Условная инвариатность и точные решения уравнения Буссинеска

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Исследована условная инвариантность уравнения Буссинечка. Найдены инвариантные анзацы, редуцирующие данное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Известно, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения Буссинеска

$$u_{00}+\frac{1}{2}\Delta u^2+\Delta^2 u=0,\quad u=u(x),\quad x=(x_0,\vec{x})\in R_{1+n} \tag{1}$$

является расширенная алгебра Евклида $\tilde{E}(1,n)$ с операторами

$$\partial_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\quad \partial_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a,\quad D=2x_0\partial_0+x_a\partial_a-2u\partial_u. \tag{2}$$

Все не эквивалентные анзацы, редуцирующие двумерное $(n=1)$ уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению, которые можно построить по алгебре инвариантности (2), имеют вид

$$\begin{aligned}&u=\varphi(\omega),\quad \omega=\alpha_0x_0+\alpha_1x_1,\quad \alpha_0,\alpha_1=\text{const},\\&u=x_0^{-1}\varphi(\omega),\quad \omega=x_1x_0^{-1/2}.\end{aligned} \tag{3}$$

В работе [1] показано, что двумерное уравнение (1) с помощью анзаца

$$u=\varphi(\omega)-4\mu^2x_0^2,\quad \omega=x_1+\mu x_0^2,\quad \mu=\text{const} \tag{4}$$

редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi'''+\varphi\varphi'+2\mu\varphi=8\mu^2\omega+C_1,\quad C_1=\text{const}. \tag{5}$$

Оператор, соответствующий этому анзацу,

$$Q=\partial_0-2\lambda x_0\partial_1-8\lambda^2x_0\partial_u,\quad \lambda=-2\mu \tag{6}$$

не пренадлежит алгебре (2). Анзацы вида (4) естественно назвать нелиевскими, так как они не следуют из групповых свойств уравнения (1).

В настоящей работе с использованием понятия условной инвариантности, введенного в работах [2–6], описаны анзацы вида [7]

$$u(x)=f(x)\varphi(\omega)+g(x),\quad \omega=\omega(x), \tag{7}$$

которые редуцирующие уравнение (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Симметрия и решения уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1989, 95–102.

В работе [8] без использования понятия условной инвариантности, описаны анзацы вида (7), редуцирующие двумерное уравнение Буссинеска (1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Существенное отличие нашего подхода от метода [8] состоят в том, что понятие условной инвариатности вскрывает причину возникновения неожиданных анзацев и дает регулярную процедуру для отыскания нелиевских анзацев для произвольных уравнений. Кроме того, условная инвариантность дает возможность построить такие анзацы, которые не могут быть получены способом, предложенным в [8].

Рассмотрим двумерное уравнение (1)

$$u_{00} + uu_{11} + u_1^2 + u_{1111} = 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Уравнение (8) Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = A(x)\partial_0 + B(x)\partial_1 + [\alpha(x)u + \beta(x)]\partial_u, \tag{9}$$

если функция $A(x)$, $B(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

Случай 1. $A \neq 0$. Не умаляя общности можно положить $A = 1$.

$$\begin{aligned}
&\alpha = -2B_1, \quad \alpha = B_{11} = 0, \quad \beta = -2B(B_0 + 2BB_1),\\
&\beta_1 = \frac{1}{2}B_{00} + (\alpha B)_0 + B_1(B_0 - 2BB_1 + 4\alpha B),\\
&\beta_{11} = -(\partial_0 + 4B_1)(\alpha_0 + \alpha^2),\\
&\beta_{00} - 2B_0\beta_1 + 4B_1(\beta_0 - B\beta_1 + \alpha\beta) + 2\alpha_0\beta = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Случай 2. $A = 0$, $B = 1$.

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0,\\
&\beta_{11} + 3\alpha\beta_1 + 4\alpha^2\beta + 5\alpha_1\beta + 5\alpha_{11}(\alpha^2 - \alpha_1) + 5\alpha\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha^2) = 0,\\
&\beta_{1111} + 4\alpha_{111}\beta + 6\alpha_{11}(\beta_1 + \alpha\beta) +\\
&\qquad + 4\alpha_1[(\alpha^2 + \alpha_1)\beta + (\beta_1 + \alpha\beta)_1] + \beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство проводится при помощи формулы (5, 7, 8) из [6].

