О новых системах и законах сохранения для упругих волн

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

1. Максимальной локальной группой инвариантности основного уравнения линейной теории упругости

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta \boldsymbol{U} + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} \tag{1}$$

является восьмипараметрическая группа Ли [1]. Базисные элементы алгебры Ли этой группы имеют вид

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = \nabla_a, \quad J_a = \varepsilon_{abc}\left(-x_b\nabla_c + U^b\frac{\partial}{\partial U^c}\right), \quad D = x_0P_0 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\nabla}. \tag{2}$$

В уравнении (1) $\boldsymbol{U} = (U^1, U^2, U^3)$ — вектор смещения, $\rho_0 > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$ — коэффициенты Ламе. Запишем это уравнение в матричной форме

$$L\boldsymbol{U} \equiv Z^{ab}\left(\delta_{ab}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0}\delta_{ab}\Delta - \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\nabla_a\nabla_b\right)\boldsymbol{U} = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{U}$ — столбец (U^1, U^2, U^3), Z^{ab} — матрицы размерности 3×3 с матричными элементами $(Z^{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}$.

Естественно поставить вопрос: обладает ли уравнение (1) скрытой (нелиевской) симметрией, которая не может быть найдена в классическом подходе Ли? В настоящей статье с использованием методов [2–4] дается положительный ответ на этот вопрос. А именно, найден полный набор операторов симметрии уравнения (1) в классе дифференциальных операторов второго порядка

$$Q = D^a_{(1)}\nabla_a\frac{\partial}{\partial t} + C^{ab}_{(1)}\nabla_a\nabla_b + A_{(1)}\frac{\partial}{\partial t} + B^a_{(1)}\nabla_a + F_{(1)}, \tag{4}$$

который значительно шире восьмимерной алгебры Ли (2). По найденным операторам симметрии построены новые законы сохранения для уравнения (1).

Определение. *Линейный дифференциальный оператор (4) является оператором симметрии уравнения (3), если*

$$[L, Q] = \left[D^a_{(2)}\nabla_a\frac{\partial}{\partial t} + C^{ab}_{(2)}\nabla_a\nabla_b + A_{(2)}\frac{\partial}{\partial t} + B^a_{(2)}\nabla_a + F_{(2)}\right]L, \tag{5}$$

где символ [,] *обозначает коммутатор,* $D^a_{(i)}$, $C^{ab}_{(i)}$, $A_{(i)}$, $B^a_{(i)}$ *и* $F_{(i)}$ *— матрицы размерности* 3×3*, зависящие от* t *и* $\boldsymbol{x}$*,* $i = 1, 2$.

Полное описание операторов симметрии уравнения (3) в классе (4) дает следующее утверждение.

Доклады Академии наук СССР, 1989, **304**, № 2, 333–335.

Теорема. *Для уравнения (3) существует 61 линейно независимый оператор симметрии в классе дифференциальных операторов второго порядка. В их число входят генераторы (2) и их произведения, а также следующие операторы*

$$
\begin{aligned}
&Q_0 = 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}-1)-\boldsymbol{J}^2,\\
&Q_a = \varepsilon_{abc}\left\{\left[S_b\nabla_c, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{J}-\frac{1}{2}\right]_+ - \frac{1}{2}[J_b,\nabla_c]_+\right\},\\
&Q_{ab} = [\varepsilon_{adc}S_d\nabla_c, \varepsilon_{bkl}S_k\nabla_l]_+ - \frac{1}{3}\delta_{ab}(5\Delta - 2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}^2),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{S}$ *— операторы (2), записанные в матричной форме,* $\boldsymbol{S}$ *— матрицы с матричными элементами* $(S_a)_{bc} = \varepsilon_{abc}$, $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $[A,B]_+ = AB+BA$.

Доказательство теоремы сводится к решению довольно громоздкой системы определяющих уравнений для матриц $D^a_{(i)}$, $C^{ab}_{(i)}$, $A_{(i)}$, $F_{(i)}$, $B^a_{(i)}$, следующей из (5) после приравнивания коэффициентов при линейно независимых матрицах и дифференциальных операторах.

Замечание 1. Вычисления в левой и правой частях уравнения (5) удобно проводить с использованием базиса в пространстве матриц размерности 3×3, образуемого матрицами Z^{ab} и $S^{ab} = \varepsilon^{abc}S_c$. Эти матрицы удовлетворяют следующим коммутационным антикоммутационным соотношениям:

$$[Z^{ab}, Z^{cd}] = \delta_{bc}S^{ad} + \delta_{ad}S^{bc} + \delta_{ac}S^{bd} + \delta_{bd}S^{ac}, \tag{7}$$

$$[S^{ab}, S^{cd}] = \delta_{bc}S^{ad} + \delta_{ad}S^{bc} - \delta_{ac}S^{bd} - \delta_{bd}S^{ac}, \tag{8}$$

