Нелиевские симметрии и нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ, В.М. СИМУЛИК

Сформулировано и доказано обобщение теоремы Нетер о законах сохранения на случай произвольных преобразований инвариантности уравнений математической физики. Найдены новые алгебры инвариантности уравнения Дирака (128-мерная алгебра инвариантности уравнения с $m = 0$ и 44-мерная алгебра инвариантности уравнения с $m \neq 0$). Соответствующие законы сохранения вычислены по теореме Нетер и по приведенному обобщению этой теорема.

Введение

Цель настоящей работы — провести нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака, порождаемых различными (как лиевскими, так и нелиевскими) симметриями, на основе теоремы Нетер [1–5] и ее обобщения. Под нетеровским анализом мы понимаем следующее. Если некоторое уравнение математической физики получено как следствие вариационного принципа, а именно, если найдена функция Лагранжа такая, что для нее уравнения Эйлера–Лагранжа совпадают с данным уравнением (или эквивалентным ему), то законы сохранения вычисляются по известной формуле, задаваемой теоремой Нетер.

Нетеровский анализ законов сохранения применялся до сих пор только в случае лиевских симметрии (т.е. преобразований инвариантности уравнений математической физики, задаваемых лиевскими операторами, которые порождают локальные преобразования).

Нетеровский анализ законов сохранения для уравнения Дирака — следствий локальных лиевских алгебр инвариантности, задаваемых генераторами из класса операторов Ли [6, 7], — выполнен в [4] . Сохраняющиеся величины — следствия нелиевских [8–11] алгебр инвариантности уравнения Дирака — найдены в [11] без использования теоремы Нетер, поскольку соответствующее обобщение теоремы Нетер отсутствовало среди известных обобщений этой теоремы [2–5]. Также не по теореме Нетер находились и бесконечные серии законов сохранения zilch-типа [12, 13] для уравнения Дирака, поэтому нетеровская связь этих законов с симметрийными свойствами уравнения Дирака не исследована и представляет интерес. Только сравнительно недавно [14] теорема Нетер обобщена на случай преобразований из групп Ли–Беклунда, а в [15, 16] теорема Нетер обобщена для произвольных нелиевских преобразований инвариантности, которые включают преобразования Ли–Беклунда в качестве частного случая. Многочисленные примеры нелиевских преобразований инвариантности уравнений Дирака и Максвелла найдены в [8–11].

Даже для такого хорошо известного объекта, как спинорное поле, существует много методик нахождения сохраняющихся величин, соответствующих той или иной симметрии уравнения Дирака, например, [4, 12, 13]. Иначе говоря, одному

Препринт 89.49, Киев, Институт математики АН УССР, 1989, 39 с.

и тому же преобразованию инвариантности уравнения Дирака по разным методикам соответствуют различные сохраняющиеся величины. И поэтому из различных соответствий “оператор симметрии — закон сохранения” необходимо выбрать физически адекватное соответствие для всего множества преобразований инвариантности уравнения Дирака, соответствующих как лиевским, так и нелиевским симметриям.

Выбор физически адекватного соответствия “оператор симметрии — закон сохранения” можно осуществить с помощью теоремы Нетер в рамках лагранжева подхода (L-подхода) для спинорного поля Ψ, поскольку этот подход основан на релятивистски инвариантной форме принципа наименьшего действия, который является более общим, чем сами уравнения движения. Аргументом в пользу физической адекватности устанавливаемого таким путем соответствия “оператор симметрии — закон сохранения” является то, что по этой методике геометрическим симметриям, связанным о однородностью и изотропностью пространства–времени, соответствуют хорошо известные энергия-импульс и 4-момент количества движения. В настоящей работе на основе теоремы Натер установлено, каким симметриям уравнения Дирака соответствуют законы сохранения zilch-типа, обсуждавшиеся в [12, 13]. Для этой цели, кроме обобщения теоремы Нетер пришлось установить новые симметрийные свойства уравнения Дирака. Эти новые симметрии уравнения Дирака аналогичны найденным в [17, 18] симметрия уравнений Максвелла, которые в [17–24] были использована для нетеровского анализа электромагнитных законов сохранения. Для различных форм уравнений Максвелла была установлена 32-мерная алгебра инвариантности A_{32} в классе простейших нелиевских операторов — классе L_1 матрично-дифференциальных операторов первого порядка по переменной x, а также и соответствующая ей группа инвариантности. Именно такому классу операторов, а не более узкому классу — классу операторов Ли, принадлежат сами операторы rot, div и $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ уравнений Максвелла и Дирака.

Нахождений простейшей нелиевской алгебры инвариантности A_{32} основывалось на том факте, что генератор преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича [25–27] (HLR) для уравнений Максвелла коммутирует с генераторами других лиевских симметрии этих уравнений, что дает возможность значительно расширить алгебру инвариантности в классе L_1 путем привлечения композиции оператора HLR и операторов других лиевских симметрии. Эта алгебра инвариантности построена в [17, 18], а позже в работе [28].

В этом отношении уравнение Дирака обладает значительно более богатой симметрией, чем уравнение Максвелла, поскольку для него существует 8 операторов, подобных оператору HLR, в случае $m = 0$ и 4 оператора в случае $m \neq 0$. Поэтому представляет интерес отыскание соответствующей алгебры инвариантности для уравнения Дирака.

Настоящая работа посвящена нахождению алгебр и соответствующих групп инвариантности уравнения Дирака в классе L_1 и анализу соответствующих сохраняющихся величин на основе теоремы Нетер и ее обобщения. Установлена нетеровская связь дополнительных законов сохранения zilch-типа с симметрия уравнения Дирака, задаваемыми операторами из класса L_1.

1. Обобщение теоремы Нетер на нелиевские симметрии

1.1. Используемые обозначения, понятия и исходные предположения. Обозначим через R_x $(r+1)$-мерное многообразие:

$$R_x = \{x\}, \quad x = (x^0, x^1, \ldots, x^r) = (x^\mu)_{\mu=0}^r \equiv (x^\mu), \quad \mu = \overline{0,r} \equiv 0, 1, \ldots, r, \quad (1)$$

через C^m — m-мерное комплексное многообразие (m-мерная комплексная плоскость); через $\Psi = \Psi(\cdot)$ — m-компонентную комплекснозначную функцию над R_x:

$$\Psi = (\Psi^1, \ldots, \Psi^m) = (\Psi^s)_{s=1}^m \equiv (\Psi^s): \quad R_x \to C^m. \quad (2)$$

Изложение иллюстрируем на примере (произвольной) системы

$$F^s(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \partial_\nu \Psi(x)) = 0, \quad s = \overline{1,m} \equiv 1, 2, \ldots, m, \quad (3)$$

m уравнений в частных производных для $\Psi = \Psi(\cdot)$ не выше второго порядка, которую записываем также в матричной форме

$$F(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x), \partial_\mu \partial_\nu \Psi(x)) = 0, \quad F = (F^s)_{s=1}^m \equiv (F^s), \quad (3а)$$

где

$$F: \quad R_x \times C^{m(r+2+(r+1)^2)} \to C^m. \quad (4)$$

Систему (3) иногда кратко называем уравнением (3а) = (3).

Пусть для уравнения (3) построен L-подход, т.е. найдена такая функция

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \Psi, \Psi_{,\mu}), \quad \mathcal{L}: \ R_x \times C^{m(r+2)} \to R^1, \quad (5)$$

что множество $\Phi_0 \subset \Phi$ экстремалей действия

$$W(\Psi) \equiv \int dx \mathcal{L}_\psi(x), \quad \Psi \in \Phi, \quad \int dx \equiv \int_{R_x} dx, \quad dx \equiv dx^0 dx^1 \cdots dx^r, \quad (6)$$

где dx — мера Лебега в R_x,

$$\mathcal{L}_\Psi(x) \equiv \mathcal{L}(x, \Psi(x), \partial_\mu \Psi(x)), \quad \Psi \in \Phi, \quad x \in R_x, \quad (7)$$

совпадает с множеством Φ_0 решений уравнения (3). Иначе говоря, требуется, чтобы система уравнений (3) совпадала или была эквивалентна системе уравнений Эйлера–Лагранжа (ЭЛ)

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi^s} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s}\bigg|_{\substack{\Psi \to \Psi(x) \\ \Psi_{,\mu} \to \partial_\mu \Psi(x)}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s_{,\mu}}\bigg|_{\substack{\Psi \to \Psi(x) \\ \Psi_{,\mu} \to \partial_\mu \Psi(x)}} \right) \equiv \\ &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s}\Big| - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^s_{,\mu}}\Big| = 0, \quad s = \overline{1,m},\end{aligned} \quad (8)$$

(символ —| обозначает замену

$$C^m \ni \Psi \to \Psi(\cdot) \in \Phi, \quad C^m \ni \Psi_{,\mu} \to \partial_\mu \Psi(\cdot), \quad (9)$$

а по дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование в области его изменения).

Индекс Ψ у $\mathcal{L}_\Psi(x)$ подчеркивает тот факт, что определяемая по (7) функция $\mathcal{L}_\Psi : R_x \to R^1$ является композицией функций $\mathcal{L}$ (5) и $\Psi \in \Phi$, т.е. вид функции $\mathcal{L}_\Psi$ (7) зависит как от вида функции $\mathcal{L}$ (5), так и от вида функции $\Psi \in \Phi$. Функцию $\mathcal{L}$ (5) естественно назвать *первичной* функцией Лагранжа, а функцию $\mathcal{L}_\Psi$ (7) — *вторичной* функцией Лагранжа. Здесь достаточно, чтобы функция $\mathcal{L}$ (5) была непрерывно дифференцируема по каждому из своих аргументов в области ее определения и чтобы область Φ определения действия W (6) состояла из некоторого множества непрерывно дважды дифференцируемых функций Ψ (2).

Систему уравнений ЭЛ (8) записываем также в матричной форме

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}| - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}| = 0, \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi} \equiv \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^s}\right)_{s=1}^{m} \equiv \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi^s}\right) \tag{8a}$$

и кратко называем уравнением ЭЛ (8а) = (8). Подчеркнем еще раз, что точное совпадение уравнения ЭЛ (8) с уравнениями (3) не обязательно, требуется лишь их эквивалентность, т.е. совпадение множества решений уравнений (3) с множеством $\Phi_0 \subset \Phi$ экстремалей действия (6).

Кроме действия W (6) используем также действие

$$W(\Omega,\Psi) = \int_\Omega dx\mathcal{L}_\Psi(x) \equiv \int_\Omega dx\mathcal{L}(x,\Psi(x),\partial_\mu\Psi(x)), \quad \Omega \subset R_x, \quad \Psi \in \Phi, \tag{10}$$

где Ω — произвольное борелево множество в R_x.

