Пуанкаре-інваріантні рівняння третього та четвертого порядків у механіці Остроградського

В.І. ФУЩИЧ, І.В. РЕВЕНКО

A class of the nonlinear Poincaré-invariant ordinary differential equations is obtained. The ordinary differential equation admitting the extended Poincaré group is integrated in the closed form.

Варіаційний принцип на випадок, коли лагранжіан залежить від вищих похідних, узагальнив М. Остроградський [1]. У механіці Остроградського, на відміну від механіки Ньютона–Лагранжа, природно виникають рівняння високого порядку. Для цих рівнянь повинен виконуватись принцип відносності. Тобто, рівняння в механіці Остроградського повинні бути інваріантними або відносно перетворень Галілея, або відносно перетворень Лоренца [2].

Нижче описані звичайні диференціальні рівняння третього та четвертого порядків, які є інваріантними відносно груп Пуанкаре та конформної групи. Зображення відповідної конформної алгебри задамо операторами

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad I_{01} = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, \quad D = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1}$$

$$K_0 = \frac{1}{2}\left(x^2+t^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + xt\frac{\partial}{\partial x}, \quad K_1 = \frac{1}{2}\left(x^2+t^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + xt\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2}$$

Оператори $\langle P_0, P_1, I_{01}\rangle$ утворюють алгебру Пуанкаре $AP(1,1)$. Оператори $\langle P_0, P_1, I_{01}, D\rangle$ — узагальнену алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,1)$.

Рівняння третього порядку. Розглянемо рівняння

$$\dddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \tag{3}$$

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. *Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри $AC(1,1)$ з базисними елементами (1), (2) лише у тому випадку, коли*

$$\dddot{x} = -3\frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$ лише тоді, коли*

$$\dddot{x} = -3\frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2} + \left(1-\dot{x}^2\right)^2\varphi\left(\frac{\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}}\right), \tag{5}$$

де φ — достатньо гладка функція своїх аргументів.

Доповіді АН УРСР, Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1989, № 11, 25–28.

Теорема 3. *Рівняння (3) інваріантне відносно узагальненої алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,1)$ тоді, якщо*

$$\dddot{x} = -3\frac{\dot{x}\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2} + \frac{\lambda\ddot{x}^2}{1-\dot{x}^2}, \tag{6}$$

λ — довільна стала.

Серед знайдених рівнянь слід виділити рівняння (6). Симетрійні властивості цього рівняння не вичерпуються лише точковою симетрією. Рівняння (6) має достатньо широку контактну симетрію, а також симетрію Лі–Беклунда.

Теорема 4. *Алгеброю інваріантності рівняння (6) в класі операторів*

$$X = \xi(t,x,\dot{x})\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,x,\dot{x})\frac{\partial}{\partial x}$$

є алгебра

$$AP(1,1) + Q_\lambda \quad \textit{при} \quad \lambda \neq 0,$$
$$AC(1,1) + S_a \quad \textit{при} \quad \lambda = 0,$$

де оператори Q_λ, S_a задаются формулами

1) $\lambda \neq -1,\ 0,\ 1$

$$Q_\lambda = \frac{\dot{x}+\lambda}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}}\left(\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1+\lambda\dot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}}\left(\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2}\frac{\partial}{\partial x},$$

2) $\lambda = 1$

$$Q_1 = \left(\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}} + \ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right|\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(\ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right| - \frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)\frac{\partial}{\partial x},$$

3) $\lambda = -1$

$$Q_{-1} = \left(-\frac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}} + \ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right|\right)\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right| - \frac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}}\right)\frac{\partial}{\partial x},$$

4) $\lambda = 0$

$$S_1 = \left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t},$$
$$S_2 = x\dot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t} + x\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$S_3 = t\dot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t} + t\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$S_4 = \left(x^2-t^2\right)\dot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial t} + \left(x^2-t^2\right)\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Така широка симетрія рівняння (6) дає можливість проінтегрувати його у квадратурах. Інтеграли руху рівняння (6) мають вигляд

$$C_1 = \frac{\ddot{x}}{(1-\dot{x}^2)^{3/2}}\left(\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2},$$

$$C_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{C_1}\dfrac{\dot{x}+\lambda}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}(1-\lambda^2)}\left(\dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2} - t, & \lambda \neq 1,\,-1, \\ -\dfrac{1}{4C_1}\left(\dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}} + \ln\left|\dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right|\right) - t, & \lambda = 1, \\ \dfrac{1}{4C_1}\left(\dfrac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}} + \ln\left|\dfrac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}}\right|\right) - t, & \lambda = -1, \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} \dfrac{1}{C_1}\dfrac{\lambda\dot{x}+1}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}(1-\lambda^2)}\left(\dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2} - x, & \lambda \neq 1,\,-1, \\ -\dfrac{1}{4C_1}\left(\ln\left|\dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}} - \dfrac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right|\right) - x, & \lambda = 1, \\ \dfrac{1}{4C_1}\left(\dfrac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}} - \ln\left|\dfrac{1+\dot{x}}{1-\dot{x}}\right|\right) - x, & \lambda = -1. \end{cases}$$

