Подалгебры афинной алгебры $AIGL(3, R)$

А.Ф. БАРАННИК, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

В работе проведена классификация с точностью до $IGL(3, R)$-сопряженности всех подалгебр алгебры Ли $AIGL(3, R)$ группы $IGL(3, R)$ неоднородных линейных преобразований вещественного трехмерного пространства. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $AGL(n, R)$ являющейся алгеброй Ли полной линейной группы степени n над R, и изучены их свойства.

Введение

Группа $IGL(4, R)$ неоднородных линейных преобразований вещественного четырехмерного пространства и конформная группа $C(2, 2)$ псевдоевклидова пространства $R_{2,2}$ являются группами инвариантности важных уравнений теоретической и математической физики [1, 2]. Каждая из этих групп содержит в качестве подгруппы группу $IGL(3, R)$ неоднородных линейных преобразований вещественного трехмерного пространства. Поэтому классификация подгрупп группы $IGL(3, R)$ является одним из этапов классификации подгрупп группы $IGL(4, R)$ и $C(2, 2)$. Так как нас интересуют только связные подгруппы группы $IGL(3, R)$, то задача их классификации относительно $IGL(3, R)$-сопряженности сводится к задаче классификации подалгебр алгебры Ли $AIGL(3, R)$ группы $IGL(3, R)$ относительно $IGL(3, R)$-сопряженности.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в [3]. В ней используется ряд общих принципов классификации подалгебр произвольной алгебры Ли, изложенных в работах [4, 5, 6]. В § 1 выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $AGL(n, R)$ являющейся алгеброй Ли полной линейной группы степени n над R, и изучены их свойства. В § 2 подалгебры алгебры $AGL(3, R)$, не являющиеся вполне приводимыми, разбиты на три класса и решена задача классификации подалгебр каждого из этих классов. В § 3 для каждой подалгебры $F \subset AGL(3, R)$ находятся все ее расширения в алгебре $AIGL(3, R)$.

§ 1. Алгебра Ли $AGL(n, R)$. Вполне приводимые подалгебры алгебры $AGL(n, R)$

Пусть $V = R^n$ — n-мерное арифметическое векторное пространство над полем вещественных чисел R, состоящее из n-мерных столбцов, $\{T_1, \ldots, T_n\}$ — базис V, элементы которого являются единичными столбцами, $\mathrm{End}\, V$ — алгебра эндоморфизмов пространства V. Алгебру Ли, ассоциированную с алгеброй $\mathrm{End}\, V$, будем обозначать символом $AGL(V)$. Для всякого $f \in \mathrm{End}\, V$ положим

$$f(T_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} T_k, \quad \alpha_{kj} \in R,$$

т.е.

$$(f(T_1), \ldots, f(T_n)) = (T_1, \ldots, T_n) \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

Препринт 89.65, Киев, Институт математики АН УССР, 1989, 32 с.

Тогда отображение

$$\mathrm{End}\ V \ni f \to A = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(R)$$

является изоморфизмом алгебр End V и $M_n(R)$. Здесь $M_n(R)$ — алгебра квадратных матриц порядка n над полем R. Таким образом, выбирая базис в V, мы можем отождествлять алгебры End V и $M_n(R)$. Аналогично мы отождествляем алгебры Ли $AGL(V)$ и $AGL(n,R)$, ассоциированные соответственно с End V и $M_n(R)$.

Положим $GL(V) = \{S \in AGL(V) \mid \det S \neq 0\}$. Множество $GL(V)$ является мультипликативной группой, которая называется полной линейной группой степени n над полем R и часто обозначается $GL(n,R)$. Группа $GL(n,R)$ содержит подгруппу $SL(n,R)$, состоящую из всех матриц с определителем, равным 1. Она называется специальной линейной группой. Ее алгебра Ли $ASL(n,R)$ определяется как множество всех матриц $X \in AGL(n,R)$ с нулевым следом. Очевидно, имеет место разложение $AGL(n,R) = ASL(n,R) \oplus \langle E_n \rangle$, где E_n — единичная матрица.

Группой $IGL(n,R)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in GL(n,R)$, $Y \in R^n$.

Полагая $[X,Z] = X \cdot Z$, $[Z,Z'] = 0$ для произвольных $X \in AGL(n,R)$, $Z, Z' \in V$, мы превратим. векторное пространство $V \dotplus AGL(n,R)$ в алгебру Ли, которая является алгеброй Ли группы $IGL(n,R)$. Алгебра Ли $AIGL(n,R)$ допускает изоморфное представление матрицами

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & Y_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1 \in AGL(n,R)$, $Y_1 \in R^n$.

Каждый внутренний автоморфизм $g \to hgh^{-1}$ группы Ли G индуцирует автоморфизм $X \to gXg^{-1}$ алгебры Ли AG. Этот автоморфизм мы будем называть G-автоморфизмом алгебры AG и обозначать символом φ_g. Подалгебры L_1 и L_2 алгебры AG будем называть G-сопряженными, если $gL_1g^{-1} = L_2$.

Пусть F — некоторая подалгебра алгебры $AGL(V)$. Подалгебра F называется неприводимой, а пространство V F-неприводимым, если V содержит лишь тривиальные подпространства, инвариантные относительно F. Подалгебра F называется вполне приводимой, если для каждого F-инвариантного подпространства $V_1 \subset V$ сущесвует такое F-инвариантное подпространсво $V_2 \subset V$, что $V = V_1 \oplus V_2$. Если F — вполне приводимая алгебра линейных преобразований векторного пространства V, то пространство V разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ подпространств, каждое из которых инвариантно и неприводимо относительно F. Так как подалгебры алгебры $AGL(V)$ мы изучаем с точностью до $GL(V)$-сопряженности, то в дальнейшем будем предполагать, что $V_1 = \langle T_1, \ldots, T_{k_1} \rangle$, $V_2 = \langle T_{k_1+1}, \ldots, T_{k_1+k_2} \rangle$, $\ldots$, $V_s = \langle T_{\sigma_s+1}, \ldots, T_n \rangle$, $\sigma_s = k_1 + \cdots + k_{s-1}$.

