Дифференциальные инварианты алгебры Галилея

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

Bases of the second-order differential invariants of the Galilei algebra are constructed for n-dimensional real and complex scalar functions. New classes of the non-linear nonrelativistic equations are found.

Хорошо известно, что уравнение теплопроводности

$$2\mu u_t + u_{aa} = 0, \quad u_{aa} = \Delta u,$$
$$u = u(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad n \geq 3 \tag{1}$$

инвариантно относительно обобщенной алгебры Галилея $AG_2^I(1,n)$ с базисными операторами [1]:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,$$
$$G_a = t\partial_a + \mu x_a u\partial_u \quad \left(\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad u\partial_u, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + \lambda u\partial_u, \tag{2}$$
$$A = tD - t^2\partial_t + \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{x}^2 u\partial_u, \quad \lambda = -\frac{n}{2}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n).

Уравнение Шредингера

$$2im\psi_t + \psi_{aa} = 0, \quad \psi_{aa} = \Delta\psi, \tag{3}$$

$\psi = \psi(t, \vec{x})$ — комплекснозначная функция, инвариантно относительно алгебры Галилея с базисными операторами [2]:

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,$$
$$J = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \quad G_a = tp_a - imx_a J,$$
$$D = 2tp_0 - x_a p_a + \lambda I, \quad \text{где} \quad I = i(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}), \tag{4}$$
$$A = t^2 p_0 - tx_a p_a + \frac{im\boldsymbol{x}^2}{2}J + \lambda t I, \quad \lambda = -\frac{n}{2},$$

звездочка означает комплексное сопряжение.

Алгебру (4) будем в дальнейшем обозначать символом $A_2^{II}(1,n)$.

В настоящей работе построены функциональные базисы дифференциальных инвариантов второго порядка алгебр $AG_2^I(1,n)$ и $AG_2^{II}(1,n)$ Найденные инварианты дают возможность строить широкие классы многомерных нелинейных уравнений параболического типа.

Доклады АН УССР, Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки, 1989, № 4, 29–32.

Определение абсолютного дифференциального инварианта m-го порядка и функционального базиса инвариантов группы и алгебры Ли см. например, в [3, 4].

Обозначим символом $AG^I(1,n)$ алгебру Галилея с базисными элементами

$$AG^I(1,n) = \langle \partial_t, \partial_a, u\partial_u, G_a, J_{ab} \rangle \quad (2);$$
$$AG^{II}(1,n) = \langle p_0, p_a, J, G_a, J_{ab} \rangle \quad (4).$$

Символами $AG_1^I(1,n)$ и $AG_1^{II}(1,n)$ обозначим расширенные алгебры Галилея:

$$AG_1^I(1,n) = AG^I(1,n) \niplus D, \quad AG_1^{II}(1,n) = AG^{II}(1,n) \niplus D.$$

Для упрощения записи инвариантов введем замену

$$u = \exp\varphi, \quad \psi = \exp\Phi, \quad \operatorname{Im}\Phi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Re}\psi}{\operatorname{Im}\psi}. \tag{5}$$

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &S_j(\varphi_{ab}) = \varphi_{a_1a_2}\cdots\varphi_{a_{j-1}a_j}\varphi_{a_ja_1} = S_j, \\ &S_{jk}(\Phi_{ab}, \Phi^*_{ab}) = \Phi_{a_1a_2}\cdots\Phi_{a_{k-1}a_k}\Phi^*_{a_ka_{k+1}}\cdots\Phi^*_{a_{j-1}a_j}\Phi^*_{a_ja_1} = S_{jk}, \\ &R_j(\theta_a, \varphi_{ab}) = \theta_{a_1}\theta_{a_j}\varphi_{a_1a_2}\cdots\varphi_{a_{j-1}a_j}, \quad \varphi_{ab} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_a\partial x_b}, \quad \varphi_a = \frac{\partial\varphi}{\partial x_a}. \end{aligned} \tag{6}$$

Все индексы j принимают значения от 1 до n, индексы k — от 0 до j.

