Про точні розв'язки рівнянь Лоренца–Максвелла

В.І. ФУЩИЧ, І.В. РЕВЕНКО

New exact solutions for the systems of the classical electrodynamics equations are obtained.

Рух класичної безспінової частини в електромагнітному колі описується системою звичайних диференціальних рівнянь (Лоренца) та системою диференціальних рівнянь (Максвелла) в частинних похідних вигляду [1]

$$mu_\mu = eF_{\mu\nu}u^\nu, \quad u_\mu \equiv \dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \tag{1}$$

$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{A_\mu}{\partial x^\nu}$ — тензор електромагнітного поля,

$$\partial_\nu\partial^\nu A_\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A_\nu) = j_\mu, \quad j_\mu = eu_\mu, \tag{2}$$

$$u_\mu u^\mu = 1, \tag{3}$$

τ — власний час, A_μ — потенціал електромагнітного поля. Деякі точні розв'язки системи (1), (2) знайдено в [2].

В даній роботі, використовуючи симетрійні властивості системи (1), (2), отримано нові класи точних розв'язків системи Лоренца–Максвелла.

1. Задамо електромагнітний потенціал наступними формулами

$$\begin{aligned} &A_0 = \rho(\omega)\theta + \sigma(\omega)\theta^{-1}, \quad A_1 = A_1(\omega), \quad A_2 = A_2(\omega), \\ &A_3 = \rho(\omega)\theta - \sigma(\omega)\theta^{-1}, \quad \theta = x_0 + x_3, \quad \omega = x_1 - \alpha\ln|\theta|, \end{aligned} \tag{4}$$

де ρ, σ, A_1, A_2 — довільні досить гладкі функції, залежні лише від однієї змінної ω. Лагранжіан L рівняння (1)

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu + e\dot{x}^\mu A_\mu \tag{5}$$

для поля (4) інваріантний відносно тривимірної алгебри Лі з базисними елементами

$$\langle x_0\partial_3 + x_3\partial_0 + \alpha\partial_1, \partial_0 - \partial_3, \partial_2\rangle. \tag{6}$$

З теореми Нетер випливає, що інтегралами руху рівняння (1) для поля (4) є функції

$$\begin{aligned} &mu_3 + eA_3 + mu_0 + eA_0 = C_1, \quad -mu_2 - eA_2 = C_2, \\ &x_0(-mu_3 - eA_3) + x_3(mu_0 + A_0) + \alpha(-mu_1 - eA_1) = C_3, \end{aligned} \tag{7}$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні постійні.

Доповіді АН УРСР, Сер. А, Фіз.-мат. та техн. науки, 1989, № 6, 27–31.

Рівняння (2) для поля (4) мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&eu_0 = -\rho''\theta + \theta^{-1}\{-\sigma'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'' + A_1'')\}, \quad eu_1 = 2(\rho' - \alpha\rho''),\\
&eu_2 = -A_2'', \quad eu_3 = -\rho''\theta - \theta^{-1}\{-\sigma'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'' + A_1'')\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Використовуючи інтеграли руху (7), система (8) перепишеться в наступній формі:

$$
\begin{aligned}
&A_2''\frac{m}{e} - eA_2 = C_2, \quad \rho''\frac{m}{e} - e\rho = 0, \quad C_1 = 0,\\
&(\alpha A_1 - \sigma)''\frac{m}{e} - e(\alpha A_1 - \sigma) = C_3.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що розв'язками системи (9) є функції

$$
\begin{aligned}
&\alpha A_1 - \sigma = a_0 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\} + b_0 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\} - \frac{C_3}{e},\\
&\rho = a_1 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\} + b_1 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\},\\
&A_2 = a_2 \exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\} + b_2 \exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\,\omega\right\} - \frac{C_2}{e}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Оскільки вектор u_μ задовольняє співвідношення (3), то на функції ρ, σ, A_1, A_2 необхідно накласти додатково умову

$$
4\rho''(\sigma'' - \alpha A_1'') + 4\rho''^2\alpha^2 - 4\rho'^2 - A_2''^2 = e^2. \tag{11}
$$