Пусть в R_x заданы n-параметрические инфинитезимальные преобразования

$$x \to x' = x + \alpha^a\varphi_a(x) \equiv x + \varphi(x,\alpha) \in R_x, \quad \alpha \equiv (\alpha^a)_{a=1}^n \in R^n, \tag{11}$$

покомпонентно

$$\begin{aligned} &x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \alpha^a\varphi_a^\mu \equiv x^\mu + \varphi^\mu(x,\alpha);\\ &\varphi_a \equiv (\varphi_a^\mu)_{\mu=0}^r : \quad R_x \to R_x, \end{aligned} \tag{11a}$$

в которых $(2r+1)n$ функций φ_a^μ непрерывны, т.е. удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\varphi_a(x + \alpha^{a'}\varphi_{a'}(x)) = \varphi_a(x) + R_a(x,\alpha),\\ &\lim_{\alpha\to 0} R_a(x,\alpha) = 0, \quad x \in R_x. \end{aligned} \tag{12}$$

Для обсуждения вопроса о законах сохранения (ЗС), порождаемых различными преобразованиями инвариантности (ПИ) уравнения (3) или, что все равно, уравнения ЭЛ (8) или, наконец, множества $\Phi_0 \subset \Phi$, достаточно рассматривать инфинитезимальные преобразования в области Φ опеределения действия (10). Полезно различать три типа преобразований в Φ.

А. Преобразованиями *первого* типа называем инфинитезималльные n-параметрические преобразования

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = (1 + \alpha^a\hat{Q}_a(x))\Psi(x) \equiv F(\Psi(x),x,\alpha), \quad \Psi,\Psi' \in \Phi, \tag{13}$$

покомпонентно

$$\Psi^s(x) \to \Psi'^s(x) = \Psi^s(x) + \alpha^a\hat{Q}^s_{as'}(x)\Psi^{s'}(x) \equiv F^s(\Psi(x),x,\alpha), \tag{13a}$$

где

$$\hat{Q}_a \equiv (\hat{Q}^s_{as'}), \quad \hat{Q}_a\Psi(x) = \left(f^s_a(\Psi,x)\frac{\partial}{\partial\Psi^s}| - \varphi^\mu_a(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right]\Psi(x) \equiv$$
$$\equiv \left[f^s_a(\Psi,x)\frac{\partial\Psi}{\partial\Psi^s}\right]_{\Psi\to\Psi(x)} - \varphi^\mu_a(x)\partial_\mu\Psi(x), \tag{14}$$

а функции

$$f_a \equiv (f^s_a)^m_{s=1}: \quad C^m \times R_x \to C^m \tag{15}$$

непрерывны, т.е. удовлетворяют условиям

$$f_0(\Psi + \alpha^{a'} f_{a'}(\Psi,x), x + \alpha^{a'}\varphi_{a'}(x)) = f_a(\Psi,x) + R_a(\Psi,x,\alpha), \tag{16}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} R_a(\Psi,x,\alpha) = 0, \quad (\Psi,x) \in C^m \times R_x. \tag{16a}$$

Слагаемые в $\hat{Q}_a = \hat{Q}_{1a} - \hat{Q}_{2a}$:

$$\hat{Q}_{1a}\Psi(x) = f^s_a(\Psi,x)\frac{\partial\Psi}{\partial\Psi^s}| \equiv f^s_a(\Psi(x),x)\Psi^s(x),$$
$$Q_{2a}\Psi(x) = \varphi^\mu_a(x)\partial_\mu\Psi(x) \tag{17}$$

называем, соответственно, “спиновой”, и “орбитальной” частями преобразования (13).

Б. Прообразованиями *второго* типа называем инфинитезимальные n'-параметрические преобразования

$$\Psi(x) \to \Psi''(x) = \Psi(x) + \beta^b(\hat{\varkappa}_b\Psi)(x) \equiv \Psi(x) + (\hat{\varkappa}(\beta)\Psi)(x), \quad b = \overline{1,n'}, \tag{18}$$

задаваемые по существу произвольными линейными операторами $\hat{\varkappa}_b$, $b = \overline{1,n'}$ в Φ, не связанными с преобразованиями аргумента функции $\Psi \in \Phi$.

В. Преобразованиями *третьего* типа называем следующую специфическую композицию преобразований первого и второго типов:

$$\Psi(x) \to \Psi'''(x) = \Psi(x) + \alpha^a(\hat{\varkappa}\hat{Q}_a\Psi)(x) = \Psi(x) + (\hat{\varkappa}Q)(x), \tag{19}$$

где

$$Q(x,\alpha) \equiv \alpha^a\hat{Q}_a\Psi(x), \tag{20}$$

а $\hat{\varkappa}$ — любой из операторов $\hat{\varkappa}_b$ в (18).

Смысл преобразований (19) в Φ как специфической композиции преобразований (13) первого типа и преобразований (18) второго типа в том, что оператор $\hat{\varkappa}$ применяется не к преобразованной по закону (13) функции $\Psi' \in \Phi$, а только к “α-малой” добавке (20) к функции Ψ' в формуле (13).

Сделаем несколько разъясняющих замечаний.

Преобразования (13) первого типа задаются функциями φ_a в (11а) и f_a (15), удовлетворяющими условиям (12) и, соответственно, (16), и суть стандартные преобразования Ли в Φ. При этом “орбитальные” операторы

$$\hat{\varphi}_a(\cdot) \equiv \hat{\varphi}^\mu_a(\cdot)\partial/\partial x^\mu \tag{21}$$

— генераторы преобразований аргумента функций $\Psi \in \Phi$ — можно считать заданными на подходящей области, например, в гильбертовом пространстве $L^2(R_x) \times C^k$ с любым k, где можно корректно решать вопрос о коммутационных соотношениях для операторов φ_a (21), а также о восстановлении конечных "орбитальных" преобразований по экспоненциальному ряду

$$\hat{\Phi}(x,\alpha) = \exp(\alpha^a \hat{\varphi}_a(x)) \equiv \exp(\alpha^a \varphi_a^\mu(x)\partial_\mu). \tag{22}$$

"Спиновые операторы"

$$\hat{f}_a(\cdot,x) \equiv \hat{f}_a^s(\cdot,x)\partial/\partial\Psi^s \tag{23}$$

— генераторы преобразований значений $\Psi(x)$ функций $\Psi \in \Phi$, обычно называемых преобразованиями формы, — можно считать заданными на соответствующей области в гильбертовом пространстве $L^2(C^m) \times C^k$ с любым k, где можно корректно решать вопрос о коммутационных соотношениях для операторов f_a (23), а также о восстановлении конечных "спиновых" преобразований по экспоненциальному ряду

$$F_1(\Psi,x,\alpha) = \exp(\alpha^a f_a(\Psi,x)) \equiv \exp(\alpha^a f_a^s(\Psi,x)\partial/\partial\Psi^s). \tag{24}$$

Спиновые операторы могут параметрически зависеть от x. Если они не зависят от x, то преобразования (13) (и порождаемые ими конечные преобразования) называют *локальными*.

Если операторы (21) удовлетворяют соотношениям

$$[\hat{\varphi}_a, \hat{\varphi}_b] = C_{ab}^c \hat{\varphi}_c, \quad a,b,c = \overline{1,n}, \tag{25}$$

с некоторыми числами C_{ab}^c, то операторы $\{I, \hat{\varphi}_a\}$ — суть генераторы алгебры Ли $A(C_{ab}^c)$, определяемой структурными константами C_{ab}^c, а конечные преобразования (22) образуют соответствующую группу Ли G. Если операторы (23) удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (25), то натянутая на орты $\{I, \hat{f}_a\}$ алгебра есть представление алгебры Ли $A(C_{ab}^c)$, а конечные преобразования (24) образуют либо представление группы Ли G, либо же оба представления (22) и (24) образуют представление некоторой накрывающей группы Ли $\tilde{G}$.

Здесь мы не будем обсуждать вопросы, связанные с математически корректным определением и восстановлением конечных преобразований, порождаемых инфинитезимальными преобразованиями (13) с произвольными функциями φ_a^μ и f_a^s, поскольку формулировка и доказательство теоремы Нетер о ЗС не связана ни с конечными преобразованиями, ни с вопросом о том, порождают ли инфинитезимальные преобразования (13) какую-либо группу или даже алгебру, и какую именно. Тем более, что в простейших случаях, которыми иллюстрируется ниже данное рассмотрение, конечные преобразования практически легко восстанавливаются.

Замечания последнего абзаца относится также и к преобразованиям (18) второго и (19) третьего типов. При этом важно подчеркнуть, что в преобразованиях (18) второго типа операторы $\hat{\varkappa}$ могут вовсе не быть операторами Ли. Они могут быть преобразованиями Ли–Беклунда или более общими, например, псевдодифференциальными операторами ПИ уравнений математической физики, многочисленные примеры которых рассмотрены в работах [8–11], или даже операторами дискретных преобразований (например, C-, P-, T-операторами). В этом смысле параметризацию преобразований (18) второго типа можно рассматривать лишь как способ нумерации (индексификации) различных операторов $\hat{\varkappa}_b$ в Φ, так что термин “инфинитезимальные” в отношении преобразований (18) может оказаться весьма условным.

В отличие от этого преобразования (13) первого типа ассоциируются с теми же параметрами, что и преобразования (11) в R_x. Последние хотя бы для некоторого подмножества параметров α обычно ассоциируются с преобразованиями перехода от одних систем отсчета к другим, и тогда параметры $\alpha = (\alpha^a)$ (или хотя бы часть из них) имеют четкий физический смысл. Преобразования (11) в R_x поэтому называются *геометрическими*. Параметры $\alpha = (\alpha^a)$ преобразований (19) третьего типа не обязательно совпадают с параметрами α в (11), совпадает лишь их число; важно, однако, что при формулировке теоремы Нетер о ЗС для преобразований (19) третьего типа область Ω в действии (10) преобразуется так же, как и в случае преобразований (13) первого типа, т.е. лишь за счет геометрических преобразований (11).