Если $J \in F$, то $\operatorname{ad} J$ можно рассматривать как линейное преобразование $\hat{J}_i$ пространства V_i. Матрица $\pi_i(J)$ преобразования $\hat{J}_i$ в базисе $\{T_{\sigma_i+1}, \dots, T_{\sigma_i+k_i}\}$ пространства V_i содержится в $AGL(V_i)$. Отображение $\pi_i : F \to AGL(V_i)$ является гомоморфизмом, а $\pi_i(F)$ — неприводимой подалгеброй алгебры $AGL(V_i)$. Так как отображение $J \to (\pi_1(J), \dots, \pi_s(J))$ есть изоморфизм F в алгебру $\pi_1(F) \times \dots \times \pi_s(F)$, то будем говорить, что F разлагается относительно базиса $\{T_1, \dots, T_n\}$ в подпрямое произведение алгебр $\pi_1(F), \dots, \pi_s(F)$, и записывать это так:

$$F = \pi_1(F) \underset{\cdot}{\times} \cdots \underset{\cdot}{\times} \pi_s(F). \tag{1.1}$$

Пусть $F_i = \{J \in F' \,|\, \pi_j(J) = 0$ для всех $j \neq i\}$, где $F' = \pi_1(F) \times \cdots \times \pi_s(F)$. Легко видеть, что F_i — подалгебра алгебры F' и что наряду с разложением (1.1) мы имеем разложение $F = F_1 \dotplus \cdots \dotplus F_s$. В дальнейшем алгебры $F_1, \dots, F_s$ будем называть неприводимыми частями алгебры F. Условимся алгебру F_i отождествлять с алгеброй $\pi_i(F)$. В этом смысле будем говорить, что F_i — неприводимая подалгебра алгебры $AGL(V_i)$. Подалгебры F_i и F_j назовем эквивалентными, если $k_i = k_j$ и сущесвует такая матрица $C \in AGL(V_i)$, что $C\pi_i(J)C^{-1} = \pi_j(J)$ для всех $J \in F$. Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве $\{F_1, \dots, F_s\}$ является отношением эквивалентности, а потому оно проводит разбиение множества неприводимых частей алгебры F на классы $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_t$. Если $F_{m_1}, F_{m_1}, \dots, F_{m_{r_i}} \in \mathfrak{A}_i$, то через A_i обозначим подалгебру $A_i = \{J \in F \,|\, \pi_j(J) = 0$ для всех $j \neq m, m_2, \dots, m_{r_i}\}$. Подалгебру A_i назовем примарной частью алгебры F. Очевидно, F является подпрямой суммой своих примарных частей. Разложение $F = F_1 \dotplus \cdots \dotplus A_t$ будем называть каноническим разложеним алгебры F.

Теорема 1.1 *Пусть F — вполне приводимая подалгебра алгебры $AGL(V)$, A_1, …, A_t примарные части P, W — подпространство пространства V, инвариантное относительно F. Тогда $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \oplus W'$, где $[A_i, W_i] = W_i$, $[A_i, W_j] = 0$ при $i \neq j$, $[F, W'] = 0$ $(i, j = 1, \dots, t)$. Если примарная алгебра A является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(V_1)$, $AO(V_2)$, …, $AO(V_q)$, то с точностью до $GL(V)$-сопряженности ненулевые подпространсва U пространства V со свойством $[A, U] = U$ исчерпываются пространствами V_1, $V_1 \oplus V_2$, …, $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_q$.*

Теорема 1.1 решает вопрос о классификации всех подпространств, инвариантных относительно вполне приводимой подалгебры F алгебры $AGL(V)$. Рассмотрим далее вопрос о неращепляемых расширениях подалгебры F. Допустим, что алгебра Ли L является полупрямой суммой идеала V и подалгебры K, где $K \subset AGL(V)$. Пусть π проектирование L на K, а $\hat{F}$ — такая подалгебра L, что $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$. Если для некоторого внутреннего автоморфизма φ алгебры L справедливо равенство $\varphi(\hat{F}) = W \subset\!\!\!\!+ F$, где $W \subset V$, то алгебру $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре L. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset L$, удовлетворяющая условию $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре L.

Теорема 1.2 [3]. *Пусть F вполне приводимая подалгебра алгебры $AGL(V)$, K — произвольная подалгебра алгебры $AGL(V)$ и $F \subset K$. Для того чтобы F обладала только расщепляемыми расширениями в алгебре $\hat{K} = V \subset\!\!\!\!+ K$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: 1) F полупроста; 2) F аннулирует только нулевое подпространство пространства V.*

Теоремы 1.1 и 1.2 сводят задачу классификации относительно $IGL(n,R)$-сопряженности подалгебр $F \subset L$, удовлетворяющих условию $\hat{\pi}(\hat{F}) = F$, где F — вполне приводимая подалгебра алгебры $AGL(n,R)$, к задаче классификации относительно $GL(V)$-сопряженности неприводимых частей подалгебр алгебры $AGL(V)$.