В случаи 1 существует общее решение уравнений (10), которое дает следующий оператор:

$$\begin{aligned}
Q = \partial_0 &+ [a(x_0)x_1 + b(x_0)]\partial_1 -\\
&- 2[a(x_0)u + a(a' + aa^2)x_1^2 + (a'b + ab' + 4a^2b)x_1 + b(b' + 2ab)]\partial_u,
\end{aligned} \tag{12}$$

где функции $a = a(x_0)$, $b = b(x_0)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$a'' = 2aa' - 4a^3 = 0, \quad b'' + 2ab' - 4a^2b = 0. \tag{13}$$

В зависимости от значений функций $a(x_0)$, $b(x_0)$ имеем несколько неквивалентных операторов

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \partial_0 + x_0\partial_1 - 2x_0\partial_u \quad (a = 0,\ b = x_0);\\
&Q_2 = x_0\partial_0 - (x_1 + 6x_0^5)\partial_1 + 2\left[u + 3\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2x_1x_0^3 - 24x_0^8\right)\right]\partial_u\\
&\qquad\qquad (a = -x_0^1,\ b = 6x_0^5);
\end{aligned} \tag{14}$$

$$Q_3 = 2x_0\partial_0 + (x_1 - 3x_0^2)\partial_1 - 2(u - 3x_1 + 9x_0^2)\partial_u \quad \left(a = \frac{1}{2x_0},\ b = -\frac{3x_0}{2}\right);$$

$$Q_4 = \wp\partial_0 + \wp' x_1\partial_1 - \wp'(2u + \wp x_1^2)\partial_u \quad \left(a = \frac{\wp'}{2\wp},\ b = 0\right);$$

$$Q_5 = 2\wp\partial_0 + \wp'(x_1 + \Omega)\partial_1 - [2\wp' u + \wp\wp'(x_1 + \Omega)^2 + x_1 + \Omega]\partial_u,$$

$$a = \frac{\wp'}{2\wp}, \quad b = a\Omega, \quad \Omega = \Omega(x_0) = \int \wp(\wp')^{-2} dx_0,$$

$\rho = \rho(x_0)$ — функция Вейерштраса, являющаяся решением уравнения $\wp'' = \wp^2$ или $(\wp')^2 = \frac{2}{3}(\wp^3 + \lambda)$, $\lambda = \mathrm{const}$.

В случае 2 мы нашли только несколько частных решений уравненний (11), т.е. получили следующие операторы:

$$\begin{aligned}
&Q_6 = x_0^2\partial_1 + (x_0^5 - 2x_1)\partial_u \quad (\alpha = 0,\ \beta = x_0^3 - 2x_1x_0^{-2});\\
&Q_7 = \partial_1 + \left(-\frac{1}{3}\wp x_1 + \Lambda\right)\partial_u \quad \left(\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{3}\wp x_1 + \Lambda\right);\\
&Q_8 = x_1\partial_1 + 2u\partial_u \quad (\alpha = 2x_1^{-1},\ \beta = 0);\\
&Q_9 = x_1^3\partial_1 + 2(x_1^2 u + 24)\partial_u \quad (\alpha = 2x_1^{-1},\ \beta = 48x_1^{-3}),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\Lambda = \Lambda(x_0)$ — функция Ламе, удовлетворяющая уравнению $\Lambda'' = \wp\Lambda$.

Используя операторы (14)–(15), находим анзацы:

$$\begin{aligned}
&1)\quad u = \varphi(\omega) - 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2;\\
&2)\quad u = x_0^2\varphi(\omega) - \left(\frac{x_1}{x_0} + 6x_0^4\right), \quad \omega = x_0(x_1 + x_0^5);\\
&3)\quad u = x_0^{-1}\varphi(\omega) + 2(x_1 - x_0^2), \quad \omega = x_0^{-1/2}(x_1 + x_0^2);\\
&4)\quad u = \wp^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{6}\wp x_1^2, \quad \omega = \wp^{-1/2}x_1;\\
&5)\quad u = \wp^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{4}\wp^{-2}\dot\wp^2(x_1 + \Omega)^2, \quad \omega = \wp^{-1/2}x_1 - \frac{1}{2}\int \wp^{-3/2}\dot\wp\Omega dx_0;\\
&6)\quad u = \varphi(\omega) - x_0^{-2}x_1^2 + x_0^3x_1, \quad \omega = x_0;\\
&7)\quad u = \varphi(\omega) - \frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0) + \Lambda(x_0)x_1, \quad \omega = x_0;\\
&8)\quad u = x_1^2\varphi(\omega), \quad \omega = x_0;\\
&9)\quad u = x_1^2\varphi(\omega) - 12x_1^{-2}, \quad \omega = x_0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя анзацы (16) в уравнение (8), получим следующие редуцированные уравнения:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \varphi''' + \varphi\varphi' + 2\varphi = 8\omega + C_1;\\
&2)\quad \varphi''' + \varphi\varphi' + 30\varphi = 1800\omega + C_2;\\
&3)\quad \varphi^{\mathrm{IV}} + \left(\varphi + \frac{\omega^2}{2}\right)\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{7}{4}\omega\varphi' + 2\varphi = 0;\\
&4)\quad \varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{6}(\omega^2\varphi'' + 7\omega\varphi' + 8\varphi) = 0;\\
&5)\quad \varphi^{\mathrm{IV}} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{2}(\omega\varphi' + 2\varphi - \lambda\omega) = 0;\\
&6)\quad \varphi'' - 2\omega^{-2}\varphi + \omega^6 = 0;
\end{aligned} \tag{17}$$