В этой связи может показаться, что нет смысла различать преобразования третьего и первого типов. Однако существенное отличие преобразований (13) первого и (19) третього типов хотя бы в следующем. Даже в том случае, когда оператор $\hat{\varkappa}$ в (19) (как и операторы $\hat{Q}_a$ (14), определяющие преобразования (13)) есть операторы Ли, оператор результирующего преобразования (19) уже не есть оператор Ли [6, 7, 11]. Например, в простейщем случая, когда Φ есть пространство двухкомпонентных функций $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2)$, а

$$Q(x,\alpha) = \alpha^\mu \partial_\mu \Psi(x), \quad \hat{\varkappa} = \gamma \equiv \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{26}$$

(т.е. в (17) $f_a^s(\Psi,\alpha) = 0$, $\varphi_a^\mu(x) = -\delta_a^\mu$), для (19) получаем

$$\Psi'''(x) = \Psi(x) + \alpha^\mu \gamma \partial_\mu \Psi(x) \equiv [\Psi + \hat{Q}(\Psi, x, \alpha)\Psi]_{\Psi\to\Psi(x)}, \tag{27}$$

так что нелиевость генератора преобразований (27) очевидна:

$$\hat{Q}(\Psi, x, \alpha) = \alpha^\mu \left(\Psi^1 \frac{\partial^2}{\partial\Psi^2 \partial x^\mu} - \Psi^2 \frac{\partial^2}{\partial\Psi^1 \partial x^\mu} \right). \tag{27a}$$

В этом частном случае, когда оператор $\hat{\varkappa}$ — матричный, оператор (27a) есть оператор Ли–Беклунда. Но, конечно, для произвольного оператора $\hat{\varkappa}$ преобразования (19) выходят за клас Ли–Беклунда.

Заключительное замечание касается возможности объединить преобразования (13), (18) и (19) всех трех рассматриваемых типов единой формулой. Для этого введем многомерный параметр

$$\begin{aligned} &\xi = (\alpha, \beta, \gamma) \equiv (\xi^u), \quad \alpha = (\alpha^a), \quad \beta = (\beta^b), \quad \gamma = (\gamma^c \equiv \gamma^{ab}); \\ &u = \overline{1, (n + n' + nn')}, \quad a = \overline{1, n}, \quad b = \overline{1, n'}, \quad c = \overline{1, nn'}. \end{aligned} \tag{28}$$

Используя параметры (28), все три инфинитезимальные преобразования (13), (18) и (19) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x) \to \Psi(x, \xi) &= \Psi(x) + \xi^u (\hat{R}_u \Psi)(x) \equiv \\ &\equiv \Psi(x) + \alpha^a \hat{Q}_a \Psi(x) + \beta^b \hat{\varkappa}_b \Psi(x) + \gamma^{ab} \hat{\varkappa}_b \hat{Q}_a \Psi(x). \end{aligned} \tag{29}$$

В сущности, инфинитезимальность рассматриваемых здесь преобразований в R_x и Φ означает, что ввиду независимости параметров ξ^μ фактически рассматриваются семейства однопараметрических преобразований

$$x \to x' = x + \theta\varphi_u(x) \in R_x; \quad u = a, b, ab; \quad \varphi_b = 0, \quad \varphi_{ab} = \varphi_a; \tag{30}$$

$$\Psi(x) \to \Psi_u(x,\theta) = \Psi(x) + \theta\hat{R}_u\Psi(x), \tag{31}$$

где $\theta \equiv \xi_u = \alpha^a$ при $u = a$, $\theta = \beta^b$ при $u = b$ и $\theta = \gamma^{ab}$ при $u = ab$,

$$\hat{R}_a = \hat{Q}_a, \quad \hat{R}_b = \hat{\varkappa}_b, \quad \hat{R}_{ab} = \hat{\varkappa}_b\hat{Q}_a. \tag{31a}$$

1.2. Формулировка и доказательство обобщенной теоремы Нетер о законах сохранения.

Теорема 1. *Пусть при каждом однопараметрическом преобразовании (30) в R_x функции $\Psi \in \Phi$ преобразуются по закону (31), а действие W (10) по закону*

$$W(\Omega,\Psi) \to W_u(\Omega,\Psi,\theta) = \int_{\Omega_u} dx\mathcal{L}(x, \Psi_u(x,\theta), \partial_\mu\Psi_u(x,\theta)), \tag{32}$$

где Ω_u есть область в R_x, полученная из области $\Omega \subset R_x$ преобразованием $x \to x - \theta\varphi_u(x)$, обратным к преобразованию (30) (в линейном по параметру θ приближении). Пусть сужение $W^0 = W|\Phi_0$ действия (10) на множество $\Phi_0 \subset \Phi$ решений уравнений ЭЛ (8) инвариантно относительно каждого преобразования (32), т.е.

$$W_u(\Omega,\Psi,\theta) = W(\omega,\Psi) \quad \text{для} \quad \Psi, \Psi_u \in \Phi_0, \quad \Omega \subset R_x, \quad u = a, b, ab. \tag{33}$$

Тогда на подмножестве $\Phi_0 \subset \Phi$ имеют место следующие ЗС в дифференциальной форме

$$\partial_\mu R_u^\mu(x) = 0, \quad u = a, b, ab, \tag{34}$$

где компоненты тока $R_u = (R_u^\mu)$ в матричной записи имеют вид

$$R_u^\mu(x) \equiv \varphi_u^\mu(x)\mathcal{L}_\Psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}|\hat{R}_u\Psi(x). \tag{35}$$

Если, кроме того, компоненты (35) токов R_u равны нулю на бесконечности в $R_{\vec{x}} \subset R_x$ (где $\vec{x} \equiv (x^1, \dots, x^r) \subset x$), то следующие величины сохраняются:

$$\tilde{R}_u(t) \equiv \int d\vec{x}R_u^0(x) = \text{const}, \quad u = a, b, ab, \quad \int d\vec{x} = \int_{R_{\vec{x}}} d\vec{x}, \tag{36}$$

где $t \equiv x^0$, а $d\vec{x} \equiv dx^1 \cdots dx^n$ есть мера Лебега на подмножестве $R_{\vec{x}} \subset R_x$.

Доказательство. Прежде всего требуется вычислить правую часть (32) инфинитезимально, т.е. в линейном по параметру θ приближении. Произведя в (32) замену переменных интегрирования

$$\begin{aligned} &x \to x + \theta\varphi_u(x) \implies \Omega_u \to \Omega, \\ &dx \to J_u(x,\theta)dx, \quad J_u \equiv \det|\partial_\mu(x^\nu + \theta\varphi_u^\nu(x))|, \end{aligned} \tag{37}$$

получаем

$$W_u(\Omega, \Psi, \theta) = \int_\Omega dx J_u(x, \theta)\mathcal{L}_u(x, \theta), \tag{38}$$

где

$$\mathcal{L}_u(x,\theta) \equiv \mathcal{L}(x+\theta\varphi_u(x), \Psi_u(x+\theta\varphi_u(x),\theta), (\partial_\mu\Psi_u)(x+\theta\varphi_u(x),\theta)), \tag{39}$$

$$(\partial_\mu\Psi_u)(x+\theta\varphi_u(x),\theta) \equiv \frac{\partial\Psi_u(x,\theta)}{\partial x^\mu}\Big|_{x\to x+\theta\varphi_u(x)}. \tag{39a}$$

Вычисление нужных величин в линейном по параметру θ приближении (т.е. инфинитезимально), как легко убедиться, дает

$$\begin{aligned}
&J_u(x,\theta) \stackrel{i}{=} 1 + \theta\partial_\mu\varphi_u^\mu(x),\\
&\Psi_u(x+\theta\varphi_u(x),\theta) \stackrel{i}{=} \Psi(x) + \theta(\hat{R}_u + \varphi_u^\nu(x)\partial_\nu)\Psi(x),\\
&\partial_\mu\Psi_u(x,\theta) \stackrel{i}{=} \partial_\mu\Psi(x) + \theta\partial_\mu\hat{R}_u\Psi(x),\\
&(\partial_\mu\Psi_u)(x+\theta\varphi_u(x),\theta) \stackrel{i}{=} \partial_\mu\Psi(x) + \theta(\varphi_u^\nu(x)\partial_\nu\partial_\mu + \partial_\mu\hat{R}_u)\Psi(x),\\
&\mathcal{L}_u(x,\theta) \stackrel{i}{=} \mathcal{L}(x+\theta\varphi_u(x), \Psi(x) + \theta(\hat{R}_u + \varphi_u^\nu(x)\partial_\nu)\Psi(x),\\
&\partial_\mu\Psi(x) + \theta(\varphi_u^\nu\partial_\nu\partial_\mu + \partial_\mu\hat{R}_u)\Psi(x) \stackrel{i}{=} \mathcal{L}_\Psi(x) + \theta\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}|\varphi_u^\mu(x) + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}|(\hat{R}_u + \varphi_u^\nu(x)\partial_\nu)\Psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\mu}}(\varphi_u^\nu(x)\partial_\nu\partial_\mu + \partial_\mu\hat{R}_u)\Psi(x)\right\}
\end{aligned} \tag{40}$$

(суммирование по u не подразумевается).

При выводе приведенных инфинитезимальных равенств существенно используются условия (12) и (16) на функции φ_a и f_a, линейность оператора $\hat{\varkappa}_b$, непрерывная дифференцируемость первичной функции Лагранжа $\mathcal{L}$ (5) и непрерывная дважды дифференцируемость функции $\Psi \in \Phi$.

С учетом (40) для линейного по θ приращения действия за счет преобразования (32) получим

$$\begin{aligned}
\delta W_u \equiv W_u - W \stackrel{i}{=} \theta\int_\Omega dx \left[\partial_\mu\varphi_u^\mu\mathcal{L}_\Psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi}|\hat{R}_u\Psi(x) + \right.\\
\left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}|\partial_\mu\hat{R}_u\Psi(x)\right], \quad \Psi\in\Phi.
\end{aligned} \tag{41}$$

Сужение этого равенства на подмножество $\Phi_0 \subset \Phi$, где выполняются уравнения ЭЛ (8а), дает

$$\delta^0 W_u = \theta\int_\Omega dx\partial_\mu\left[\mathcal{L}_\Psi(x)\varphi_u^\mu(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{\mu}}|\hat{R}_u\Psi(x)\right], \quad \Omega\subset R_x, \quad \Psi\in\Phi_0. \tag{42}$$

Теперь, ввиду произвольности θ и $\Omega \subset R_x$, условие $\delta^0 W_u = 0$ теоремы 1 (т.е. инвариантность сужения действия W (10) на подмножество $\Phi_0 \subset \Phi$ относительно преобразования (32)) приводит к равенству нулю подинтегрального выражения в (41) в каждой точке $x \in R_x$, т.е. к утверждению (34). Интегрируя (34) по $d\vec{x}$

по всему множеству $R_{\vec{x}} \subset R_x$, при условии исчезновения на бесконечности в $R_{\vec{x}}$ компонент $R_u^\mu(x)$ токов R_u, получаем

$$0 = \int d\vec{x}\partial_\mu R_u^\mu(x) \equiv \partial_0 \int d\vec{x} R_u^0(x) + \int d\vec{x}\partial_j R_u^j(x) = \partial_0 \int d\vec{x} R_u^0(x), \tag{43}$$

что и означает справедливость утверждения (36). Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний в связи с приведенной теоремой.