Остановимся на вполне приводимых подалгебр алгебры $AGL(3,R)$. С этой целью выпишем все неприводимые подалгебры алгебр $AGL(3,R)$ и $AGL(2,R)$. Алгебра $ASL(3,R)$ обладает с точностью до $SL(3,R)$-сопряженности тремя неприводимыми подалгебрами:

$$1)\ \ AO(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\}; \quad 2)\ \ AO(2,1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$3)\ \ ASL(3,R).$$

Все эти подалгебры полупросты. Неприводимыми в $AGL(3,R)$ будут только такие подалгебры:

$$1)\ \ AO(3); \quad 2)\ \ AO(3) \oplus \langle S\rangle; \quad 3)\ \ AO(2,1);$$
$$4)\ \ AO(2,1) \oplus \langle S\rangle; \quad 5)\ \ ASL(3,R); \quad 6)\ \ AGL(3,R),$$

где $S = \operatorname{diag}[1,1,1]$.

Алгебра $AGL(2,R)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Базис этой алгебры выберем в следующем виде:

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $AGL(2,R) = ASL(2,R) \oplus \langle \hat{D}\rangle$, где $ASL(2,R) = \langle \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\rangle$. В алгебре $ASL(2,R)$ с точностью до $SL(2,R)$-сопряженности имеются только две неприводимые поалгебры: 1) $AO(2) = \langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3\rangle$; 2) $ASL(2,R) = \langle \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\rangle$. В алгебре $AGL(2,R)$ с точностью до $GL(2,R)$-сопряженности существуют только следующие неприводимые подалгебры: 1) $\langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \alpha\hat{D}\rangle$ $(\alpha \geq 0)$; 2) $\langle \hat{A}_2 + \hat{A}_3, \hat{D}\rangle$; 3) $ASL(2,R)$; 4) $AGL(2,R)$. Таким образом, алгебра $AGL(3,R)$ содержит с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности только следующие максимальные вполне приводимые подалгебры:

$$1)\ \ AO(3) \oplus \langle S\rangle; \quad 2)\ \ AO(2,1) \oplus \langle S\rangle; \quad 3)\ \ ASL(3,R);$$
$$4)\ \ AGL(2,R) \oplus \langle S\rangle; \quad 5)\ \ \langle A_1\rangle \oplus \langle D\rangle \oplus \langle S\rangle,$$

где $A_1 = \operatorname{diag}[\hat{A}_1; 0]$, $D = \operatorname{diag}[\hat{D}; 0]$.

Обозначим класс вполне приводимых подалгебр алгебры $AGL(3,R)$ через $\mathfrak{M}_0$. Из предыдущих результатов получаем полную классификацию подалгебр класса $\mathfrak{M}_0$ с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности, изложеную ниже.

Подалгебры класса $\mathfrak{M}_0$ алгебры $AGL(3,R)$:

$AO(3) \oplus \langle S\rangle$, $AO(2,1) \oplus \langle S\rangle$, $AO(3)$, $AO(2,1)$, $ASL(3,R)$, $AGL(3,R)$,
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S\rangle$ $(\alpha > 0 \ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0)$, $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,

$\langle A_2+A_3+\alpha S, D+\beta S\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3, D, S\rangle$, $ASL(2,R)$, $ASL(2,R)\oplus\langle S\rangle$,
$ASL(2,R)\oplus\langle D+\alpha S\rangle$, $AGL(2,R)\oplus\langle S\rangle$, $\langle S\rangle$, $\langle D+\beta S\rangle$,
$\langle A_1+\alpha D+\beta S\rangle$ $(0<\alpha<1\ \vee\ \alpha=0,\ \beta\geq 0)$,
$\langle A_1+\alpha S, D+\beta S\rangle$ $(\alpha+3\beta+2\geq 0,\ \alpha\geq 0)$, $\langle A_1+\alpha D, S\rangle$ $(0\leq\alpha<1)$,
$\langle D, S\rangle$, $\langle A_1, D, S\rangle$.

§ 2. Подалгебры алгебры $AGL(3,R)$, не являющиеся вполне приводимыми

Пусть F — произвольная подалгебра алгебры $AGL(n,R)$, не являющаяся вполне приводимой, и пусть V_1 — минимальное, отличное от нуля, F-инвариантное подпространство в V. Подпространство V_1 неприводимо относительно F. Пусть, далее, V_2 — минимальное F-инвариантное подпространство в V, содержащее V_1, но не совпадающее с V_1. Так как V_1 — F-инвариантно, то определено действие алгебры F на факторпространстве V_2/V_1, которое будет F-неприводимым. Следовательно, мы можем построить композиционный ряд для V, т.е последовательность $0\subset V_1\subset\cdots\subset V_k\subset V$, состоящую из F-инвариантных подпространств в V и такую, что F действует неприводимо в каждом из факторпространств V_j/V_{j-1}. Ввиду того, что подалгебры алгебры $AGL(V)$ мы изучаем с точностью до $GL(V)$-сопряженности, подпространства V_j можно выбрать таким образом, чтобы для каждого $j=1,2,\ldots,k$ векторы $T_1,\ldots,T_{lj}$ образовывали базис V_j $(l_1<l_2<\cdots<l_k)$. При таком выборе базисов подпространств V_j алгебра F реализуется в базисе $\{T_1,\ldots,T_n\}$ матрицами

$$\begin{pmatrix}\Delta_1 & & & *\\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_k\end{pmatrix},$$

где Δ_j пробегает неприводимую подалгебру алгебры $AGL(V_j/V_{j-1}$. Ее диагональную часть F_0, состоящую из матриц

$$\begin{pmatrix}\Delta_1 & & & 0\\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_k\end{pmatrix},$$

будем называть вполне приводимой частью алгебры F в базисе $\{T_1,\ldots,T_n\}$ (или относительно композиционного ряда $0\subset V_1\subset\cdots\subset V_k\subset V$. Вполне приводимая часть F_0 определяется алгеброй F однозначно с точностью до $GL(n,R)$-сопряженности.