7) $\varphi'' - \dfrac{1}{3}\wp\varphi + \Lambda^2 = 0;$

8) $\varphi'' + 6\varphi^2 = 0;$

9) $\varphi'' + 6\varphi^2 = 0,$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решая уравнение (17), по формуле (16) получаем решения уравнения (8). Приведем некоторые из них:

$$u = -\frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0), \quad u = -12x_1^{-2}, \quad u = -\frac{1}{6}x_1^2\wp(x_0) - 12x_1^{-2}, \tag{18}$$

$$\begin{gathered} u = 2(x_1 - x_0^2), \quad u = 2(x_1 - x_0^2) - 12(x_1 + x_0^2)^{-2}, \\ u = -x_0^{-2}x_1^2 - 6C_3^2x_0^8 + 18C_3x_0^3x_1 + C_4x_0^{-1} + C_5x_0^2, \quad C_3, C_4, C_5 = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{19}$$

Замечание 1. Поскольку уравнение (8) инвариантно относительно преобразований сдвигов и растяжений, то справедлива следующая формула размножения его решений:

$$u = \chi^2 f(\chi^2 x_0 + \theta_0, \chi x_1 + \theta_1), \tag{20}$$

где $f(x_0, x_1)$ — решение уравнения (8), χ, θ_0, θ_1 — постоянные групповые параметры.

Замечание 2. Решения (18) обладает той особенностью, что третье из них равно сумме двух первых. В общем случае сумма $u = v + w$ двух решений v и w уравнения Буссинеска (1) будет его решением, если их произведение vw является решением уравнения Лапласа $\Delta(vw) = 0$. Это следует из соотношения

$$L(v + w) = Lv + Lw + \Delta(vw),$$

где Lu — левая часть уравнения (1).

Приведем теперь некоторые результаты исследований условной инвариантности уравнения Буссинеска.

Теорема 2. *Уравнение (8) инвариантно относительно оператора*

$$Q = \wp(x_1)\partial_1 + \wp'(x_1)u\partial_u \tag{21}$$

при условии

$$u + 2\wp(x_1) = 0. \tag{22}$$

Анзац, полученный при помощи оператора (21), имеет вид

$$u = \wp(x_1)\varphi(\omega), \quad \omega = x_0. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (8), имеем

$$\wp(x_1)\varphi'' + [\wp^3(x_1) + (\wp')^2]\varphi(\varphi + 2) = 0. \tag{24}$$

Из (24) следует, что для выполнения редукции необходимо требовать

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi(\varphi + 2) = 0, \tag{25}$$

т.е. анзац (23) редуцирует уравнение (8) к системе двух уравнений (25).

Нетривиальным решением системы (25) является функция $\varphi = -2$. Тогда

$$u = -2\wp(x_1) \tag{26}$$

— решение уравнения (8).

Теорема 3. *Уравнение (1) при* $n = 6$ *инвариантно относительно конформной алгебры* $C(6)$ *с операторами*

$$\begin{gathered}\partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad D = x_a\partial_a - 4u\partial_u, \\ K_a = 2x_a D - \vec{x}^{\,2}\partial_a, \quad a = \overline{1,6},\end{gathered} \tag{27}$$

при условии

$$\Delta u + \frac{1}{2}u^2 = 0. \tag{28}$$

Один из анзацев, полученных при помощи операторов K_a, имеет вид

$$u = (\vec{x}^{\,2})^{-2}\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = \frac{\vec{b}\vec{x} - \vec{b}^{\,2}\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,4}}, \tag{29}$$

где b_a — постоянные параметры.

Подставляя (29) в (1), имеем

$$(\vec{x}^{\,2})^{-2}\varphi_{11} + \Delta\left[2\vec{b}^{\,2}(\vec{x}^{\,2})^{-4}\left(-2\omega_2\varphi_{22} - 5\varphi_2 + \frac{1}{4\vec{b}^{\,2}}\varphi^2\right)\right] = 0, \tag{30}$$

т.е., как и в предыдущем случае, анзац (29) редуцирует уравнение (1) к системе двух уравнений

$$\varphi_{11} = 0, \quad 2\omega_2\varphi_{22} + 5\varphi_2 = \frac{1}{4\vec{b}^{\,2}}\varphi^2. \tag{31}$$

Частным решением уравнений (31) является функция $\varphi = -4\vec{b}^{\,2}\omega_2^{-1}$. Тогда

$$u = \frac{4}{\vec{x}^{\,2} - (\vec{\alpha}\vec{x})^2} \quad (\vec{\alpha} = \mathrm{const}, \ \vec{\alpha}^{\,2} = 1) \tag{32}$$

— решение уравнения (1) при $n = 6$.

1. Olver P.J., Rosenau Ph., The construction of special solutions to partial differential equation, *Rhys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
2. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dodrecht, Reidel, 1987, 214 p.
3. Fushchych W.I, Tsifra I.M., On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys A.*, 1987, **20**, № 2, L45–L47.
4. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И., Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности, *Докл. АН УССР, Сер. А.*, 1988, № 9, 17–20.
6. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
7. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
8. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity solutions of the Boussinesq equation, Preprint, 1988.