$$[S^{ab}, Z^{cd}] = \delta_{bc}Z^{ad} + \delta_{ad}Z^{bc} - \delta_{ac}Z^{bd} - \delta_{bd}Z^{ac}, \tag{9}$$

$$[Z^{ab}, Z^{cd}]_+ = \delta_{bc}Z^{ad} + \delta_{ad}Z^{bc} + \delta_{ac}Z^{bd} + \delta_{bd}Z^{ac}, \tag{10}$$

$$[S^{ab}, S^{cd}]_+ = \delta_{bc}Z^{ad} + \delta_{ad}Z^{bc} - \delta_{ac}Z^{bd} - \delta_{bd}Z^{ac}, \tag{11}$$

$$[Z^{ab}, S^{cd}]_+ = \delta_{bc}S^{ad} - \delta_{ad}S^{bc} + \delta_{ac}S^{bd} - \delta_{bd}S^{ac}, \tag{12}$$

и образуют базис как алгебры (см. (7)–(9)), так и супералгебры (см. (8)–(10) или (10)–(12)) Ли.

Замечание 2. Формулы (6) задают 9 линейно независимых операторов, поскольку $\sum\limits_a Q_{aa} = 0$. Эти операторы не принадлежат обертывающей алгебре, порождаемой генераторами (2).

Замечание 3. Операторы (6) не образуют алгебры Ли. Однако операторы симметрии

$$H_1 = Q_A,\quad H_2 = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{P},\quad H_3 = H_1H_2,\quad H_{3+a} = H_a^2,$$

где $a = 1,2,3$, Q_A — любой из операторов (6) $(A = 0,1,\ldots,12,13,\ldots)$ образуют базис супералгебры Ли, удовлетворяя соотношениям

$$[H_a, H_b]_+ = 2\delta_{ab}H_{3+b},\quad [H_a, H_{3+b}] = [H_{3+a}, H_{3+b}] = 0. \tag{13}$$

2. Операторы симметрии (6) используем для построения новых законов сохранения для уравнения (1). Поскольку эти операторы являются дифференциальными операторами второго порядка, соответствующие токи зависят от вторых производных.

Выберем сохраняющиеся токи в виде

$$j_0 = (A\dot{\boldsymbol{U}})^+ B\boldsymbol{U} + (B\boldsymbol{U})^+ A\dot{\boldsymbol{U}}, \quad j_a = (AV^a\boldsymbol{U})^+ B\boldsymbol{U} + (B\boldsymbol{U})^+ AV^a\boldsymbol{U}, \tag{14}$$

где B — любой из операторов (5), а A — любой из генераторов (8),

$$V^a = Z^{kl}\left(\frac{\mu}{\rho_0}\nabla_a\delta_{kl} + \frac{\lambda+\mu}{2\rho_0}(\delta_{ka}\nabla_l - \delta_{al}\nabla_k)\right), \quad \dot{\boldsymbol{U}} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}.$$

Так как и A, и B удовлетворяют условиям (5) и, кроме того, в силу уравнения (3) $\nabla_a V^a \boldsymbol{U} = \partial^2\boldsymbol{U}/\partial t^2$, билинейные комбинации (14) удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu = 0, \quad x_0 = t, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{15}$$

Следовательно, интегральные величины вида

$$I = \int d^3x\, j_0 \tag{16}$$

сохраняются во времени. В частности, сохраняются приведенные ниже тензор I^{ab} и вектор I^a:

$$I^{ab} = \int d^3x\,\lambda^{ab}, \quad I^a = \int d^3x\,\lambda^{ab}x_b,$$

$$\lambda^{ab} = (\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{U}})^a(\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{U}})^b + \frac{\mu}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x^c}(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})^a\right]\frac{\partial}{\partial x^c}(\operatorname{rot}\boldsymbol{U})^b.$$

Не составляет труда вычислить в явном виде и другие сохраняющиеся величины, задаваемые формулами (14), (16).

Операторы симметрии (6) могут быть использованы для построения новых систем координат, в которых разделяются переменные уравнения (1), а также для отыскания точных и .приближенных решений этого уравнения.

Нелиевская симметрия уравнения (1) обнаружена в [4]. Явный вид интегро-дифференциальных операторов симметрии для этого уравнения приведен в [5]. Симметрия стационарного уравнения теории упругости в классе дифференциальных операторов первого порядка с матричными коэффициентами подробно изучена в [6, 7].

1. Чиркунов Ю.А., в кн. Динамика сплошной среды, 1973, вып. 14, 128–130.
2. Фущич В.И., *ДАН*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
4. Фущич В.И., в кн. Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–43.
5. Фущич В.И., Наконечный В.В., *Укр. матем. журн.*, 1980, **32**, № 2, 267–273.
6. Olver P.J., *Arch. Rat. Mech. and An.*, 1984, **85**, 131–148.
7. Olver P.J., Applications of the Lie groups to differential equations, N.Y., Springer-Verlag, 1986, 580 p.