Применительно к алгебре $AGL(3,R)$ рассмотрим такие последовательности подпространств:

$$0\subset\langle T_1,T_2\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle, \tag{2.1}$$

$$0\subset\langle T_1\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle, \tag{2.2}$$

$$0\subset\langle T_1\rangle\subset\langle T_1,T_2\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle. \tag{2.3}$$

Будем говорить, что подалгебра F принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$ (соответственно $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$), если ряд (2.1) (соответственно (2.2) и (2.3)) является композиционным рядом F-модуля V. Любая подалгебра F, относящаяся к классу $\mathfrak{M}_1$, состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & * \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

где Δ пробегает неприводимую подалгебру алгебры $AGL(2,R)$, $a \in R$. Подалгебра F, относящаяся к классу $\mathfrak{M}_2$, состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

где Δ пробегает неприводимую подалгебру алгебры $AGL(2,R)$, $a \in R$. Подалгебра F, относящаяся к классу $\mathfrak{M}_3$, реализуется маматрицами

$$\begin{pmatrix} a & & * \\ & b & \\ 0 & & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in R.$$

Покажем, что подалгебры L_1 и L_2, относящиеся к различным классам, не сопряжены между собой относительно группы $GL(3,R)$. Пусть, например, $L_1 \in \mathfrak{M}_1$, $L_2 \in \mathfrak{M}_2$. Так как L_1 не является вполне приводимой, то V содержит только одно нетривиальное L_1-инвариантное подпространство, совпадающее с $\langle T_1, T_2 \rangle$. Аналогично, V содержит только одно нетривиальное L_2-инвариантное подпространство, совпадающее с $\langle T_1 \rangle$. Отсюда вытекает, что не существует $GL(3,R)$-автоморфизма, который отображал бы L_1 на L_2. Аналогично рассматривается остальные случаи.

Докажем, что задача классификации подалгебр класса $\mathfrak{M}_1$ относительно $GL(3,R)$-сопряженности эквивалентна задаче классификации подалгебр класса $\mathfrak{M}_2$ относительно $GL(3,R)$-сопряженности. С этой целью рассмотрим максимальную подалгебру M_1, относящуюся к классу $\mathfrak{M}_1$. Она совпадает с алгеброй всех матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

где $a_i, b_i, c_i \in R$ и, очевидно, содержит любую подалгебру класса $\mathfrak{M}_1$. Базис алгебры M_1 образуют матрицы S,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \cong AGL(2,R)$, $\langle P_1, P_2 \rangle \subset\!\!\!\!+ \langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \cong AIGL(2,R)$, то алгебра M_1 изоморфна алгебре $AIGL(2,R) \oplus \langle S \rangle$, где S — дилатация. Вполне приводимая часть алгебры M_1 совпадает с $\langle A_1, A_2, A_3, D \rangle \oplus \langle S \rangle \cong AGL(2,R) \oplus \langle S \rangle$.

Пусть $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}_1$ и существует $GL(3,R)$-автоморфизм φ, отображающий L_1 на L_2. Так как, очевидно, $\varphi(\langle T_1, T_2\rangle) = \langle T_1, T_2\rangle$, то, следовательно $\varphi = \varphi_c$ для некоторой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \in \tilde{I}GL(2,R).$$

Таким образом, задача классификации с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности подалгебр класса $\mathfrak{M}_1$ сводится к задаче классификации подалгебр алгебры $AIGL(2,R) \oplus \langle S\rangle$ с точностью до $\tilde{I}GL(2,R)$-сопряженности.

Аналогично, максимальная подалгебра M_2, относящаяся к классу $\mathfrak{M}_2$ совпадает с алгеброй всех матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $a_i, b_i, c_i \in R$. Базис подалгебры M_2 образуют матрицы $S' = S$.

$$A_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Алгебра M_2, изоморфная алгебре $AIGL(2,R) \oplus \langle S'\rangle$ (S' — дилатация), содержит любую подалгебру класса $\mathfrak{M}_2$. Как и выше, доказываем, что классификация подалгебр класса $\mathfrak{M}_2$ с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности сводится к задаче классификации подалгебр алгебры $AIGL(2,R) \oplus \langle S'\rangle$ с точностью до $\tilde{I}GL(2,R)$-сопряженности. Нетрудно убедиться, что линейное отображение

$$f: \ A_1 \to A_1', \ \ A_2 \to A_2', \ \ A_3 \to A_3', \ \ D \to D', \ \ P_1 \to P_1', \ \ P_2 \to P_2', \ \ S \to S$$

является изоморфизмом алгебры M_1 на алгебру M_2. Предположим, что задача классификации подалгебр алгебры M_1 с точностью до $\tilde{I}GL(2,R)$-сопряженности решена. Тогда, используя изоморфизм f, автоматически получаем классификацию подалгебр алгебры M_2 с точностью до $\tilde{I}GL(2,R)$-сопряженности.

Найдем, например, все подалгебры класса $\mathfrak{M}_1$ алгебры M_1 с точностью до $IGL(2,R)$-сопряженности. Так как алгебра $\langle A_1, A_2, A_3, D\rangle$, изоморфная алгебре $AGL(2,R)$, имеет только четыре неприводимых подалгебры (см. § 1) то подалгебры класса $\mathfrak{M}_1$ алгебры M_1 с нулевой проекцией на $\langle S\rangle$ исчерпываются с точностью до $IGL(2,R)$-сопряженности такими подалгебрами:

$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$, $\langle A_2 + A_3 + D, P_1, P_2\rangle$,
$AISL(2,R) = \langle P_1, P_2\rangle \subset\!\!\!\!+ \ ASL(2,R)$, $AIGL(2,R) = \langle P_1, P_2\rangle \subset\!\!\!\!+ \ AGL(2,R)$.

