Диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

В.І. ФУЩИЧ, І.А. ЄГОРЧЕНКО

The bases of the second-order differential invariants of the Poincaré and conformal algebras for a set of scalar functions in the n-dimensional Minkowsky space are constructed. New classes of the nonlinear conformal-invariant equations are found.

Наведені функціональні базиси абсолютних диференціальних інваріантів другого порядку для набору з m скалярних функцій $u^r = u^r(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 3$.

Алгебра Пуанкаре $AP(1,n)$ задається базисними операторами

$$p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \tag{1}$$

де $\mu, \nu = 0, 1, \dots, n$, під повторюваними індексами мається на увазі підсумовування $(x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, \dots, -1)$.

Квазілінійні інваріанти другого порядку алгебри Пуанкаре та конформної алгебри описані в [1].

Теорема 1. *Функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку алгебри Пуанкаре (1) для скалярної функції u складається з $2n+3$ інваріантів*

$$\begin{aligned} &u, \quad S_k(u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_k\mu_0}, \\ &R_k(u_\mu, u_{\mu\nu}) = u_{\mu_0} u_{\mu_k} u_{\mu_0\mu_1} \cdots u_{\mu_{k-1}\mu_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$.

В тому, що вирази (2) є абсолютними інваріантами алгебри $AP(1,n)$ можна переконатися, перевіривши, що має місце рівність [2]

$$\overset{2}{X} F(x_\mu, u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0,$$

де $\overset{2}{X}$ — другі продовження базисних операторів цієї алгебри.

Доведення повноти та функціональної незалежності набору інваріантів (2) досить громіздке, тому тут його наводити не будемо.

Теорема 2. *Для набору з m скалярних функцій u^r базис інваріантів другого порядку алгебри $AP(1,n)$ складається з $m(2n+3) + (m-1)\frac{n(n-1)}{2}$ інваріантів*

$$\begin{aligned} &u^r, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu}) = u^r_{\mu_1} u^r_{\mu_k} u^1_{\mu_1\mu_2} \cdots u^1_{\mu_{k-1}\mu_k}, \\ &S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu}) = u^1_{\mu_1\mu_2} \cdots u^1_{\mu_{j-1}\mu_1} u^r_{\mu_j\mu_{j+1}} \cdots u^r_{\mu_k\mu_1}, \end{aligned} \tag{3}$$

$j = 0, \dots, k$, $k = 1, \dots, n+1$, $r = 1, \dots, m$, по r підсумовування немає.

Доповіді АН УРСР, Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1989, № 5, 21–22.

Для розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D\}$,

$$D = x_\mu p_\mu + \lambda u^r p_{u^r}, \tag{4}$$

($p_{u^r} = i\partial/\partial u^r$, по r підсумовування від 1 до m) відповідний базис має вигляд коли $\lambda \neq 0$

$$\frac{u^r}{u^1}, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u^1)^{k\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)}, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu})(u^1)^{\frac{2k}{\lambda}-k-1};$$

коли $\lambda = 0$

$$u^r, \quad S_{jk}(u^r_{\mu\nu}, u^1_{\mu\nu})(u^1_{\alpha\alpha})^{-k}, \quad R_k(u^r_\mu, u^1_{\mu\nu})(u^1_{\alpha\alpha})^{-k},$$

де S_{jk}, R_k визначаються співвідношеннями (3), $j = 0, 1, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n+1$, $r = 1, \ldots, m$, по r підсумовування немає.

Наведемо аналогічні результати для конформної алгебри

$$AC(1,n) = \{p_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x_\nu p_\mu$$

(D — оператор дилатації (4)).

Базис інваріантів другого порядку алгебри $AC(1,n)$, коли $\lambda \neq 0$

$$S_{jk}(\theta^r_{\mu\nu}, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{k\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)}, \quad \frac{u^r}{u^1}, \quad R_k(\theta^r_\mu, \theta^1_{\mu\nu})(u^1)^{k\left(\frac{2}{\lambda}-1\right)-1},$$

$j = 0, \ldots, k$, $k = 1, \ldots, n+1$, $r = 2, \ldots, m$, по r підсумовування немає.

Конформно-коваріантні тензори мають вигляд

$$\theta^r_\mu = \frac{u^r_\mu}{u^r} - \frac{u^1_\mu}{u^1}, \quad \theta^r_{\mu\nu} = \lambda u^r_{\mu\nu} + (1-\lambda)\frac{u^r_\mu u^r_\nu}{u^r} + \frac{\lambda g_{\mu\nu}}{1-n}\left(u^r_{\beta\beta} - \frac{u^r_\beta u^r_\beta}{u^r}\right),$$

S_{jk}, R_k будуються аналогічно (3).

$AC(1,n)$, $\lambda = 0$:

$$u^r, \quad (u^1_\alpha u^1_\alpha)^{-2k} S_{jk}(w^1_{\mu\nu}, w^r_{\mu\nu}), \quad R_k(u^r_\mu, w^1_{\mu\nu})(u^1_\alpha u^1_\alpha)^{-2k+1},$$
$$r = 2, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, k, \quad k = 1, \ldots, n+1.$$

Конформно-коваріантні тензори $w^r_{\mu\nu}$ мають вигляд

$$w^r_{\mu\nu} = u_\alpha u^r_\alpha \left(u^r_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{1-n} u^r_{\beta\beta}\right) - u^r_\beta (u^r_\mu u^r_{\beta\nu} + u^r_\nu u^r_{\beta\mu}) \tag{5}$$

(по r підсумовування немає).

Одержані результати дозволяють побудувати нові нелінійні багатовимірні конформно-інваріантні рівняння. Наприклад, рівняння

$$u_\alpha u_\alpha \frac{1}{n-1} \Box u - u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} = (u_\nu u_\nu)^2 F(u),$$

ліва частина якого є згорткою тензора $w_{\mu\nu}$ (5), F — довільна функція, інваріантне відносно алгебри $AC(1,n)$, $\lambda = 0$.

1. Фущич В.И., Егорченко И.А., О симметрийных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений, *Докл. АН СССР*, 1988, **298**, № 2, 347–351.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.