Замечание 1. Во избежание громоздкости выкладок мы упростили приведенное выше рассмотрение тем, что в функции Лагранжа $\mathcal{L}$ (5) опустили сопряженные переменные $\bar{\Psi}$, $\bar{\Psi}_{,\mu}$, которые непременно появляются в случае, когда строится L-подход для уравнения (3) как уравнения для *комплекснозначной* функции Ψ (2), в этом случае первичная функция Лагранжа есть функция удвоенного числа переменных (а также переменной $x \in R_x$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \Psi, \bar{\Psi}, \Psi_{,\mu}, \bar{\Psi}_{,\mu}), \quad \mathcal{L}: \ \ R_x \times C^{m(2r+3)} \to R^1. \tag{5а}$$

При этом и действие W (6) становится функционалом удвоенного числа переменных

$$\begin{aligned} W(\Psi, \bar{\Psi}) &= \int dx \mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}(x) = \\ &= \int dx \mathcal{L}(x, \Psi(x), \bar{\Psi}(x), \partial_\mu\Psi(x), \partial_\mu\bar{\Psi}(x)), \quad \Psi, \bar{\Psi} \in \Phi, \end{aligned} \tag{6а}$$

причем независимые переменные Ψ, $\bar{\Psi}$ без каких-либо ограничений можно считать пробегающими одно и то же множество Φ. С учетом этого, кроме уравнения ЭЛ (8) = (8а), появляется “сопряженное” к нему уравнение

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar{\Psi}} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}}\Big| - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}_{,\mu}}\Big|, \quad \Psi, \bar{\Psi} \in \Phi_0. \tag{8б}$$

Независимые переменные $\Psi, \bar{\Psi} \in \Phi$ на подмножестве $\Phi_0 \subset \Phi$ экстремалей действия W (6а) становятся *зависимыми*, причем для $\bar{\Psi} \in \Phi_0$ применяется надлежащее “правило сопряжения”

$$\Psi(x) \to \bar{\Psi}(x) = \Psi^+(x)\Gamma_0, \quad \Psi^+(x) \equiv (\Psi(x))^{*T}; \tag{44}$$

здесь матрица Γ_0 выбирается такой, чтобы уравнение (8б) было эквивалентным уравнению (8а) = (8) и следовательно, исходящему уравнению (3а) = (3).

При формулировке теоремы Нетер о ЗС с учетом указаного уточнения приобразование (31) в Φ дополняется преобразованием переменной $\bar{\Psi} \in \Phi$ следующим образом:

$$\bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}_u(x) = \bar{\Psi}(x) + \theta\bar{\Psi}(x)\overleftarrow{\hat{\bar{R}}}_u, \quad \hat{\bar{R}}_u \equiv \Gamma_0^{-1}\hat{R}_u^+\Gamma_0, \tag{31б}$$

где стрелка “$\leftarrow$” в (31б) обозначает, что дифференциальная часть оператора $\hat{\bar{R}}_u$ действует налево, т.е.

$$(\bar{\Psi}(x)\overleftarrow{\hat{\bar{R}}}_u)_s \stackrel{df}{=} \bar{\Psi}_{s'}(x)(\Gamma_0^{-1}\overleftarrow{\hat{R}}{}_u^+\Gamma_0)_s^s \equiv (\Gamma_0^{-1}\hat{R}_u^+\Gamma_0)_s^{s'}\bar{\Psi}_{s'}(x). \tag{45}$$

Нетрудно убедиться, что с учетом этого уточнения для компонет R_u^μ токов в ЗС (34) вместо формулы (35) теорема Нетер дает

$$R_u^\mu(x) = \varphi_u^\mu(x)\mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}|\hat{R}_u\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\overleftarrow{\hat{\bar{R}}}_u\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}_{,\mu}}|, \tag{35a}$$

причем конструкция (36) именно с $R_u^0(x)$ и (35a) есть сохраняющаяся величина.

Приведенное уточнение существенно по крайней мере в двух пунктах. Во-первых, именно привлечение концепции $\bar{\Psi}$ как независимой лагранжевой переменной дает возможность корректно рассматривать в L-подходе такие преобразования инвариантности уравнения (3), как преобразования из алгебры A_8 (см. раздел 2 и замечание 5). Во-вторых, — и это, по-видимому, наиболее существенно, — даже в случае вещественных многокомпонентных функций Ψ иногда невввозможно построить удовлетворительный L-подход, не привлекая концепцию сопряженных переменных $\bar{\Psi}$. Подобная ситуация возникает при построениии релятивистски инвариантного L-подхода для электромагнитного поля в терминах напряженностей $(\vec{E}, \vec{H}) = (B^{\mu\nu})$ [17–24].

Замечание 2. Хорошо известно, что функция Лагранжа $\mathcal{L}$ (5a), для которой уравнения ЭЛ (8a, б) эквивалентны даному уравнению (3a) = (3), не единственна, причем различные функции Лагранжа (5a) могут отличаться друг от друга более чем на слагаемое, которое во вторичной функции Лагранжа $\mathcal{L}_{\Psi\bar{\Psi}}$ совпадает с дивергенцией $\partial_\mu F(x)$ некоторой функции $F : R_x \to R^1$. Функции Лагранжа, для которых уравнения ЭЛ хотя и различны, но эквивалентны даному уравнению, в работах [29–31] названы s-эквивалентными. Примеры таких существенно различных функций Лагранжа для электромагнитного поля приведены в работах [17–24]. Ясно, что одно и то же преобразование инвариантности (31) уравнения (3) при различных s-эквивалентных функциях Лагранжа дает по данной теореме Нетер разные сохраняющиеся величины. Ситуация здесь аналогичны той, которая возникает при вычислении законов сохранения другими методами (см. например, [11–13, 32–34]), т.е. не по теореме Нетер, а, например, по формулам

$$\tilde{R}_u = \int d\vec{x}\Psi^+(x)\hat{M}\hat{R}_u\Psi(x) \tag{46}$$

с различными метрическими операторами $\hat{M}$, при которых конструкция (46) есть сохраняющаяся величина.

В этой связи возникают вопросы, например, о том, какой из различных сохраняющихся величин отдать предпочтение в качестве соответствующей данному преобразованию инвариантности (31). Или, какая из сохраняющихся величин, соответствующих генератору ∂_0 трансляций во времени при различных способах их вычисления является энергией системы. Наконец, какая из s-эквивалентных функций Лагранжа является предпочтительной и чем именно.

В случае некоторых известных полей удается дать вполне определенные ответы на эти вопросы. Например, в случае спинорного поля из всех способов нахождения сохраняющихся величин можно отдать предпочтение способу вычисления сохраняющихся величин по данной теореме Нетер и по скалярной функции Лагранжа (см. ниже $\mathcal{L}$ (80)), поскольку именно при таком соглашении временному сдвигу

$t \to t' = t + a^0$ в R_x с вещественным положительным параметром a^0, порождающему преобразование инвариантности (31) уравнения Дирака в виде

$$\Psi(x) \to \Psi_{a^0}(x) = (1 + a^0 \hat{R}_{a^0})\Psi(x) \equiv (1 - a^0\partial_0)\Psi(x), \tag{47}$$

соответствует энергия спинорного поля, т.е.

$$\begin{aligned} &\tilde{R}_{a^0} \equiv \int d\vec{x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,0}}|(-\partial_0)\Psi + (-\partial_0\bar{\Psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\Psi_{,0}}| = \int d\vec{x}\Psi^+\hat{H}\Psi, \\ &\hat{H} \equiv \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + \beta m, \quad p^j = -i\partial_j. \end{aligned} \tag{48}$$

В случае электромагнитного поля указанный критерий дает возможность найти подходящую функцию Лагранжа в терминах напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в релятивистки инвариантном L-подходе для этого поля [20–24].

Замечание 3. Условие (33) данной теоремы Нетер о ЗС, эквивалентное требованию, чтобы преобразование (31) было преобразованием инвариантности уравнения (3), является, конечно, достаточным, но не необходимым.

В разделе 2 приведен пример однопараметрического семейства преобразований (31) для спинорного поля, которые не являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака (с $m = 0$), но для которых утверждение (36) выполняется. Однако, во-первых, этот факт обнаружен лишь для специфических преобразований, а именно, собственно конформных преобразований, генераторы которых выражаются через генераторы группы Пуанкаре (см. [11], а также теорему 4 в [15]), и, во-вторых, вычисление ЗС по формулам (35а), (36) даже в таких случаях разумно называть нетеровскими, поскольку результат таких вычислений оказывается совпадающим с вычислением этих ЗС по теореме Нетер (т.е. по формулам (35а), (36) с использованием соответствующих преобразований инвариантности уравнения Дирака). Таким образом, если для некоторого поля Ψ величина, вычисленная по нетеровским формулам (35а), (36), оказывается сохраняющейся, то нетеровская формула (36) в этом смысле “восстанавливает” преобразование инвариантности уравнения движения (3) для этого поля.

Конкретизируем теорему в случае конформной группы $C(1,3)$ преобразований и некоторых ее обобщений.