Расширяя эти подалгебры с помощью генератора S, получаем такие подалгебры класса $\mathfrak{M}_1$ алгебры M_1:

$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha > 0 \ \vee \ \alpha = 0, \ \beta \geq 0)$,

$\langle A_2+A_3+\alpha D, S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0)$, $\langle A_2+A_3, D, S, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_2+A_3+\alpha S, D+\beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \beta\in R)$,
$AISL(2,R)\oplus\langle S\rangle$, $AISL(2,R)=\langle P_1,P_2\rangle \uplus ASL(2,R)$,
$AIGL(2,R)\oplus\langle S\rangle$, $AISL(2,R)\oplus\langle D+\alpha S\rangle$ $(\alpha\in R)$.

Заменив в этих подалгебрах все генераторы на генераторы со штрихами, получаем классификацию подалгебр класса $\mathfrak{M}_2$ с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности.

Перейдем к рассмотрению подалгебр класса $\mathfrak{M}_3$. Пусть F — одна из таких подалгебр. По определению F-модуль V обладает композиционным рядом.

$$0\subset\langle T_1\rangle\subset\langle T_1,T_2\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle. \tag{2.4}$$

Элемент $\varphi\in GL(V)$, оставляющий инвариантным ряд (2.4), будем называть автоморфизмом этого ряда. Множество всех автоморфизмов ряда (2.4) образует группу, которую обозначим через G_1. Группа G_1 состоит, очевидно, из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix}\alpha & & *\\ & \beta & \\ 0 & & \gamma\end{pmatrix},$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

Предположим, что для F-модуля V существует еще некоторый композиционный ряд, отличный от ряда (2.4). С точностью до сопряженности относительно группы G_1 можно считать, что этот ряд имеет вид

$$0\subset\langle T_{i_1}\rangle\subset\langle T_{i_1},T_{i_2}\rangle\subset\langle T_{i_1},T_{i_2},T_{i_3}\rangle, \tag{2.5}$$

где i_1, i_2, i_3 — некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Элемент $\varphi\in GL(V)$, отображающий ряд (2.4) на ряд (2.5), т.е. удовлетворяющий условиям $\varphi(\langle T_1\rangle)=\langle T_{i_1}\rangle$, $\varphi(\langle T_1,T_2\rangle)=\langle T_{i_1},T_{i_2}\rangle$, будем называть изоморфизмом ряда (2.4) на ряд (2.5). Пусть φ_1, φ_2 — два произвольных изоморфизма ряда (2.4) на ряд (2.5). Тогда $\varphi_1^{-1}\varphi_2$ является автоморфизмом композиционного ряда (2.4), и потому $\varphi_1^{-1}\varphi_2\in G_1$. Следовательно, $\varphi_2\in\varphi_1 G_1$ и, значит, множество всех изоморфизмов ряда (2.4) на ряд (2.5) образует смежный класс группы $GL(V)$ по подгруппе G_1. В качестве представителя этого смежного класса можно взять изоморфизм θ, удовлетворяющий условиям: $\theta(T_1)=T_{i_1}$, $\theta(T_2)=T_{i_2}$, $\theta(T_3)=T_{i_3}$. Изоморфизм θ можем рассматривать как подстановку $\theta=\begin{pmatrix}T_1 & T_2 & T_3\\ T_{i_1} & T_{i_2} & T_{i_3}\end{pmatrix}$, т.е. как элемент симметрической группы S_3. Обратно, любую подстановку $\theta\in S_3$ мы можем рассматривать как изоморфизм ряда (2.4) на некоторый ряд (2.5). В частности, можно считать, что $S_3\subset GL(V)$.

Теорема 2.1. *Если подалгебры $L_1,L_2\in\mathfrak{M}_3$ сопряжены относительно группы $GL(3,R)$-автоморфизмов, то они сопряжены и относительно группы $\{G_1,S_3\}$. Здесь $\{G_1,S_3\}$ группа, порожденная подгруппами G_1 и S_3.*

Доказательство. Пусть f — $GL(3,R)$-автоморфизм, отображающий алгебру $L_1\in\mathfrak{M}_3$ на алгебру $L_2\in\mathfrak{M}_3$. Если

$$K_0:\quad 0\subset\langle T_1\rangle\subset\langle T_1,T_2\rangle\subset\langle T_1,T_2,T_3\rangle$$

— единственный композицинный ряд L_1-модуля V, то этим же свойством обладает и L_2-модуль V. Следовательно, f является автоморфизмом ряда K_0, а потому

$f \in G_1$. Предположим, далее, что $f(K_0) \neq K_0$. Тогда существует композиционный ряд K_1' L_1-модуля V, отличный от ряда K_0. Не нарушая общности, можно считать, что $f(K_1') = K_0$, $f(K_0) = K_2$, где K_2'-композиционный ряд L_2-модуля V. Нетрудно убедиться, что существует автоморфизм $\theta_1 \in G_1$, отображающий композиционный ряд K_1' на композиционный ряд

$$K_1: \quad 0 \subset \langle T_{i_1} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle \subset \langle T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3} \rangle,$$

где i_1, i_2, i_3 некоторая перестановка символов 1, 2, 3. Аналогично, существует автоморфизм $\theta_2 \in G_1$, отображающий композиционный ряд K_2' на

$$K_2: \quad 0 \subset \langle T_{j_1} \rangle \subset \langle T_{j_1}, T_{j_2} \rangle \subset \langle T_{j_1}, T_{j_2}, T_{j_3} \rangle.$$

Обозначим через L_1' и L_2' подалгебры $L_1' = \theta_1(L_1)$ и $L_2' = \theta_2(L_2)$. Автоморфизм $f' = \theta_2 f \theta_1^{-1}$ отображает L_1' на L_2' и $f'(K_0) = K_2$, $f'(K_1) = K_0$. Отсюда вытекает, что $f' = \theta\psi$, где $\theta \in S_3$, $\psi \in G_1$. Но тогда $\theta_2 f \theta_1^{-1} = \theta\psi$, откуда $f = \theta_2^{-1}\theta\psi\theta_1$, а значит, $f \in \{G_1, S_3\}$. Теорема доказана.

