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D, S, A_3, P_1\rangle$ $(-1<\alpha\leq 3,\ \alpha\neq 1)$: (1), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha D, S, A_3\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D, S, A_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1)$: (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha D, S, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-3D, S, A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-3D, S, A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+\gamma S, D-\gamma S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma\neq 0,\ \gamma<1)$;
$\langle A_1+\alpha S, D-S, A_3, T_1,\rangle$ $(-1<\alpha\leq 3,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha S, D-S, A_3, T_1, T_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1)$;
$\langle A_1+\beta S, D+\beta S, A_3, T_1,\rangle$ $(0<|\beta|\leq 1,\ \beta\neq -1)$;
$\langle A_1+\beta S, D+\beta S, A_3, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\beta\neq 0,-1)$;
$\langle A_1+\gamma S, D-\gamma S, A_3, T_1, T_2\rangle$ $(0<|\gamma|<1)$;
$\langle A_1+\gamma S, D-\gamma S, A_3, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma\neq 0,1)$;
$\langle A_1+\alpha S, D-S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1)$;
$\langle A_1+\beta S, D+\beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$;
$\langle A_1+\gamma S, D-\gamma S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(0<|\gamma|\leq 2,\ \gamma\neq 1)$;
$\langle A_1-S, D+S, A_3, P_1+T_3, T_1, T_2\rangle$.

3) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^3$ алгебры $AO(3,3)$:
$\langle D+\beta S\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$: 0, (3);
$\langle D+\beta S\rangle$ $(\beta\neq 0,-1)$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S, P_1\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$: (1), (2);
$\langle D+\beta S\rangle$ $(\beta\neq 0,-1)$: (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S, A_3\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$: (0), (3);
$\langle D+\beta S, A_3\rangle$ $(\beta\neq 0,-1)$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$;
$\langle D+\beta S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\beta\neq 0,-1)$;
$\langle D+\beta S, A_3, P_1, T_1\rangle$ $(-2\leq\beta<0,\ \beta\neq -1)$;

$\langle D+\beta S, A_3, P_1\rangle$ $(\beta=0,-1)$: (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(-2\le\beta<0,\ \beta\ne-1)$;
$\langle D+\beta S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\beta\ne0,-1)$;
$\langle D+\beta S+A_3\rangle$ $(-2\le\beta<0,\ \beta\ne-1)$: 0, (3);
$\langle D+\beta S+A_3\rangle$ $(\beta=0,-1)$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S+A_3, P_1, T_1\rangle$ $(-2\le\beta<0,\ \beta\ne-1)$;
$\langle D+\beta S+A_3, P_1\rangle$ $(\beta\ne0,-1)$: (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\beta S+A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(-2\le\beta<0,\ \beta\ne-1)$;
$\langle D+\beta S+A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\beta\ne0,-1)$;
$\langle D+S, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (2), (1,2);
$\langle D+S, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D+S, A_3, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D+S, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D+S+A_3, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D+S+A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+\gamma S, P_2\rangle$ $(|\gamma|\le2,\ \gamma\ne0,-2)$: (1), (1,2), (2,3);
$\langle A_1+D+\gamma S, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma\ne0,-2)$;
$\langle A_1+D+\gamma S, P_1, P_2\rangle$ $(|\gamma|\le2,\ \gamma\ne0,-2)$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+\gamma S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\gamma\ne0,-2)$;
$\langle A_1+D+\gamma S, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\gamma\ne0,-2)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+D+\gamma S, P_1, P_2\rangle$ $(|\gamma|\le2,\ \gamma\ne0,-2)$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+\gamma S+P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(|\gamma|\ne0,-2)$;
$\langle A_1+D+2S, P_2+T_1\rangle$: (0), (2), (2,3);
$\langle A_1+D+2S, P_2+T_3\rangle$: 0, (1), (2), (1,2);
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_1\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+D-4S, A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_3, A_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+2S, P_1, A_3, P_2+T_1\rangle$;
$\langle A_1+D+2S+P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+2S+P_1, P_2+T_1\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1-D+\lambda S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(|\lambda|\le2,\ \lambda\ne0,2)$;
$\langle A_1-D+\lambda S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(|\lambda|\le2,\ \lambda\ne0,2)$;
$\langle A_1-D+\lambda S+P_2, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(|\lambda|\le2,\ \lambda\ne0,2)$;
$\langle A_1-D-2S, A_3, P_1+T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_2, P_1+T_3\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+\gamma T_2, P_1+T_2+T_3, T_1\rangle$ $(0<|\gamma|\le1)$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+\gamma T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$ $(0<|\gamma|\le1)$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_2+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+\gamma T_2+T_3, P_1-T_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1+\alpha D+(1-\alpha)S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(-1<\alpha\le3,\ \alpha\ne1)$;
$\langle A_1+3D-2S+T_1, P_1+T_2, A_3+T_3\rangle$;