Через 15 вещественных параметров

$$\alpha = (\alpha^a)_{a=1}^{15} = (a, \omega, b, \varkappa), \quad a = (a^\mu), \quad \omega = (\omega^{\mu\nu}), \quad b = (b^\mu), \tag{49}$$

(где a^μ — сдвиг вдоль оси $\mu = \overline{0,3}$, $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ — угол поворота в плоскости $\mu\nu$, b^μ и $\varkappa$ — параметры собственно конформных и масштабных преобразований) запишем инфинитезимальные $C(1,3)$-преобразования в пространстве-времени $R_x \equiv \{x = (x^\mu)\}$, $\mu = \overline{0,3}$, в виде

$$x \to x' = \left(1 + a^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + b^\mu K_\mu + \varkappa d\right)x, \tag{50}$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \tag{51а}$$

$$K_\mu = 2x_\mu d - x^2\partial_\mu, \quad d = x^\mu\partial_\mu. \tag{51б}$$

Пусть в пространстве $\Phi = \{\Psi\}$ m-компонентных функций Ψ: $R_x \to C^m$ (или в C^m) задано некоторое локальное представление собственной ортохронной группы Лоренца $L_+ = O^+(1,3)$, определяемое матричными генераторами — $(m \times m)$-матрицами $S_{\mu\nu} = (S^s_{\mu\nu s'};\ s, s' = \overline{1,m})$, удовлетворяющими соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = g_{(\mu\rho}S_{\nu\sigma)} \equiv g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} + g_{\rho\nu}S_{\sigma\mu} + g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} + g_{\sigma\mu}S_{\rho\nu}. \tag{52}$$

Пусь некоторая $m \times m$-матрица коммутирует со всеми матрицами $J_{\mu\nu}$,

$$[S_{\mu\nu}, S] = 0. \tag{53}$$

Теорема 2. *Операторы в* Φ

$$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu, \quad \hat{j}_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}, \quad \hat{d} = d - S, \tag{54а}$$

$$\hat{K}_\mu = K_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu - 2Sx_\mu = 2x_\mu\hat{d} - x^2\partial_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu, \tag{54б}$$

задаваемые операторами (51) и любыми $m \times m$*-матрицами* $S_{\mu\nu}$, S, *удовлетворяющими соотношениям (52), (53), являются образами в* Φ $C(1,3)$*-генераторов (51), т.е. удовлетворяют тем же соотношениям (в ковариантной форме), что и генераторы (51):*

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \hat{j}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \tag{55а}$$

$$[\hat{j}_{\mu\nu}, \hat{j}_{\rho\sigma}] = -g_{(\mu\rho}\hat{j}_{\nu\sigma)} \equiv -g_{\mu\rho}\hat{j}_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}\hat{j}_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}\hat{j}_{\mu\rho} - g_{\sigma\mu}\hat{j}_{\rho\nu}, \tag{55б}$$

$$[\partial_\mu, \hat{d}] = \partial_\mu, \quad [\partial_\mu, \hat{K}_\nu] = 2(g_{\mu\nu}\hat{d} - \hat{j}_{\mu\nu}), \quad [\hat{j}_{\mu\nu}, \hat{d}] = 0, \tag{55в}$$

$$[\hat{K}_\mu, \hat{j}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\hat{K}_\sigma - g_{\mu\sigma}\hat{K}_\rho, \quad [\hat{d}, \hat{K}_\mu] = \hat{K}_\mu, \quad [\hat{K}_\mu, \hat{K}_\nu] = 0. \tag{55г}$$

Доказательство. Непосредственная проверка убеждает, что операторы (54) удовлетворяют соотношениям (55) при условиях (52), (53).

Инфинитезимальные $C(1,3)$-преобразования в Φ, порождаемые генераторами (54), запишем в виде

$$\Psi'(x) = (1 - \alpha^a\hat{q}_a)\Psi(x) \equiv \left(1 - a^\mu\partial_\mu - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\hat{j}_{\mu\nu} - b^\mu\hat{K}_\mu - \varkappa\hat{d}\right)\Psi(x). \tag{56}$$

Здесь знаки выбраны так, чтобы орбитальные слагаемые (54), задаваемые операторами (51), порождались обратным к (50) преобразованиям аргумента x функций $\Psi \in \Phi$. Слагаемое $S_{\mu\nu}$ в операторе $\hat{j}_{\mu\nu}$ в (54а) называют оператором спина преобразований Лоренца $O^+(1,3)$. Аналогично этому слагаемое S в операторе $\hat{d}$ в (54а) называют спином дилатации, а слагаемое $S_\mu \equiv 2S_{\mu\nu}x^\nu + 2Sx_\mu$ в (54б) называем конформным спином. Заметим, что каждое уравнение для поля Ψ нулевой массы может быть инвариантно относительно $C(1,3)$-преобразований (56) лишь с некоторым фиксированным спином дилатации S.

Приведм удобную методику вычисления ЗС для $C(1,3)$-преобразований (56) в Φ и их определенных обобщений в виде легко проверяемого следствия теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $C(1,3)$*-преобразования (56), порождаемые генераторами (54) с некоторой матрицей* S*, суть преобразования инвариантности ЭЛ (8а, б) для некоторого безмассового поля* Ψ *и выполняются все условия теоремы 1. Тогдя*

15 сохраняющихся величин R^μ_a (35а), порождаемые $C(1,3)$-алгеброй инвариантности теории, имеют следующую структуру (в матричной форме записи):

$$P^\mu_\rho = -\delta^\mu_\rho \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} | \partial_\rho \Psi + (\partial_\rho \bar{\Psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}} |, \tag{57}$$

$$J^\mu_{\rho\sigma} = M^\mu_{\rho\sigma} + S^\mu_{\rho\sigma}, \quad D^\mu = S^\mu + x^\rho P^\mu_\rho, \tag{58}$$

$$K^\mu_\rho = 2x_\rho D^\mu - x^2 P^\mu_\rho + 2x^\sigma S^\mu_{\rho\sigma}, \tag{59}$$

где

$$S^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} | S\Psi - \bar{\Psi}\bar{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}} |, \tag{60}$$

$$M^\mu_{\rho\sigma} \equiv x_\rho P^\mu_\sigma - x_\sigma P^\mu_\rho, \tag{61}$$

$$S^\mu_{\rho\sigma} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} | S_{\rho\sigma}\Psi - \bar{\Psi}\bar{S}_{\rho\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}} |. \tag{62}$$

Пусть некоторый оператор γ коммутирует со всеми генераторами (54) $C(1,3)$-преобразований (56) в Φ и является генератором преобразований инвариантности уравнений ЭЛ (8а, б), так что преобразования (называемые $\gamma C(1,3)$-преобразованиями)

$$\Psi(x) \to \Psi'''(x) = (1 - \alpha^a \hat{q}'_a)\Psi(x), \quad \hat{q}'_a = \gamma \hat{q}, \tag{63}$$

суть пребразования инвариантности третьего типа (19). Тогда, наряду с токами (57)–(59), сохраняющимися являются также токи

$$T'^\mu_\rho, \quad J'^\mu_{\rho\sigma}, \quad K'^\mu_\rho, \quad D'^\mu, \tag{64}$$

которые вычисляются по формулам (57)–(59) с заменой в них базисных величин P^μ_ρ, $S^\mu_{\rho\sigma}$, S^μ базисными величинами

$$P'^\mu_\rho \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma \partial_\rho \Psi + (\partial_\rho \bar{\Psi}) \bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}} - \delta^\mu_\rho \mathcal{L}, \tag{65}$$

$$S'^\mu_{\rho\sigma} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma S_{\rho\sigma}\Psi - \bar{\Psi}\bar{S}_{\rho\sigma}\bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}, \tag{66}$$

$$S'^\mu \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \gamma S\Psi - \bar{\Psi}\bar{S}\bar{\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,\mu}}. \tag{67}$$

В случае $m \neq 0$ очевидным образом сужается симметрия и число сохраняющихся величин.

Доказательство теоремы проводится подстановкрй генераторов $\hat{q}$ (54) и генераторов $\hat{q}' = \gamma \hat{q}$ в формулу (35а) теоремы 1.

В следующем разделе иллюстрируется применение теоремы 1 и ее следствия — теоремы 3 — в случае спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака.

Замечание 4. Отметим, что понятие базисных величин используется здесь только для выработки простой и удобной методики нахождения ЗС и не связано с выделением линейно или функционально независимых ЗС. Используемое нами понятие базисных величин отличается от понятия базиса ЗС, введеного в [35]; последние понятие, кстати, также не выделяет линейно или функционально независимые законы сохранения.

2. Законы сохранения как следствия нелиевских симметрий уравнений Дирака

2.1. Алгебры инвариантности уравнения Дирака в классе L_1. Класс L_1 матрично-дифференциальных операторов первого порядка по переменной x является простейшим классом нелиевских операторов. Целесообразность выделения именно этого класса для анализа симметрийных свойств уравнений Дирака и Максвелла обусловлена двумя причинами. Во-первых, именно такому классу операторов принадлежат сами операторы этих уравнений, тогда как класс L_0 операторов Ли является более узким классом, чем класс L_1 матрично-дифференциальных операторов, которому принадлежат операторы уравнений Максвелла и Дирака. Во-вторых, алгебра инвариантности в классе L_1 легко восстанавливается до соответствующей группы инвариантности (см. п. 2.3).

В [17] предложен способ расширения алгебры инвариантности уравнения (3), задаваемой операторами Ли, до алгебры, задаваемой простейшими нелиевскими операторами (см. теорему 6 в [17]). Проиллюстрируем применение этой методики для спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad m \geq 0, \tag{68}$$

где для определенности выбрано представление Дирака–Паули γ-матриц:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{vmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^4 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{69}$$

$$\sigma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{70}$$

В [4] показано, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения Дирака с $m = 0$ в классе L_0 операторов Ли является 23-мерная алгебра $C(1,3) \oplus A_8$, а в случае $m \neq 0$ — 14-мерная алгебра $P(1,3) \oplus A_4$.

Если параметры $\alpha = (\alpha^a)$ соответствующих групп преобразований вещественны и в окрестности единицы задают преобразование $\Psi \in \Phi$ в виде

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = (1 - \alpha^a \hat{q}_a)\Psi(x), \tag{71}$$

то генераторы $\hat{q}_a$ указанных преобразований имеют следующий явный вид: $C(1,3)$-генераторы — вид (54) с

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(-\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu), \quad S = -\frac{3}{2}I, \tag{72}$$

(где I — единичная матрица, которую часто опускаем), а генераторы алгебры $A_8 \supset A_4$ (в случае, если выбрано представление (69) для γ-матриц) имеют вид

$$I, \quad i, \quad i\gamma^2 C, \quad \gamma^2 C; \tag{73}$$

$$\gamma^4, \quad i\gamma^4, \quad \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, \quad i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, \tag{74}$$

где генераторы A_4 выделены формулою (73),

$$C\Psi = \Psi^*. \tag{75}$$

Коммутационные соотношения генераторов (73), (74) имеют вид

$$\begin{array}{ll}
[i, i\gamma^2 C] = -2\gamma^2 C, & [i, \gamma^2 C] = 2i\gamma^2 C, \\
[\gamma^2 C, i\gamma^2 C] = -2i, & [i\gamma^4, \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = 2i\gamma^2 C, \\
[\gamma^4, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = -2\gamma^2 C, & [\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = 2i, \\
[i, \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = -2i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, & [i, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = 2\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, \\
[\gamma^2 C, i\gamma^4] = 2i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, & [\gamma^2 C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = 2i\gamma^4, \\
[i\gamma^2 C, i\gamma^4] = -2\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, & [i\gamma^2 C, \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C] = -2i\gamma^4
\end{array} \tag{76}$$

(остальные коммутаторы равны нулю). Из теоремы 6 в [17] следует, что справедлива такая теорема.