Пусть $L_1, L_2 \in \mathfrak{M}_3$ — две произвольные подалгебры, которые не сопряжены относительно группы G_1 автоморфизмов композиционного ряда K_0, но сопряжены относительно группы $\{G_1, S_3\}$. Из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что L_1-модуль V и L_2-модуль V имеют по крайней мере два общих композиционных ряда K_0 и K_1, причем можно предполагать, что автоморфизм $\theta \in S_3$, отображающий L_1 на L_2, отображает K_0 на K_1. Но тогда f отображает вполне приводимую часть алгебры L_1 относительно композиционного ряда K_0 на вполне приводимую часть алгебры L_2 относительно композиционного ряда K_1. Поэтому класс подалгебр $\mathfrak{M}_3$ можем разбить на четыре подкласса в зависимости от от структуры вполне приводимой части подалгебры.

Если вполне приводимая часть алгебры $L \in \mathfrak{M}_3$ нулевая, то L_1 отнесем к классу $\mathfrak{M}_{3,0}$. Если вполне приводимая часть алгебры $L \in \mathfrak{M}_3$ совпадает с алгеброй $\langle S \rangle$, то L отнесем к классу $\mathfrak{M}_{3,1}$. Класс $\mathfrak{M}_{3,2}$ образуют те подалгебры $L \in \mathfrak{M}_3$, вполне приводимая часть которых сопряжена с одной из следующих алгебр: $\langle D + \beta S \rangle$, $\langle A_1 + D + \beta S \rangle$, $\langle A_1 - D + \beta S \rangle$ ($\beta \in R$), $\langle A_1 - D, S \rangle$, $\langle A_1 + D, S \rangle$, $\langle D, S \rangle$. Все остальные подалгебры множества $\mathfrak{M}_3$, не содержащиеся ни в одном из классов $\mathfrak{M}_{3,0}$, $\mathfrak{M}_{3,1}$, и $\mathfrak{M}_{3,2}$, отнесем к классу $\mathfrak{M}_{3,3}$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что если подалгебры L_1 и L_2 принадлежат различным классам $\mathfrak{M}_{3,i}$ и $\mathfrak{M}_{3,j}$ ($i \neq j$; $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$), то они не сопряжены между собой относительно группы $GL(3, R)$-автоморфизмов.

В результате получаем полную классификацию подалгебр алгебры $AGL(3, R)$, не являющихся вполне приводимыми. Если речь идет о подалгебрах $U_1 \subset\!\!\!\!+ F$, $\ldots, U_s \subset\!\!\!\!+ F$, то будем употреблять обозначение $F : U_1, \ldots, U_s$.

1) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_1$ алгебры $AGL(3, R)$:

$\langle A_2 + A_3, D, S, P_1, P_2 \rangle$, $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$ ($\alpha > 0 \ \vee \ \alpha = 0, \ \beta \geq 0$),
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2 \rangle$ ($\alpha \geq 0$), $\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2 \rangle$ ($\alpha \geq 0$),
$AISL(2, R) \oplus \langle S \rangle$, $AISL(2, R) = \langle P_1, P_2 \rangle \subset\!\!\!\!+ ASL(2, R)$,
$AISL(2, R) \oplus \langle S \rangle$, $AISL(2, R) \oplus \langle D + \alpha S \rangle$ ($\alpha \in R$).

2) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_2$ алгебры $AGL(3, R)$:

$\langle A_2' + A_3' + \alpha D' + \beta S, P_1', P_2' \rangle$ ($\alpha > 0 \ \vee \ \alpha = 0, \ \beta \geq 0$),
$\langle A_2' + A_3' + \alpha D', S, P_1', P_2' \rangle$ ($\alpha \geq 0$), $\langle A_2' + A_3' + \alpha S, D' + \beta S, P_1', P_2' \rangle$ ($\alpha \geq 0$),

$\langle P_1', P_2'\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle A_1', A_2', A_3'\rangle \oplus \langle S\rangle)$, $\langle A_2' + A_3', D', S, P_1', P_2'\rangle$,
$AISL(2,R) = \langle P_1', P_2'\rangle \subset\!\!\!\!+ \langle A_1', A_2', A_3'\rangle$, $\langle P_1', P_2'\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle A_1', A_2', A_3'\rangle \oplus \langle D' + \alpha S\rangle)$,
$\langle P_1', P_2'\rangle \subset\!\!\!\!+ (\langle A_1', A_2', A_3'\rangle \oplus \langle D'\rangle \oplus \langle S\rangle)$.

3) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_{3,0}$ алгебры $AGL(3,R)$:

$\langle A_3\rangle$, $\langle A_3 + P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3, P_1\rangle$, $\langle A_3 + P_2, P_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$.

4) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_{3,1}$ алгебры $AGL(3,R)$:

$\langle S\rangle$: $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3 + P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3, P_1\rangle$, $\langle A_3 + P_2, P_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle S + A_3\rangle$: 0, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3 + P_2, P_1\rangle$;
$\langle S + A_3 + P_2\rangle$: 0, $\langle P_1\rangle$; $\langle S + P_1\rangle$: $\langle P_2\rangle$, $\langle A_3 + P_2\rangle$; $\langle S + P_2, A_3, P_1\rangle$.

5) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_{3,2}$ алгебры $AGL(3,R)$:
$\langle D + \beta S, sS\rangle$: $\langle P_1\rangle$, $\langle A_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3, P_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle D + \beta S + A_3, sS\rangle$: 0, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$;
$\langle D + \alpha A_3, S + A_3\rangle$: 0, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$;
$\langle A_1 + D + \beta S, sS\rangle$: $\langle P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle A_1 + D + \beta S + P_1, sS, P_2\rangle$, $\langle A_1 + D + \alpha P_1, S + P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1 - D + \beta S, sS\rangle$: $\langle A_3, P_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle A_1 - D + \beta S, P_2, sS, A_3, P_1\rangle$, $\langle A_1 - D + \alpha P_2, S + P_2, A_3, P_1\rangle$ $(s = 0, 1)$.

6) Подалгебры класса $\mathfrak{M}_{3,3}$ алгебры $AGL(3,R)$:
$\langle A_1 + \alpha D, S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1 \ \vee\ \alpha = 0,\ \beta \geq 0)$,
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1\rangle$ $(-1 < \alpha < 3,\ \alpha \neq 1 \ \vee\ \alpha = 3,\ \beta \geq -2)$,
$\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1;\ s = 0, 1)$: $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle A_1 - 3D + \beta S, sS\rangle$ $(s = 0, 1)$: $\langle A_3 + P_2\rangle$, $\langle A_3 + P_2, P_1\rangle$;
$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1\rangle$ $(\alpha + 3\beta + 2 \geq 0)$;
$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S\rangle$: $\langle A_3\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle A_1, D, S\rangle$: $\langle A_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle A_3, P_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2\rangle$.

§ 3. Подалгебры алгебры $AIGL(3,R)$

Пусть L — произвольная подалгебра алгебры $AIGL(3,R) = V \subset\!\!\!\!+ AGL(3,R)$, π — проектирование L на $AGL(3,R)$. Если $\pi(L) = F$, то L будем называть расширением подалгебры F в алгебре $AIGL(3,R)$. В §§ 1, 2 были изучены подалгебры алгебры $AGL(3,R)$ с точностью до $GL(3,R)$-сопряженности. В настоящем параграфе для каждой подалгебры $F \subset AGL(3,R)$ мы опишем с точностью до $IGL(3,R)$-сопряженности все ее расширения в алгебре $AIGL(3,R)$. Все подалгебры алгебры $AIGL(3,R)$ разобъем на четыре класса. Будем говорить, что подалгебра $L \subset AIGL(3,R)$ принадлежит классу $\tilde{\mathfrak{M}}_i$, если L является расширением подалгебры F класса $\mathfrak{M}_i$ алгебры $AGL(3,R)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. В соответствии с разбиением класса $\mathfrak{M}_i$ на подклассы $\mathfrak{M}_{3,0}$, $\mathfrak{M}_{3,1}$, $\mathfrak{M}_{3,2}$, и $\mathfrak{M}_{3,3}$ класс $\tilde{\mathfrak{M}}_3$ подалгебр алгебры $AIGL(3,R)$ разбивается на подклассы $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,0}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,2}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,3}$.

Задача описания всех расширений вполне приводимой подалгебры алгебры $AGL(3,R)$ решена в § 1. Поэтому остановимся на описании расширений подалгебр, относящихся к одному из классов $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$. Рассмотрим наиболее характерные случаи, встречающиеся при решении вышеуказанной задачи. Пусть, например, $F = \langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S, P_1, P_2\rangle$. Подалгебра F относится к классу

$\mathfrak{M}_1$. Изучение расщепляемых расширений подалгебры F сводится к нахождению подпространств пространства V, инвариантных отностительно F. Из определения класса $\mathfrak{M}_1$ вытекает, что V содержит только следующие F-инвариантные подпространства: 0, $\langle T_1, T_2\rangle$, V. Следовательно, получаем такие расщепляемые расширения подалгебры Опишем нерасщепляемые расширения подалгебры F: F, $\langle T_1, T_2\rangle \mathbin{+\!\!\!\!\supset} F$, $V \mathbin{+\!\!\!\!\supset} F$.

Опишем нерасщепляемые расширения подалгебры F. Вполне приводимая часть F_0 подалгебры F равна $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S\rangle$. Если $\beta \neq 0$, то подалгебра F_0 аннулирует только нулевое подпространство пространства V. Но тогда в силу теоремы 1.2 подалгебра F_0 обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AIGL(3, R)$. Следовательно, можно предполагать, что подалгебра $L \subset AIGL(3, R)$, удовлетворяющая условию $\pi(L) = F$, разлагается в полупрямую сумму $L = N \mathbin{+\!\!\!\!\supset} F_0$, где $N \subset \langle P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$. Отсюда вытекает, что L расщепляемое расширение подалгебры F, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает, что $\beta = 0$. Подалгебра L содержит генератор $A_2 + A_3 + \alpha D + \gamma T_3$. Если $L \cap V = 0$, то отсюда вытекает, что L сопряжена с подалгеброй а если $\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1\rangle$, а если $L \cap V = \langle T_1, T_2\rangle$, то L сопряжена с подалгеброй $\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \gamma T_3, P_1 + P_2, T_1 - T_2\rangle$ $(\gamma \neq 0)$. Используя автоморфизм φ_c, определяемый матрицей $C = \operatorname{diag}[a, a, a]$, можно считать, что $\gamma = 1$.