Инварианты строятся из ковариантных тензоров. Для алгебры $AG^I(1,n)$ эти тензоры имеют вид

$$\theta_a = \mu\varphi_{at} + \varphi_b\varphi_{ab}, \quad \varphi_{ab}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Функциональный базис абсолютных дифференциальных инвариантов алгебры $AG^I(1,n)$ при $\mu \neq 0$ состоит из $2n+2$ инвариантов:*

$$\begin{aligned} &M_1 = 2\mu\varphi_t + \varphi_a\varphi_a, \quad M_2 = \mu^2\varphi_{tt} + 2\mu\varphi_a\varphi_{at} + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}, \\ &S_j, \quad R_j = R_j(\theta_a, \varphi_{ab}). \end{aligned} \tag{8}$$

Для алгебры $AG_1^I(1,n)$ $(\mu \neq 0)$:

$$\frac{M_2}{M_1^2}, \quad \frac{R_j}{M_1^{3+j}}, \quad \frac{S_j}{M_1^{1+j}}.$$

Для алгебры $AG_2^I(1,n)$ $(\mu \neq 0)$:

$$\frac{N_2}{N_1^2}, \quad \frac{\hat{R}_j}{N_1^{3+j}}, \quad \frac{\hat{S}_j}{N_1^{1+j}} \quad (j = 2, \ldots, n),$$

где

$$\begin{aligned} &N_1 = 2\mu\varphi_t + \varphi_a\varphi_a + \varphi_{aa}, \\ &N_2 = \mu^2\varphi_{tt} + 2\mu\left(\frac{1}{n}\varphi_t\varphi_{aa} + \varphi_a\varphi_{at}\right) + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} + \frac{1}{n}\varphi_a\varphi_a\varphi_{bb} + \frac{1}{2n}\varphi_{bb}^2, \\ &\hat{R}_j = \sum_{l=0}^{j} R_l(\varphi_{aa})^{j-l}\frac{(-n)^l j!}{l!(j-l)!}, \quad \hat{S}_j = \sum_{l=0}^{j}\frac{(-n)^l(j-1)!(j+1)!}{(l+1)!(j-l)!}S_l(\varphi_{aa})^{j-l}, \end{aligned}$$

S_j, R_j определяются соотношениями (6), θ_a имеют вид (7).

Случай $\mu = 0$ для алгебры $AG_2^I(1,n)$ требует специального рассмотрения. Ковариантными будут тензоры φ_a и φ_{ab}; тензор θ_a в записи инвариантов определяется соотношением $\varphi_{bt} = \theta_a\varphi_{ab}$.

Теорема 2. *Функциональный базис дифференциальных инвариантов второго порядка алгебры $AG^I(1,n)$, $\mu = 0$ имеет вид*

$$M_1 = \varphi_t - \varphi_a\theta_a, \quad M_2 = \varphi_{tt} - \varphi_{at}\theta_a, \quad S_j, \quad R_j = R_j(\varphi_a, \varphi_{ab}). \tag{9}$$

Базис инвариантов алгебры $AG_1^I(1,n)$, $\mu = 0$:

$$R_j M_1^{-(j+1)}, \quad S_j M_1^{-(j+1)}, \quad M_1^2 M_2^{-1},$$

алгебры $AG_2^I(1,n)$, $\mu = 0$:

$$R_j M^{-\frac{1}{2}(j+1)}, \quad S_j M^{-\frac{1}{2}(j+1)},$$

где R_j, S_j имеют вид (9),

$$M = (\varphi_t - \theta_a\varphi_a)^2 + (\varphi_{tt} - \varphi_{at}\theta_a)(\lambda + \varphi_a\varphi_b r_{ab}),$$
$$\{r_{ab}\} = \{\varphi_{ab}\}^{-1}, \quad \theta_a = r_{ab}\varphi_{bt}.$$

Замечание. Вместо M_1, M_2 в (9) можно использовать инварианты

$$\hat{M}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}, \quad \hat{M}_2 = \begin{vmatrix} \varphi_{tt} & \varphi_{1t} & \cdots & \varphi_{nt} \\ \varphi_{1t} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{nt} & \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

найденные в [5] как решение задачи о нахождении уравнений второго порядка, инвариантных относительно алгебры Галилея при $\mu = 0$.