Теорема 4. *В классе L_1 алгеброй инвариантности уравнения Дирака с $m = 0$ является 128-мерная алгебра A_{128} с базисными элементами*

$$\begin{array}{l}
I, \quad i, \quad i\gamma^2 C, \quad \gamma^2 C, \quad \gamma^4, \quad i\gamma^4, \quad \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, \quad i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C, \\
\hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}), \quad \hat{q}' = (i\hat{q}, i\gamma^2 C\hat{q}, \gamma^2 C\hat{q}, \gamma^4\hat{q}, i\gamma^4\hat{q}, \gamma^0\gamma^3\gamma^1 C\hat{q}, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C\hat{q}),
\end{array} \tag{77}$$

а алгеброй инвариантности уравнения Дирака с $m \neq 0$ является 44-мерная алгебра A_{44}, натянутая на генераторы

$$I, \quad i, \quad i\gamma^2 C, \quad \gamma^2 C, \quad \hat{q} = (\partial, \hat{j}), \quad \hat{q}' = (i\hat{q}, i\gamma^2 C\hat{q}, \gamma^2 C\hat{q}), \tag{78}$$

где ∂, $\hat{j}$, $\hat{K}$, $\hat{d}$ даны формулами (54). Алгебра A_{128} изоморфна алгебре

$$C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus C(1,3) \oplus A_8,$$

а алгебра A_{44} изоморфна алгебре

$$P(1,3) \oplus P(1,3) \oplus P(1,3) \oplus P(1,3) \oplus A_4.$$

Пользуясь соотношениями для γ-матриц

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{79}$$

легко показать, что все генераторы (73), (74) алгебры A_8 коммутируют или антикоммутируют с оператором уравнения Дирака, а именно, операторы I, i, $i\gamma^2 C$, $\gamma^2 C$ из (73) коммутируют, а операторы γ^4, $i\gamma^4$, $\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C$, $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C$ из (74) антикоммутируют с оператором $i\gamma^\mu\partial_\mu$. Поскольку вся восьмерка генераторов алгебры A_8 коммутирует с массовым членом, то ясно, что только операторы (73) являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака при $m \neq 0$, а для случая $m = 0$ все восемь операторов (73), (74) являются преобразованиями инвариантности. Далее, легко установить, что все операторы (73), (74) коммутируют с операторами ∂, $\hat{j}$, $\hat{K}$, $\hat{d}$ (54) и, кроме того, генераторы I, $\gamma^2 C$, $i\gamma^2 C$, $i\gamma^4$ являются эрмитовыми (их квадраты равны единице), а генераторы i, γ^4, $\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C$, $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 C$ — антиэрмитовыми (их квадраты равны минус единице). Таким образом, выполняются условия теоремы 6 в [17]. С учетом этого, а также из хорошо известного факта, что уравнение Дирака при $m = 0$ конформно инвариантно, а при $m \neq 0$ — инвариантно только относительно преобразований из группы $P(1,3)$, становится ясной справедливость утверждения теоремы 2.

2.2. Вычисление законов сохранения — следствий алгебр инвариантности уравнений Дирака в классе L_1. Поскольку лагранжев подход для спинорного поля, удовлетворяющего уравнению Дирака (68), хорошо известен, см., например, [36, 37], а скалярная (относительно группы Пуанкаре) функция Лагранжа имеет сравнительно простой вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi_{,\mu} - \bar{\Psi}_{,\mu}\gamma^\mu\Psi) - m\bar{\Psi}\Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0, \tag{80}$$

то спинорное поле является удобным объектом для иллюстрации конкретного применения приведенного в разделе 1 обобщения теоремы Нетер (тем более, что теорема 2 дает простейшие нелиевские алгебры инвариантности).

Рассмотрим сначала случай $m = 0$.

Функция Лагранжа (80) приводит к следующему виду базисных величин (60)–(62) для $C(1,3)$-законов сохранения — следствий конформной алгебры инвариантности уравнения Дирака с $m = 0$ в классе операторов Ли:

$$S^\mu = 0, \quad P^\mu_\rho = \bar{\Psi}\gamma^\mu\hat{p}_\rho\Psi - \frac{i}{2}\partial_\rho\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \tag{81}$$

$$S^\mu_{\rho\sigma} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\{\gamma^\mu, S_{\rho\sigma}\}_+\Psi, \quad \hat{p}_\rho \equiv i\partial_\rho, \quad \{A,B\}_+ \equiv AB + BA, \tag{82}$$

после чего легко выписать все 15 сохраняющихся токов по формулам (57)–(59). Это приводит к хорошо известным $C(1,3)$-сохраняющимся величинам для поля Ψ

$$P_\mu = \int d^3x\mathcal{P}_\mu(x), \tag{83}$$

$$J_{\mu\nu} = \int d^3x(x_\mu\mathcal{P}_\nu - x_\nu\mathcal{P}_\mu + \Psi^+ iS_{\mu\nu}\Psi), \tag{84}$$

$$D = \int d^3x\mathcal{D}(x), \tag{85}$$

$$K_\mu = \int d^3x(2x_\mu\mathcal{D} - x^2\mathcal{P}_\mu + 2ix^\nu\Psi^+S_{\mu\nu}\Psi), \tag{86}$$

где плотности энергии-импульса и дилатации имеют вид

$$\mathcal{P}_\mu(x) \equiv \Psi^+ i\partial_\mu\Psi \equiv \Psi^+\hat{p}_\mu\Psi, \tag{87}$$

$$\mathcal{D}(x) \equiv x^\mu\mathcal{P}_\mu + \frac{3}{2}i\Psi^+\Psi. \tag{88}$$

Заметим, что результат (86) получается для оператора $\hat{K}_\mu$ из (54б) не только при $S = -\frac{3}{2}I$ (когда $\hat{K}_\mu$ является генератором преобразования инвариантности уравнения Дирака), но и в случае произвольного $S = \tau I$ с $\tau \neq -\frac{3}{2}$ (т.е. когда

$\hat{K}_\mu$ не является генератором преобразования инвариантности уравнения Дирака). Это — конкретный пример, иллюстрирующий приведенное выше замечание 3 о достаточности условий теоремы 1.

Из структуры ЗС (83)–(86) видно, что теорема Нетер дает следующую общую формулу для $C(1,3)$-сохраняющихся величин, реализующих определенное соответствие "генератор — закон сохранения" для генераторов преобразований, задаваемых вещественными параметрами:

$$\hat{q}_a \to \tilde{q}_a \stackrel{df}{=} \int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,0}} \hat{q}_a \Psi + \bar{\Psi}\bar{q}_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}_{,0}} \right) = \int d^3x \Psi^+ \hat{q}_a^{\text{кв}} \Psi,$$
$$\hat{q}_a^{\text{кв}} \equiv i\hat{q}_a, \quad (\hat{q}_a) = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d}). \tag{89}$$

Интересно отметить, что правая часть формулы (89) универсальна в том смысле, что подстановка в правую часть этой формулы любого генератора q_a (77) алгебры A_{128} дает сохраняющуюся величину:

$$i\int d^3x \Psi^+(x)\hat{q}_a\Psi(x) \equiv Q_{1a}(t) = \text{const}, \quad \hat{q}_a \in A_{128} \tag{90}$$

(в этой связи см. [32]). Однако вычисление сохраняющихся величин непосредственно по обобщенной теореме Нетер (теорема 1, т.е. по формулам (35а), (36)) для всех генераторов $\hat{q}_a$ (77), кроме, конечно, $C(1,3)$-генераторов $\hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{K}, \hat{d})$, дает сохраняющиеся величины, отличные от (90). В этой связи напомним, что полученные в работах [12, 13, 32–34] формулы для бесконечных серий законов сохранения zilch дают, вообще говоря, другие методики вычисления ЗС для любого из генераторов $\hat{q} \in A_{128}$. Таким образом, одному и тому же преобразованию инвариантности уравнения Дирака по разным методикам соответствуют различные сохраняющиеся величины.

Очевидно, что физически адекватным соответствием генератор — закон сохранения можно считать соответствие, даваемое (обобщенной) теоремой Нетер, в которой используется скалярная функция Лагранжа, поскольку именно этот путь непротиворечивым образом реализует три основных физических принципа — принцып наименьшего действия, принцип релятивизма и принцип, согласно которому из однородности и изотропности пространства-времени следует такие хорошо известные сохраняющиеся величины, как энергия-импульс и 4-мерный момент количества движения спинорного поля. Законы сохранения, вычисленные по формулам (35а), (36) с использованием скалярной функции Лагранжа (80), будем называть нетеровскими.

Нетеровский ЗС $\tilde{q}$, соответствующий генераторам $\hat{q}_a \in A_8$, имеют вид

$$\widetilde{i} = \int d^3x \Psi^+\Psi, \tag{91}$$

$$\widetilde{i\gamma^2 C} = -\frac{1}{2}\int d^3x (\Psi^+\gamma^2\Psi + \bar{\Psi}\gamma^2\bar{\Psi}^+), \tag{92}$$

$$\widetilde{\gamma^2 C} = -\frac{i}{2}\int d^3x (\Psi^+\gamma^2\Psi - \bar{\Psi}\gamma^2\bar{\Psi}^+), \tag{93}$$

$$\widetilde{\gamma^4} = -i\int d^3x \Psi^+\gamma^4\Psi, \tag{94}$$

$$\gamma^0\widetilde{\gamma^3\gamma^1}C = -\frac{i}{2}\int d^3x(\Psi^+\gamma^0\gamma^3\gamma^1\Psi + \bar\Psi\gamma^0\gamma^3\gamma^1\bar\Psi^+), \tag{95}$$

$$i\gamma^0\widetilde{\gamma^3\gamma^1}C = -\frac{1}{2}\int d^3x(\Psi^+\gamma^0\gamma^3\gamma^1\Psi - \bar\Psi\gamma^0\gamma^3\gamma^1\bar\Psi^+) \tag{96}$$

(генераторы I, $i\gamma^4$ дают тривиальные сохраняющиеся величины). Нетеровские ЗС для генераторов $\hat q \in A_8$ не совпадают с ЗС, получаемыми для этих генераторов по формуле (90).