Підставивши вираз (10) в (11), одержимо співвідношення на постійні a_i

$$
\begin{aligned}
&4a_1a_0 + 4(\alpha^2 - m)a_1^2 - a_2^2 = 0,\\
&4b_1b_0 + 4(\alpha^2 - m)b_1^2 - b_2^2 = 0,\\
&4a_1b_0 + 4b_1a_0 + 8a_1b_1(\alpha^2 + m) - 2b_2a_2 = \frac{m^2}{e^2}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Для побудови розв'язків рівняння (1), (4) робимо заміну змінних

$$
y_0 = x_0 + x_3, \quad y_1 = x_1 - \alpha\ln|x_0 + x_3|, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_0 - x_3. \tag{13}
$$

Тоді рівняння руху частинки має вигляд

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_0}{d\tau} = u_0 + u_3 = -\frac{2\rho''y_0}{e}, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{2\rho'}{e}, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = u_2 = -\frac{A_2''}{e},\\
&\frac{dy_3}{d\tau} = \frac{2}{ey_0}\{-\sigma'' + \alpha A_1'' + \alpha(2\rho' - 2\alpha\rho'')\}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Розв'язки рівнянь (14) знаходимо квадратурами

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{dy_1}{2\rho'} = \frac{\tau}{e} + C_0, \quad y_0 = \frac{C_4}{\rho'}, \quad y_3 = \frac{1}{C_4}\{-\sigma' + \alpha A_1' + \alpha(2\rho - 2\alpha\rho')\} + C_5,\\
&y_2 = -\int\frac{A_2''dy_1}{2\rho'} + C_6,
\end{aligned} \tag{15}
$$

де C_0, C_4, C_5, C_6 — постійні інтегрування.

Таким чином, точні розв'язки системи рівнянь (1), (2) задаються формулами (4), (10), (12), (15).

2. Для побудови другого класу точних розв'язків рівнянь (1), (2) задамо електромагнітний потенціал наступними формулами:

$$\begin{aligned}
&A_0 = \sigma(\omega)\theta + \theta^{-1}\{\psi(\omega)\theta_1 + \sigma(\omega)\theta_1^2 + \varphi(\omega)\}, \quad A_1 = 2\sigma(\omega)\theta_1 + \psi(\omega),\\
&A_2 = A_2(\omega), \quad A_3 = \sigma(\omega)\theta - \theta^{-1}\{\psi(\omega)\theta_1 + \sigma(\omega)\theta_1^2 + \varphi(\omega)\},\\
&\theta = x_0 + x_3, \quad \theta_1 = x_1 - \beta\ln|\theta|, \quad \omega = x_2 - \alpha\ln|\theta|,
\end{aligned} \tag{16}$$

σ, ψ, φ, A_2 — довільні функції від ω.

При такому виборі електромагнітного потенціалу лагранжіан (5) інваріантний відносно алгебри

$$\langle(x_0+x_3)\partial_1 + x_1(\partial_0-\partial_3), x_0\partial_3 + x_3\partial_0 + \beta\partial_1 + \alpha\partial_2, \partial_0-\partial_3\rangle,$$

і тому рівняння (1) мають три інтеграли руху

$$\begin{aligned}
&(x_0+x_3)(-mu_1 - eA_1) + x_1(mu_0 + eA_0 + mu_3 + eA_3) = C_1,\\
&mu_0 + eA_0 + mu_3 + eA_3 = C_3,\\
&x_0(-mu_3 - eA_3) + x_3(mu_0 + eA_0) + \beta(-mu_1 - eA_1) + \alpha(-mu_2 - eA_2) = C_2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Підставляючи вирази (16) у рівняння (2), знаходимо вектор 4-швидкості u_i

$$\begin{aligned}
&eu_0 = -\sigma''\theta + \theta^{-1}\{-\psi''\theta_1 + [-\varphi'' - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')] - \theta_1^2\sigma''\},\\
&eu_1 = -2\sigma''\theta_1 - \psi'', \quad eu_2 = 4\sigma' - 2\alpha\sigma'',\\
&eu_1 = -\sigma''\theta - \theta^{-1}\{-\psi''\theta_1 + [-\varphi'' - 2\sigma + \alpha(A_2'' + 4\sigma' - 2\alpha\sigma'')] - \theta_1^2\sigma''\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Співвідношення нормування 4-швидкості u_μ (3) накладає на функції σ, ψ, φ, A_2 умову

$$4\sigma''(\varphi'' - \alpha A_2'') + 8\sigma''\sigma + 8\alpha^2\sigma''^2 - \psi''^2 - 16\sigma'^2 = e^2. \tag{19}$$