Перейдем к описанию базиса инвариантов алгебры $AG_2^{II}(1,n)$.

Теорема 3. *Любой абсолютный дифференциальный инвариант порядка $f \le 2$ алгебры $AG^{II}(1,n)$, $m \ne 0$ будет функцией следующих выражений:*

$$\Phi + \Phi^*, \quad M_1 = 2im\Phi_t + \Phi_a\Phi_a, \quad M_1^*,$$
$$M_2 = -m^2\Phi_{tt} + 2im\Phi_a\Phi_{at} + \Phi_a\Phi_b\Phi_{ab}, \quad M_2^*, \quad S_{jk}, \quad R_j^1 = R_j(\theta_a, \Phi_{ab}),$$
$$R_j^a = R_j(\theta_a^*, \Phi_{ab}), \quad R_j^3 = R_j(\Phi_a + \Phi_a^*, \Phi_{ab});$$

ковариантные тензоры имеют вид

$$\theta_a = im\Phi_{at} + \Phi_a\Phi_{ab}, \quad \Phi_{ab}.$$

$AG_1^{II}(1,n)$, $m \ne 0$:

$$M_1^* M_1^{-1}, \quad M_2 M_1^{-2}, \quad M_2^* M_1^{-2}, \quad R_j^l M_1^{-3-j} \ (l = 1,2),$$
$$R_j^3 M_1^{-(1+j)} S_{jk} M_1^{-1-j}, \quad \Phi + \Phi^* \text{ при } \lambda = 0, \quad M_1 l^{\frac{2}{\lambda}(\Phi+\Phi^*)} \text{ при } \lambda \ne 0.$$

$AG_2^{II}(1,n)$, $m \ne 0$, $\lambda = -\frac{n}{2}$:

$$N_1 e^{-\frac{4}{n}(\Phi+\Phi^*)}, \quad \frac{N_1}{N_1^*}, \quad \frac{N_2}{N_1^{*2}}, \quad \frac{\hat{R}_j^l}{N_1^{3+j}} \ (l = 1,2), \quad \frac{\hat{R}_j^3}{N_1^{1+j}} \frac{\hat{S}_{jk}}{N_1^{1+j}},$$

где

$$N_1 = 2im\Phi_t + \Phi_{aa} + \Phi_a\Phi_a,$$

$$N_2 = -m^2\Phi_{tt} + 2im\left(\Phi_a\Phi_{at} + \frac{1}{n}\Phi_t\Phi_{aa}\right) + \Phi_a\Phi_b\Phi_{ab} + \frac{1}{n}\Phi_a\Phi_a\Phi_{bb} + \frac{1}{2n}\Phi_{aa}^2,$$

$$\hat{S}_{jk} = \sum_{l=0}^{j}\sum_{r=0,\, r\le l}^{k} S_{lr}(-n)^l C_k^r C_k^{l+1-r}(\Phi_{aa})^{k-r}(\Phi_{aa}^*)^{j-l-k-r} + j(\Phi_{aa})^k(\Phi_{aa}^*)^{j-k-1},$$

$$\hat{R}_j^l = \sum_{k=0}^{j} R_k^l(\Phi_{aa})^{j-k}\frac{(-n)^k j!}{k!(j-k)!}, \quad l = 1,2,3.$$

Инварианты алгебр $AG_1^{II}(1,n)$, $AG_2^{II}(1,n)$, $m=0$ строятся аналогично случаю действительной функции. Приведем функциональный базис инвариантов алгебры $AG_2^{II}(1,n)$, $m=0$

1) $\lambda = 0$:

$$\Phi + \Phi^*, \quad \frac{N_1^2}{N_2}, \quad \frac{N_1^{*2}}{N_2}, \quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^{j+1}}, \quad \frac{(R_j^l)^2}{N_1^{j+1}} \ \ (l = 1,2,4);$$