Вычислим теперь сохраняющиеся величины, соответствующие простейшим нелиевским преобразованиям инвариантности из A_{128} (77). Заметим, что $\gamma^4\hat q$, $\gamma^2C\hat q$, $i\gamma^2C\hat q$ с $\hat q \in C(1,3)$ дают тривиальные серии сохраняющихся величин, каждый из 45 элементов которых равен нулю, поэтому токи, соответствующие указанным генераторам, не выписываем.

Базисные $i\gamma^4C(1,3)$-токи имеют вид

$$S'^{\mu} \equiv (i\gamma^4)^{\mu} = 0, \tag{97}$$

$$P'^{\mu}_{\rho} \equiv (-i\gamma^4\partial_\rho)^{\mu} = \bar\Psi\gamma^4\gamma^\mu\partial_\rho\Psi + \frac{1}{2}\partial_\rho\bar\Psi\gamma^\mu\gamma^4\Psi, \tag{98}$$

$$S'^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv (i\gamma^4 S_{\rho\sigma})^{\mu} = -\frac{1}{2}\bar\Psi\{\gamma^\mu, S_{\rho\sigma}\}\gamma^4\Psi. \tag{99}$$

На основе полученных выражений 15 сохраняющихся токов этой серии выписываются без затруднений по формулам (98), (58), (59). Соответствующие законы сохранения имеют вид

$$P'_\mu = \int d^3x\mathcal{P}'_\mu(x), \tag{100}$$

$$J'_{\mu\nu} = \int d^3x(x_\mu\mathcal{P}'_\nu - x_\nu\mathcal{P}'_\mu - \Psi^+\gamma^4 S_{\mu\nu}\Psi), \tag{101}$$

$$D' = \int d^3x\mathcal{D}'(x), \tag{102}$$

$$K'_\mu = \int d^3x(2x_\mu\mathcal{D}' - x^2\mathcal{P}'_\mu - 2x^\nu\Psi^+\gamma^4 S_{\mu\nu}\Psi), \tag{103}$$

где

$$\mathcal{P}'_\mu(x) \equiv -\Psi^+\gamma^4\partial_\mu\Psi \equiv \Psi^+ i\gamma^4\hat p_\mu\Psi, \tag{104}$$

$$\mathcal{D}'(x) \equiv x^\mu\mathcal{P}'_\mu - \frac{3}{2}\Psi^+\gamma^4\Psi. \tag{105}$$

Базисные $\gamma^0\gamma^3\gamma^1 CC(1,3)$-токи имеют вид

$$S''^{\mu} \equiv (-\gamma^4\gamma^2C)^{\mu} = \frac{i}{2}(\bar\Psi\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2\Psi^* + \bar\Psi^*\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu\Psi), \tag{106}$$

$$P''^{\mu}_{\rho} \equiv -\frac{i}{2}(\bar\Psi\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2\partial_\rho\Psi^* + (\partial_\rho\bar\Psi)\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu\Psi), \tag{107}$$

$$S''^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv -\frac{i}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2 C S_{\rho\sigma} - S_{\rho\sigma}C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \tag{108}$$

где $C^+ = \overleftarrow{C}$. 15 сохраняющихся токов выписываются на основе этих выражений по формулам (107), (58), (59). Соответствующие законы сохранения могут быть записаны в виде общей формулы

$$\hat{q} \to \tilde{q}'' = -\mathrm{Re}\int d^3x \Psi^+\gamma^4\gamma^2 C\hat{q}^{\text{кв}}\Psi, \quad \hat{q}^{\text{кв}} = i\hat{q}, \tag{109}$$

где $\hat{q}$ — любой из 15 генераторов $\gamma^0\gamma^3\gamma^1 CC(1,3)$.

Наконец, базисные $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 CC(1,3)$-токи имеют следующий вид

$$I'''^{\mu} \equiv (-i\gamma^4\gamma^2 C)^\mu = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2 C - C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \tag{110}$$

$$P'''^{\mu}_{\rho} \equiv \frac{1}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2\partial_\rho\Psi^* - (\partial_\rho\bar{\Psi})C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu\Psi), \tag{111}$$

$$S'''^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv \frac{1}{2}\bar{\Psi}(\gamma^\mu\gamma^4\gamma^2 C S_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}C^+\gamma^4\gamma^2\gamma^\mu)\Psi, \tag{112}$$

а соответствующие законы сохранения – вид

$$\hat{q} \to \tilde{q} = -\mathrm{Im}\int d^3x \Psi^+\gamma^4\gamma^2 C\hat{q}^{\text{кв}}\Psi, \quad \hat{q}^{\text{кв}} = i\hat{q}, \tag{113}$$

где $\hat{q}$ — любой из генераторов $i\gamma^0\gamma^3\gamma^1 CC(1,3)$. Остальные генераторы A_{128} (77) дают тривиальные (нулевые) сохраняющиеся величины.

Как видно, обобщение теоремы Нетер на нелиевские преобразования инвариантности и наличие 128-мерной алгебры инвариантности A_{128} позволяют в случае спинорного поля с $m = 0$ получить 45 дополнительных сохраняющихся величин (100)–(103), (109), (113). Тем самым систематизирован результат [12, 13] о наличии дополнительных сохраняющихся величин zilch-типа и для безмассового спинорного поля и указана связь этих законов сохранения с симметриями уравнения Дирака для $m = 0$. Эта связь зафиксирована нетеровским соответствием “оператор симметрии — закон сохранения”.

Мы нормируем функцию Лагранжа (80) таким образом, чтобы исходным генератором $\hat{q}_A$, ассоциируемым с вещественными параметрами α^A преобразований $\Psi \to \Psi' = (1 - \alpha^A\hat{q}_A)\Psi$, по теореме Нетер соответствовали вещественные сохраняющиеся токи Q^μ_A — функции спинорного поля Ψ. В этом случае интегральные сохраняющиеся величины $\bar{Q}_A \equiv \int d^3x Q^0_A$ в представлении вторичного квантования переходят в эрмитовы операторы в пространстве Фока, удовлетворяющие тем же коммутационным соотношениям, что и квантовомеханические операторы $i\hat{q}_A$.

В случае уравнения Дирака (68) с $m > 0$ список сохраняющихся величин оказывается значительно короче: алгебры $P(1,3)$ и A_4 дают по теореме 1 известные ЗС (83), (84), (91)–(93), а генераторы $\hat{q}'$ в (77) алгебры $A_{44} \supset P(1,3) \oplus A_4$ дают по этой теореме тривиальные ЗС (нулевые сохраняющиеся величины).

Для получения содержательных дополнительных ЗС в случае $m > 0$ и для иллюстрации существенного различия в сохраняющихся величинах, вычисляемых по разным методикам, рассмотрим семейства преобразований инвариантности уравнения Дирака (68) с $m > 0$ в классе матрично-дифференциальных операторов первого порядка по x, задаваемые операторами:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{m}\left(a_0\vec{S}\cdot\vec{\partial} + \frac{b_0}{2}\hat{H}\right), \quad \vec{p} \equiv (\partial^j), \quad \vec{H} \equiv \gamma^0(i\vec{\gamma}\vec{\partial} + m), \tag{114}$$

$$\Sigma_j = a_j\gamma^0 S_j + \frac{i}{2m}(b_j - a_j\gamma^4)\partial_j, \quad S_j \equiv \frac{1}{4}\varepsilon^{jmn}\gamma^m\gamma^n \tag{114a}$$

(здесь по повторяющемуся индексу j суммирование не проводится, $\varepsilon^{123} = 1$). Эти операторы являются преобразованиями инвариантности уравнения Дирака (68) с $m > 0$ при любых комплексных числах a_μ, b_μ, а при $a_j = i$, $b_j = 1$, $a_0 = b_0$ они совпадают с операторами (34.4) в [11]. Сохраняющиеся величины, вычисляемые по теореме 1, т.е. по формулам (35а), (36) с использованием функции Лагранжа (80), имеют вид

$$\tilde{\Sigma}_0 = \int d^3x \left\{\frac{i}{2m}\Psi^+\left[(a_0^* - a_0)\vec{S}\vec{\partial} + \frac{b_0^* - b_0}{2}\hat{H}\right]\Psi\right\}, \tag{115}$$

$$\tilde{\Sigma}_j = \int d^3x\Psi^+\left\{\frac{-i(a_j + a_j^*)}{2}\gamma^0 S_j + \frac{1}{4m}[b_j - b_j^* - (a_j + a_j^*)\gamma^4]\partial_j\right\}\Psi \tag{116}$$

(здесь также по повторяющемуся индексу j суммирование не проводится).

Вычисление сохраняющихся величин, соответствующих тем же преобразованиям инвариантности $\hat{q}_a = \Sigma_\mu$ (114), (114а), по формуле (90) дает результат, отличный от (115), (116). Ясно, что генераторам преобразований инвариантности (114), (114а) следует ставить в соответствие ЗС (115), (116), а не результаты вычислений по формуле (90).

Заметим также, что сохраняющиеся величины (115), (116) совпадают с ЗС (34.5) в [11], вычисленными в [11] без использования теоремы Нетер, при $a_j = 1$, $a_0 = b_0 = b_j = i$.

Конечно, операторы (114), (114а) суть линейные комбинации (с вещественными коэффициентами) следующих генераторов преобразований инвариантности:

$$i\hat{H}, \quad \partial_j, \quad i\vec{S}\vec{p}, \quad \gamma^0 S_j - \frac{i\gamma^4}{2m}\partial_j, \tag{117}$$

$$\hat{H}, \quad i\partial_j, \quad \vec{S}\vec{\partial}, \quad i\gamma^0 S_j + \frac{\gamma^4}{2m}\partial_j. \tag{117a}$$

Генераторы (117) дают по теореме 1 8 ненулевых независимых ЗС (четыре из которых совпадают с энергией-импульсом поля Ψ, а остальные четыре суть дополнительные ЗС), тогда как генераторы (117а) дают тривиальные ЗС.