Знання інтегралів руху рівняння (6) дає можливість побудувати загальний розв'язок рівняння (6) у неявному вигляді

$$\begin{aligned} &\left[(x+C_3)^2-(t+C_2)^2\right]C_1^2(1-\lambda^2) = \left[\frac{(t-x+C_2-C_3)(\lambda+1)}{(t+x+C_2+C_3)(\lambda-1)}\right]^{\lambda}, \ \lambda \neq 1,-1, \\ &2C_1(x-t+C_3-C_2) = \exp\{-2C_1(x+t+C_2+C_3)\}, \quad \lambda = 1, \\ &2C_1(x+t+C_2+C_3) = \exp\{2C_1(t-x+C_2-C_3)\}, \quad \lambda = -1. \end{aligned}$$

Інтегровність у квадратурах рівняння (6) дозволяє побудувати загальний вигляд операторів Лі–Беклунда, які допускаються рівнянням (6).

Теорема 5. *Рівняння (6) у класі операторів*

$$X = \eta(t,x,\dot{x},\ddot{x})\frac{\partial}{\partial x}$$

має нескінченну алгебру інваріантності, елементи якої завдаються формулами

$$X = \left(\dot{x}\varphi^1 + \varphi^2 + \left(1-\dot{x}^2\right)^{1/2}\left(\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right)^{\lambda/2}\varphi^3\right)\frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda \neq 1,-1,$$

$$X = \left(\dot{x}\psi^1 + \psi^2 + (1-\dot{x})\left(\ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right| - 1\right)\psi^3\right)\frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda = 1,$$

$$X = \left(\dot{x}\chi^1 + \chi^2 + (1+\dot{x})\left(\ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right| - 1\right)\chi^3\right)\frac{\partial}{\partial x}, \quad \lambda = -1,$$

де φ^i, ψ^i, χ^i — довільні функції від інтегралів руху рівняння (6) при $\lambda \neq 1,-1$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ відповідно.

Рівняння четвертого порядку. Тут описані рівняння

$$\ddot{\ddot{x}} = f(t,x,\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}) \tag{7}$$

інваріантні відносно алгебри $A\tilde{P}(1,1)$. Із знайденого класу рівнянь виділені рівняння, що припускають лагранжеве формулювання.

Теорема 6. *Для того щоб рівняння (7) було інваріантним відносно алгебри $A\tilde{P}(1,1)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\dddot{x} = -\frac{10\dot{x}\ddot{x}\dddot{x}}{1-\dot{x}^2} - \frac{15\dot{x}^2\ddot{x}^3}{\left(1-\dot{x}^2\right)^2} + \frac{\ddot{x}^3}{\left(1-\dot{x}^2\right)^2}\varphi\left(\frac{\dddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x}\right), \tag{8}$$

де φ — довільна достатньо гладка функція.

Теорема 7. *Рівняння (8) допускає лагранжеве формулювання лише в тому разі, коли*

$$\varphi\left(\frac{\dddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x}\right) = a\left(\frac{\dddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x}\right)^2 + b\left(\frac{\dddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)}{\ddot{x}^2} + 3\dot{x}\right) + c,$$

де a, b, c — сталі, які задовольняють співвідношення $a \neq 2$, $b = 0$, $c = \frac{5-3a}{a-2}$, $a = 2$, $b = \pm 2$. Відповідні лагранжіани мають вигляд

$$\begin{aligned}
&L(\dot{x},\ddot{x}) = K^1\left(1-\dot{x}^2\right)^{(3a-5)/2}\ddot{x}^{2-a}, \quad a \neq 1, 2,\\
&L(\dot{x},\ddot{x}) = K^1\left(1-\dot{x}^2\right)^{-1}\ddot{x}(\ln|\ddot{x}|-1), \quad a = 1,\\
&L(\dot{x},\ddot{x}) = -K^1(1+\dot{x})\ln|\ddot{x}| + \frac{K^1(C-3)}{4}\left\{\dot{x}\ln\left|\frac{1-\dot{x}}{1+\dot{x}}\right| - 2\right\} -\\
&\qquad - 6K^1\ln|1\pm\dot{x}| - 3(1\pm\dot{x})(\ln|1\pm\dot{x}|-1)K^1, \quad a = 2,
\end{aligned}$$

C, K^1 — довільні сталі.

1. Остроградский М. В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрическим задачам, Полн. собр. соч., Киев, Изд-во АН УССР, 1961, Т.2, 359 с.
2. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., Редченко Г.А,. Инвариантные системы уравнений в обобщенной механике, *Укр. мат. журн.*, 1980, **32**, № 4, 569–576.