Для того, щоб рівняння (17) та (18) були сумісні, необхідно і достатньо, щоб функції σ, ψ, φ, A_2 задовольняли рівняння

$$\begin{aligned}
&\sigma'' - \frac{e^2}{m}\sigma = 0, \quad \psi'' - \frac{e^2}{m}\psi = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0,\\
&(\varphi - \alpha A_2)'' - \frac{e^2}{m}(\varphi - \alpha A_2) = C_3\frac{e}{m}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Загальними розв'язками рівнянь (20) є функції

$$\begin{aligned}
&\sigma = a_0\exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_0\exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\},\\
&\psi = a_1\exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_1\exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\},\\
&\varphi - \alpha A_2 = a_2\exp\left\{\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} + b_2\exp\left\{-\frac{e}{\sqrt{m}}\omega\right\} - \frac{C_3}{e},
\end{aligned} \tag{21}$$

де a_i, b_i — довільні постійні.

Для того, щоб виконувалось рівняння (19), постійні a_i, b_i повинні задовольняти умови

$$\begin{gathered} 4\left(a_0a_2+2a_0^2\left(\alpha^2-\frac{m}{e^2}\right)\right)-a_1^2=0, \quad 4\left(b_0b_2+2b_0^2\left(\alpha^2-\frac{m}{e^2}\right)\right)-b_1^2=0, \\ 4\frac{e^2}{m^2}(a_0b_2+b_0a_2)+16a_0b_0\left(\frac{3}{m}+\frac{e^2\alpha^2}{m^2}\right)-2\frac{e^2}{m^2}a_1b_1=1. \end{gathered} \tag{22}$$

В криволінійній системі координат

$$y_0=x_0+x_3, \quad y_1=\frac{x_1}{x_0+x_3}, \quad y_2=x_2-\alpha\ln|x_0+x_3|, \quad y_3=x_0-x_3$$

рівняння руху частини, враховуючи формулу (18), набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dy_0}{d\tau}=-\frac{2\sigma''y_0}{e}, \quad \frac{dy_1}{d\tau}=\frac{2\sigma''\beta\ln|y_0|-\psi''}{ey_0}, \quad \frac{dy_2}{d\tau}=\frac{4\sigma'}{e}, \\ &\frac{dy_3}{d\tau}=\frac{2}{y_0}\{-\psi''[y_1y_0-\beta\ln|y_0|]+ \\ &\qquad +(-\varphi-2\sigma+\alpha(A_2''+4\sigma'-2\alpha\sigma''))-(y_1y_0-\beta\ln|y_0|)^2\sigma''\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Розв'язки рівнянь (22) знаходимо у квадратурах

$$\begin{aligned} &\int\frac{dy_2}{d\sigma'}=\frac{\tau}{e}+C_0, \quad y_0=C_4(\sigma')^{-1/2}, \\ &y_1=\int\frac{\left\{2\sigma''\beta\ln\left[C_4(\sigma')^{-1/2}\right]-\psi''\right\}dy_2}{4C_4(\sigma')^{-1/2}}+C_5\equiv K(y_2)+C_5, \\ &y_3=\int\Big\{-\psi''\left[(K+C_5)C_4(\sigma')^{-1/2}-\beta\ln\left|C_4(\sigma')^{-1/2}\right|\right]+ \\ &\quad+(-\varphi-2\sigma+\alpha(A_2''+4\sigma'-2\alpha\sigma''))- \\ &\quad-\sigma''\left[(K+C_5)C_4(\sigma')^{-1/2}-\beta\ln\left|C_4(\sigma')^{-1/2}\right|\right]^2\Big\}\frac{dy_2}{2C_4(\sigma')^{-1/2}}+C_6. \end{aligned} \tag{24}$$

Таким чином, точні розв'язки системи рівнянь задаються формулами (16), (21), (22), (24).

1. Меллер К., Теория относительности, М., Атомиздат, 1975, 400 с.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982, 144 с.