$\langle A_1+3D-2S, P_1+T_2, A_3+T_3\rangle$;
$\langle A_1+3D-2S, P_1+T_2, A_3+\gamma T_3, T_1\rangle$ $(0<|\gamma|\le 1)$;
$\langle A_1+3D-2S, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1+\alpha D+(1-\alpha)S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(-1<\alpha\le 3,\ \alpha\ne 1)$;
$\langle A_1+3D-2S, A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1+3D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1+S, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2).

4) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^4$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle S\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3\rangle$: 0, (1), (1,2), (3), (1,3), (1,2,3);
$\langle S, A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle S+A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle S+A_3, A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_1, P_2\rangle$: (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_1, A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_2, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D-S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle D-S+T_2, A_3+T_2, P_1, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D-S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle D-S+T_2, A_3, P_1, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D-S, A_3+T_2, P_1, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D-S+A_3+T_2, P_1, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D-S+A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1+D, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D-S+T_2, P_1, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D, P_1\rangle$: (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$;
$\langle D+T_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D, P_1+T_2\rangle$: 0, (1), (1,3);
$\langle D, A_3\rangle$: (3), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+T_3, A_3+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D+T_3, A_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D, A_3+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle D+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D, P_1+T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle D, P_1+T_2, P_2+T_1\rangle$;
$\langle D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;

$\langle D, A_3 + T_3, P_1 + T_2\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1\rangle$ $(0 < |\gamma| \le 1)$;
$\langle D, A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1\rangle$ $(0 < |\gamma| \le 1)$;
$\langle D + T_3, A_3, P_1 + T_2, T_1\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3, P_1, T_1\rangle$;
$\langle D, A_3, P_1 + T_2, T_1, T_3\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D + A_3 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D + A_3 + T_3, P_1 + T_2\rangle$;
$\langle D + A_3 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1\rangle$ $(0 < |\gamma| \le 1)$;
$\langle D + A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle D + A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle D + A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S, P_2\rangle$: (1), (1,2), (2,3), (1,2,3);
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_1 + T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, P_1, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S, P_1 + T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S + T_2, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1 + D - 2S + P_1 + T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - D + 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$.

5) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^5$ алгебры $AO(3,3)$:
(1), (1,2), (1,2,3); $\langle A_3\rangle$: (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_3 + T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle A_3 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_3 + P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle A_3 + P_2 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3); $\langle P_1 + T_2, P_2 + T_3, T_1\rangle$;
$\langle P_1 + T_2, P_2, T_1\rangle$; $\langle P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle P_1 + T_2, P_2 + T_1\rangle$; $\langle A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_3 + T_3, P_1 + T_3, T_1, T_2\rangle$; $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2\rangle$; $\langle A_3 + T_2, P_1 \pm T_3\rangle$: 0, (1);
$\langle A_3 + T_2, P_1 + T_2 + \gamma T_3, T_1\rangle$ $(\gamma \ne 0)$;

$\langle A_3+\beta T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$ $(0<|\beta|\leq 1)$;
$\langle A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$; $\langle A_3+T_3, P_1, T_1\rangle$;
$\langle A_3+P_2, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$; $\langle A_3+P_2, P_1+T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_3+P_2+T_3, P_1+\gamma T_2, T_1\rangle$ $(0\langle|\gamma|\leq 1)$;
$\langle A_3+P_2+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_3+T_2+T_3, P_1-T_2, P_2+T_3, T_1\rangle$;
$\langle A_3+T_2+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_3+T_3, P_1-T_2, P_2+T_3, T_1\rangle$;
$\langle A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_3+T_3, P_1, P_2+T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1, D, S\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, A_3\rangle$: (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1, D, S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$.

6) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^6$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A_1+\alpha D+\beta S\rangle$ $(0<\alpha<1,\ \beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\pm 1\ \vee\ \alpha=0,\ \beta>0,\ \beta\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D+\beta S, A_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1,\ \beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\pm 1)$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle A_1+\alpha D-(3+\alpha)S, A_3+T_2\rangle$ $(\alpha>-1,\ \alpha\neq 1)$: 0, (1);
$\langle A_1+\alpha D-(3+\alpha)S, A_3+T_2\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1,-3)$: (3), (1,3);
$\langle A_1+\alpha D-2S, A_3+T_3\rangle$ $(\alpha>1,\ \alpha\neq 3)$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, A_3+T_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1, 3)$: (1), (1,2);
$\langle A_1+\alpha D+\beta S, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha\neq 1,\ \beta\neq 0,\ \alpha+\beta\pm 1\ \vee\ \alpha=0,\ \beta>0,\ \beta\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D+\beta S, A_3, P_1\rangle$ $(\alpha=3,\ \beta>-2,\ \beta\neq 0\ \vee\ -1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1,\ \beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\pm 1)$: (1), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha D-2S, P_1+T_2, A_3+T_3\rangle$ $(-1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, P_1+T_2, A_3+\gamma T_3, T_1\rangle$ $(-1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1,\ 1<|\gamma|\leq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, P_1+T_2, A_3, T_1, T_3\rangle$ $(-1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D+(\alpha-1)S, P_1+T_3, A_3, T_1, T_2\rangle$ $(-1<\alpha\leq 3,\ \alpha\neq 0,1)$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, P_1, A_3+T_3, T_1, T_2\rangle$ $(-1<\alpha<3,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle A_1+\alpha D+\beta S, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1,\ \beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq\pm 1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-5D+2S, A_3+T_2, P_1, P_2+T_1\rangle$;
$\langle A_1-2D-S, A_3+T_2, P_1, P_2+T_3, T_1\rangle$;
$\langle A_1+\alpha D-(3+\alpha)S, A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1,-3)$: 0, (1);
$\langle A_1-3D-2S, A_3+T_3, P_1-T_2, P_2+T_3, T_1\rangle$;
$\langle A_1-3D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2+T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1, 3)$;
$\langle A_1+\alpha D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1, 3)$;
$\langle A_1+\alpha D+(\alpha+1)S, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$ $(\alpha\neq\pm 1, 0)$: (1), (1,2);
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3, P_1+T_2\rangle$;
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+\gamma T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$ $(0<|\gamma|\leq 1)$;
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$.

7) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^7$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle D, S\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D, S, P_1\rangle$: (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D, S, A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D, S, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle D, S, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D, S, A_3, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3\rangle$ $(0 \le \alpha \le 2)$: 0, (3);
$\langle D + A_3, S\rangle$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3\rangle$: (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, T_1\rangle$ $(0 \le \alpha \le 2)$;
$\langle D + A_3, S, P_1\rangle$: (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1\rangle$: (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(0 \le \alpha \le 2)$;
$\langle D + \alpha A_3, S, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 + D, S, P_2\rangle$: (1), (1,2), (2,3), (1,2,3);
$\langle A_1 + D, S, P_1, P_2\rangle$: (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + D, S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2\rangle$ $(|\alpha| \le 2)$: (1), (1,2);
$\langle A_1 + D + P_1, S, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - D, S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - D, S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - D + \alpha P_2, S + P_2, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(|\alpha| \le 2)$;
$\langle A_1 + S, D - S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 + S, D - S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 + 2S, D\rangle$: 0, (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1 \pm 2S, D, A_3\rangle$: (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1, D - 2S, A_3\rangle$: (3), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1 + 2S, D, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D - 2S, P_1, P_2\rangle$: (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + 2S, D, P_1, P_2 + T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1 \pm 2S, D, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + T_2\rangle$;
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 + \beta T_2, T_1\rangle$ $(0 < \beta \le 1)$;
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_1 \pm 2S, D, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1, D - 2S, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2, T_3\rangle$;
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$;
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$.

8) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_3^8$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S\rangle$ $(\alpha \ne \pm\beta, \pm(\beta + 2);\ \beta \ne 0, -1;\ \alpha \ge 0,\ \alpha + 3\beta + 2 \ge 0)$: 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3\rangle$ $(\alpha \ne \pm\beta,\ \pm(\beta + 2);\ \beta \ne 0, -1)$: (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2);\ \beta \neq 0, -1;\ \alpha \geq 0)$;
$\langle A_1+\alpha S, D+\beta S, A_3, P_1, T_1, T_2, T_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta+2);\ \beta \neq 0, -1;\ \alpha+3\beta+2 \geq 0)$;
$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm\beta, \pm(\beta + 2);\ \beta \neq 0, -1)$: (1,2), (1,2,3).

9) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_1$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A_1 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha > 0\ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0)$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, S\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3\rangle$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, D\rangle$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3, A, S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle P_1, P_2, A_1, A_2, A_3, D + \alpha S\rangle$: 0, (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A_2 + A_3, D, P_1 + T_2, P_2 - T_1\rangle$; $\langle A_2, A_2, A_3, P_1, P_2, D + T_3, T_1, T_2\rangle$;
$\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \delta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\delta \geq 0)$;
$\langle A_2 + A_3, D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$.

10) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_2$ алгебры $AO(3,3)$:

$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + \beta S, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha > 0\ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0)$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D', S, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha S, D' + \beta S, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, S\rangle$: 0, (1), (1,2,3);
$AISL(2,R) = \langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3\rangle$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle A'_2 + A'_3, D', S, P'_1, P'_2\rangle$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, D' + \alpha S\rangle$ $(\alpha \in R)$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle P'_1, P'_2, A'_1, A'_2, A'_3, D', S\rangle$: 0, (1), (1,2,3);
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + T'_1, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3 + T_1, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2\rangle$;
$\langle A'_2 + A'_3 + T_1, D' + \alpha T_1, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2\rangle$;
$\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2\rangle$;
$\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1\rangle$;
$\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, T_1\rangle$;
$\langle A'_1, A'_2, A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2\rangle$;
$\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, D' + 2S, T_1\rangle$.

11) Подалгебры класса $\mathfrak{N}_0$ алгебры $AO(3,3)$:

$AO(3)$: 0, (1,2,3);
$AO(2,1)$: 0, (1,2,3);
$AO(3) \oplus \langle S\rangle$: 0, (1,2,3);
$AO(2,1) \oplus \langle S\rangle$: 0, (1,2,3);
$ASL(3,R)$: 0, (1,2,3);

$AGL(3,R)$: 0, (1,2,3);
$\langle A_2+A_3+\alpha D+\beta S\rangle$ $(\alpha\geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2+A_3+\alpha D, S\rangle$ $(\alpha\geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2+A_3+\alpha S, D+\beta S\rangle$ $(\alpha\geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2+A_3, D, S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R)\oplus\langle S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R)\oplus\langle D+\alpha S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,2);
$AGL(2,R)\oplus\langle S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2+A_3+\alpha D+T_3\rangle$: 0, (1,2);
$\langle A_2+A_3+T_3, D+\alpha T_3\rangle$ $(\alpha\geq 0)$: 0, (1,2);
$\langle A_2+A_3, D+T_3\rangle$: 0, (1,2);
$ASL(2,R)\oplus\langle D+T_3\rangle$: 0, (1,2).

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$, Препринт 88.34, Киев, Ин-т математики, 1988, 48 с.
3. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортоганальных и псевдоунитарных групп, Препринт 86.67, Киев, Ин-т математики, 1986, 48 с.
4. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д., Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3,R)$, Препринт 89.65, Киев, Ин-т математики, 1989, 32 с.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continous subgroups of the fundamental groups of physics. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
6. Patera J., Sharp R., Winternitz P., Zassenhaus H., Continous subgroups of the fundamental groups of physics. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
7. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. гос. ун-т, 1960, 86–115.