2) $\lambda \ne 0$:

$$N_1 e^{\frac{4}{\lambda}(\Phi+\Phi^*)}, \quad \frac{N_1^*}{N_1}, \quad N_3 e^{\frac{3}{\lambda}(\Phi+\Phi^*)}, \quad \frac{(R_j^l)^2}{N_1^{j+1}} \ \ (l=1,2,3), \quad \frac{(S_{jk})^2}{N_1^{j+1}},$$

где

$$N_1 = (\Phi_t - \theta_a\Phi_a)^2 + (\Phi_{tt} - \theta_a\Phi_{at})(\lambda + \Phi_a\Phi_b r_{ab})$$
$$(\{r_{ab}\} = \{\Phi_{ab}\}^{-1},\ \theta_a = r_{ab}\Phi_{bt}),$$
$$N_2 = (\Phi_t - \Phi_c\theta_c)\Phi_a^*\Phi_b^* r_{ab}^* - (\Phi_t^* - \Phi_c^*\theta_c^*)\Phi_a\Phi_b r_{ab},$$
$$N_3 = \Phi_t - \Phi_t^* - \tau_a(\Phi_a - \Phi_a^*)$$
$$(\tau_a = (\Phi_b\Phi_t + \lambda\Phi_{bt})\hat{r}_{ab},\ \{\hat{r}_{ab}\} = \{\lambda\Phi_{ab} + \Phi_a\Phi_b\}^{-1}),$$
$$R_j^1 = R_j(\Phi_a, \Phi_{ab}), \quad R_j^2 = R_j(\Phi_a^*, \Phi_{ab}), \quad R_j^3 = R_j(\theta_a - \theta_a^*, \Phi_{ab}),$$
$$R_j^4 = R_j(\rho_a, \Phi_{ab}) \quad (\rho_a = (\Phi_t - \theta_b\Phi_b)(\Phi_c^* r_{ac} - \Phi_c r_{ac}^*) - \Phi_b\Phi_d r_{bd}(\theta_a - \theta_a^*)).$$

Замена (5) в приведенных инвариантах позволяет получить базисы для алгебр $AG_2^I(1,n)$ и $AG_2^{II}(1,n)$ в представлениях (2) и (4). Эти результаты легко обобщить на случай нескольких скалярных функций.

Подробные доказательства полноты и независимости найденных базисов инвариантов будут приведены в последующих работах.

Примеры инвариантных уравнений:

1) относительно алгебры $AG_2^I(1,n)$, $\mu \ne 0$:

$$\varphi_{tt} + \frac{1}{\mu^2}\left\{2\mu\left(\frac{1}{n}\varphi_t\varphi_{aa} + \varphi_a\varphi_{at}\right) + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} + \frac{1}{n}\varphi_a\varphi_a\varphi_{bb} + \frac{1}{2n}\varphi_{bb}^2\right\} =$$
$$= (2\mu\varphi_t + \varphi_{aa} + \varphi_a\varphi_a)^2 F;$$

2) относительно алгебры $AG_2^{II}(1,n)$, $m \ne 0$:

$$-m^2\Phi_{tt} + 2im\left(\Phi_a\Phi_{at} + \frac{1}{n}\Phi_t\Phi_{aa}\right) + \Phi_a\Phi_b\Phi_{ab} +$$
$$+ \frac{1}{n}\Phi_a\Phi_a\Phi_{bb} + \frac{1}{2n}\Phi_{aa}^2 = (2im\Phi_t + \Phi_a\Phi_a + \Phi_{aa})F.$$

Здесь F — произвольные функции инвариантов соответствующих алгебр.

1. Goff J.A., Transformations leaving invariant the heat equation of physics, *Amer. J. Math.*, 1927, **49**, 117–122.
2. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элем. частиц и атом. ядра*, 1981, **12**, 1157–1219.
3. Tresse A., Sur les invariants differentiels des groupes continus des transformations, *Acta Math.*, 1894, **18**, 1–88.
4. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
5. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear PDE, *J. Phys. A*, 1985, **18**, 3491–3503.