Замечание 5. Вычисление величин R_u^μ и R_u для семейства $C(1,3)$-преобразований с $S = \tau I$ и с произвольным $\tau \in R^1$ по формулам (35), (36) (т.е. без использования концепции $\bar{\Psi}$ как независимой лагранжевой переменной)

$$\tilde{R}_u = \int d\vec{x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,0}}|\hat{R}_u\Psi(x) \equiv \int d\vec{x}R_u^0(x), \quad R_u^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}\hat{R}_u\Psi, \tag{118}$$

дает следующие выражения для базисных токов:

$$I^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_{,\mu}}\Psi = -\frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \neq 0, \tag{119}$$

$$P^\mu_\rho = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\hat{p}_\rho\Psi, \quad S^\mu_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu S^{\text{кв}}_{\rho\sigma}\Psi, \quad \hat{p}_\mu \equiv i\partial_\mu, \quad S^{\text{кв}} = iS, \tag{120}$$

и, таким образом, законы сохранения получаются в виде

$$I = -\frac{i}{2}\int d^3x\Psi^+\Psi, \tag{121}$$

$$P_\rho = \frac{1}{2}d^3x\Psi^+\hat{p}_\rho\Psi, \tag{122}$$

$$J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\int d^3x\Psi^+(x_\rho\hat{p}_\sigma - x_\sigma\hat{p}_\rho + S^{\text{кв}}_{\rho\sigma})\Psi, \tag{123}$$

$$D = \frac{1}{2}\int d^3x\Psi^+(x^\sigma\hat{p}_\sigma - \tau i)\Psi, \tag{124}$$

$$K_\rho = \frac{1}{2}\int d^3x\Psi^+[2x_\rho(x^\sigma\hat{p}_\sigma - \tau i) - x^2\hat{p}_\rho + 2S^{\text{кв}}_{\rho\sigma}x^\sigma]\Psi. \tag{125}$$

2.3. Конечные преобразования из простейших нелиевских групп инвариантности. Запишем инфинитезимальные $P(1,3)$-преобразования в R_x в форме

$$x \to x' = \phi(x,\alpha) \overset{inf}{=} \varphi^\mu(x,\alpha)\partial_\mu x, \tag{126}$$

где $\varphi^\mu(x,\alpha)\partial_\mu = a^\mu\partial_\mu$ (для трансляций), а $\varphi^\mu(x,\omega)\partial_\mu = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$ (для вращений).

Рассмотрим преобразования $\Gamma^\times P(1,3)$, $\Gamma^\times = \Gamma, \Gamma'$, где

$$\Gamma = \{I, \gamma^2C, i\gamma^2C, i\gamma^4\}, \quad \Gamma^2 = I, \tag{127}$$

$$\Gamma' = \{i, \gamma^4, \gamma^0\gamma^3\gamma^1C, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1C\}, \quad \Gamma'^2 = -I. \tag{128}$$

Орбитальные и спиновые части генераторов $\Gamma^\times P(1,3)$ коммутируют, поэтому конечные преобразования в Φ имеют вид

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\{-a^\mu\Gamma^\times\partial_\mu\}\Psi(x) \equiv \Psi_2(x,a) \tag{129}$$

для “$\Gamma^\times$-трансляций” и

$$\Psi \to \Psi'(x) = T\Psi_2(x,\omega), \quad T \equiv \exp\left\{\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\Gamma^\times S_{\rho\sigma}\right\}, \tag{130}$$

$$\Psi_2(x,\omega) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\Gamma\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right\}\Psi(x), \tag{131}$$

для "$\Gamma^{\times}$-вращений". С учетом $(\Gamma^{\times}\gamma^0\gamma^k)^2 = \pm I$ для $\Gamma^{\times 2} = \pm I$ и $(\Gamma^{\times}\gamma^k\gamma^l)^2 = \mp I$ для $\Gamma^{\times 2} = \pm I$ ряды (130) для $\Gamma^{\times}$-вариаций в фиксированной плоскости $\rho\sigma$ на угол $\omega^{\rho\sigma} = \theta$ имеют вид

$$T \equiv \exp\left\{\frac{1}{2}\theta\Gamma^{\times}\gamma_0\gamma_k\right\} = \begin{cases} \operatorname{ch}\dfrac{\theta}{2} + \Gamma\gamma_0\gamma_k \operatorname{sh}\dfrac{\theta}{2}, & (130\text{а}) \\ \cos\dfrac{\theta}{2} + \Gamma'\gamma_0\gamma_k \sin\dfrac{\theta}{2}, & (130\text{б}) \end{cases}$$

$$T \equiv \exp\left\{\frac{1}{2}\theta\Gamma^{\times}\gamma_k\gamma_l\right\} = \begin{cases} \cos\dfrac{\theta}{2} + \Gamma\gamma_k\gamma_l \sin\dfrac{\theta}{2}, & (130\text{в}) \\ \operatorname{ch}\dfrac{\theta}{2} + \Gamma'\gamma_k\gamma_l \operatorname{sh}\dfrac{\theta}{2}, & (130\text{г}) \end{cases}$$

а ряды $\Psi_2(x,\alpha)$, $\alpha = a, \omega$, имеют вид

$$\Psi_2(x,\alpha) = \begin{cases} [\operatorname{ch}\varphi^{\mu}(x,\alpha)\partial_\mu - \Gamma \operatorname{sh}\varphi^{\mu}(x,\alpha)\partial_\mu]\Psi(x), & (131\text{а}) \\ [\cos\varphi^{\mu}(x,\alpha)\partial_\mu - \Gamma' \sin\varphi^{\mu}(x,\alpha)\partial_\mu]\Psi(x). & (131\text{б}) \end{cases}$$

Формулу (131а) через конечные преобразования аргумента можно записать в виде

$$\Psi_2(x,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\Gamma)\Psi(\phi(x,\alpha)) + \frac{1}{2}(1+\Gamma)\Psi(\phi^{-1}(x,\alpha)), \tag{132}$$

а для функций $\Psi(x)$, аналитических в окрестности R^4_x, формула (131б) выражается через конечные преобразования с чисто мнимым параметром:

$$\Psi_2(x,\alpha) = \frac{1}{2}(1+i\Gamma')\Psi(\phi(x,i\alpha)) + \frac{1}{2}(1-i\Gamma')\Psi(\phi^{-1}(x,i\alpha)).$$

Восстановление конечных $\Gamma^{\times}$-собственно конформных преобразований значительно более громоздко, поскольку в этом случае спиновые и орбитальные части генераторов $\Gamma^{\times}\hat{K}_\mu$ не коммутируют. По этой причине конечные $\Gamma^{\times}$-собственно конформные преобразования здесь не приводим.

В заключении укажем, что выделенные из обвертывающих алгебр подалгебр Ли, порождаемых матрично-дифференциальными операторами первого порядка по переменной x, целесообразно не только потому, что такие подалгебры восстанавливаются до соответствующих групп инвариантности, но и потому, что, как уже упоминалось, оператор самого уравнения Дирака принадлежит этому выделенному классу. Наконец, именно таким симметриям соответствуют дополнительные законы сохранения zilch-типа.

1. Noether E., Invariante Variationsproblem, *Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Göttingen Math.-Phys.*, 1918, **2**, 235–257.
2. Hill E.L., Hamilton's principle and the conservation theorem of mathematical physics, *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**, № 3, 253–260.
3. Schröder U.E., Noether's theorem and the conservation laws in classical field theories, *Fortschr. Phys.*, 1951, **16**, № 6, 357–372.
4. Ибрагимов Н.Х., Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения (замечания к теореме Нетер), *Теор. и мат. физика*, 1969, **1**, № 3, 350–359.
5. Plybon B.F., New approach to the Noether theorem, *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, № 1, 57–60.

6. Lie S., Transformationgruppen, Leipzig, 1883, Bd. 3, 400 s.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
8. Fushchych W.I., On additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
9. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer–Duffin-Petia equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1977, **19**, № 9, 347–352.
10. Фущич В.И., Никитин А.Г., О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака, *Элементар. частицы и атом. ядро*, 1983, **14**, вып. 1, 5–57.
11. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
12. Kibble T.W.B., Conservation laws for free fields, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1022–1026.
13. O'Connel R.F., Tompkins D.R., Generalized conservation laws for free fields with mass, *Nuovo Cim.*, 1965, **39**, № 1, 391–394.
14. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.
15. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О теореме Нетер для преобразований трех типов, Препринт № 85-12, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1985, 61 с.
16. Кривский И.Ю., Теорема Нетер о законах сохранения для нелиевских преобразований инвариантности, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 134–139.
17. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О лагранжевом подходе для электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, Препринт № 85-13, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1985, 53 с.
18. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжиан электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, *Укр. физ. журн.*, 1985, **30**, № 10, 1457–1459.
19. Симулик В.М., Лагранжев и теоретико-алгебраический анализ диракоподобной формы уравнений Максвелла, в Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 130–133.
20. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Инвариантный лагранжиан в электродинамике без потенциалов, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общ. и ядерн. физ.*, 1986, вып. 1, 29–30.
21. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Скалярная функция Лагранжа и законы сохранения для электромагнитного поля в терминах напряженностей, Препринт № 86-35, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1986, 49 с.
22. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Релятивистски инвариантная формулировка лагранжева подхода в электродинамике в терминах напряженностей, Препринт № 86-36, Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1986, 39 с.
23. Фущич В.И., Кривский И.Ю., Симулик В.М., О векторных лагранжианах для электромагнитного и спинорного полей, Препринт № 87.54, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 39 с.
24. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжев и нетеровский анализ поляризационных законов сохранения для электромагнитного поля, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Общ. и ядерн. физ.*, 1988, вып. 1, 44–46.
25. Heaviside O., On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, *Phill. Trans. Roy. Soc. London A*, 1982, **183**, 423–480.
26. Larmor I., Collected papers, London, Clarendon Press, 1928, 275 p.
27. Rainich G.Y., Electrodynamics in the general relativity theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–136.
28. Pohjanpelto J., First order generalized symmetries of Maxwell equations, *Phys. Lett. A*, 1988, **129**, № 3, 148–150.
29. Hojman S., Problem of the identical vanishing of Euler–Lagrange derivatives in field theory, *Phys. Rev. D*, 1983, **27**, № 2, 451–453.
30. Hojman S., Symmetries of Lagrangians and their equations of motion, *J. Phys. A*, 1984, **17**, № 12, 2399–2412.

31. Hojman S., First-order equivalent Lagrangians and conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1983, **25**, № 6, 1776–1779.

32. Good R.H., Particle aspect of the electromagnetic field equations, *Phys. Rev.*, 1957, **105**, № 6, 1914–1919.

33. Fradkin D.M., Conserved quantities assotiated with symmetry transformations of relativistic free-particle equation of motion, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 6, 879–890.

34. O'Connel R.F., Tompkins D.R., Generalized solutions for free Maxwell fields and consequent generalized conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 12, 1952–1954.

35. Хамитов Р.С., Структура группы и базис законов сохранения, *Теор. и мат. физика*, 1982, **52**, № 2, 244–251.

36. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, М., Наука, 1981, 431 с.

37. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантовых полей, М., Наука, 1984, 600 с.