Пусть $F = \langle A_2 + A_3 + \alpha D, S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$. Алгебра L, являющаяся расширением подалгебры F, содержит S, а потому L-расщепляемое расщрение подалгебры F. Все остальные случаи рассматриваются аналогично. В результате получаем полную классификацию подалгебр алгебры $AIGL(3, R)$ с точностью до $IGL(3, R)$-сопряженности изложенную ниже. Подпространство $\langle T_{i_1}, \ldots, T_{i_k}\rangle$ будем обозначать $(i_1, \ldots, i_k)$.

1) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,0}$ алгебры $AIGL(3, R)$:

$\langle A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_3 + T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle A_3 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_3 + P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_3 + P_2 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle P_1 + \varepsilon_1 T_2, P_2 + \varepsilon_2 T_3, T_1\rangle$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0)$,
$\langle P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2\rangle$, $\langle P_1 + T_2, P_2 + \varepsilon T_1\rangle$ $(\varepsilon = 0, 1)$,
$\langle P_1, P_2 + T_2\rangle$, $\langle A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_3 + T_3, P_1 + T_3, T_1, T_2\rangle$, $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_3, P_1 + T_3, T_1, T_2\rangle$, $\langle A_3 + T_2, P_1 + T_2 + \gamma T_3, T_1\rangle$ $(\gamma \neq 0)$,
$\langle A_3 + T_2, P_1 \pm T_3\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1 + \beta T_3, P_1 + T_2, T_1\rangle$ $(0 < |\beta| \leq 1)$,
$\langle A_3 + T_3, P_1 + T_2\rangle$, $\langle A_3 + T_3, P_1, T_1\rangle$,
$\langle A_3 + T_2, P_1\rangle$: 0, (1);
$\langle A_3 + P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_3 + P_2, P_1 + T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1 + \gamma T_2, T_1\rangle$, $\langle A_3 + P_2, P_1 + T_2, T_1\rangle$,
$\langle A_3 + P_2, P_1 + T_1\rangle$, $\langle A_3 + P_2 + T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);

$\langle A_3+T_2, P_1, P_2+T_1\rangle$, $\langle A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$, $\langle A_3, P_1, P_2+T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_3+T_3, P_1, P_2+T_3, T_1, T_2\rangle$, $\langle A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_3+\varepsilon_1 T_2+\varepsilon_2 T_3, P_1-\varepsilon_2 T_2, P_2+\varepsilon_3 T_3, T_1\rangle$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3=0,1;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3>0)$ (1), (1,2), (1,2,3).

2) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,1}$ алгебры $AIGL(3,R)$:

$\langle S, A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle S, A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle S+A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle S+A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3, A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+A_3+P_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_1, A_3+P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle S+P_2, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);

3) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,2}$ алгебры $AIGL(3,R)$:

$\langle D+\beta S, sS, P_1\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (2), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D-S+T_1, P_1\rangle$: 0, (2);
$\langle D-S+T_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,3);
$\langle D+S, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (2), (1,2);
$\langle D+T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$, $\langle D+T_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D, P_1+T_2\rangle$: 0, (1), (1,3);
$\langle D+\beta S, sS, A_3\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D-S+T_2, A_3\rangle$: (1), (1,3);
$\langle D-S+T_2, A_3+T_2\rangle$: (1), (1,3);
$\langle D-S+T_1, A_3\rangle$: 0, (3);
$\langle D-S+T_1, A_3+T_2\rangle$: 0, (3);
$\langle D-S, A_3+T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle D+\varepsilon_1 T_3, A_3+\varepsilon_2 T_3\rangle$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2=0,1;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0)$: 0, (1), (1,2);
$\langle D, S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D+\beta S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D-S+T_1, P_1, P_2\rangle$, $\langle D-S+T_2, P_1, P_2, T_1\rangle$,
$\langle D+S, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2); $\langle D+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle D, P_1+T_2, P_2, T_1\rangle$, $\langle D, P_1+T_2, P_2+\varepsilon T_1\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$,
$\langle D+\beta S, sS, A_3, P_1\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+S, A_3, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D-S+T_2, A_3+sT_2, P_1\rangle$: (1), (1,3);
$\langle D-S+T_1, A_3+\varepsilon T_2, P_1\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$, $\langle D, P_1+T_1, P_2\rangle$,
$\langle D-S, A_3+T_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,3);
$\langle D+sT_3, A_3+T_3, P_1+\gamma T_2, T_1\rangle$ $(s=0,1)$,

$\langle D+T_3, A_3, P_1+sT_2, T_1\rangle$ $(s=0,1)$,
$\langle D, A_3, P_1+T_2\rangle$: (1), (1,3); $\langle D, A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$,
$\langle D+T_3, A_3+sT_3, P_1, T_1, T_2\rangle$ $(s=0,1)$,
$\langle D+\beta S, sS, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D-S+T_2, A_3+sT_2, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: (1);
$\langle D-S+T_1, A_3+sT_2, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$,
$\langle D-S, A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$: 0, (1); $\langle D, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle D+T_3, A_3+sT_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(s=0,1)$,
$\langle D, A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$, $\langle D, A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$,
$\langle D, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle D+S, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D+\beta S+A_3, sS\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D-S+A_3+T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle D+A_3+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D+\beta S+A_3, sS, P_1\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D-S+A_3+T_2, P_1\rangle$: 0, (1), (1,3);
$\langle D+A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$, $\langle D+A_3+T_3, P_1+\beta T_2, T_1\rangle$,
$\langle D+A_3, P_1+T_2\rangle$: (1), (1,3); $\langle D+A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle D+S+A_3, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle D+\beta S+A_3, sS, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle D-S+A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle D+S+A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle D+A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$, $\langle D+A_3+T_3, P_1-T_2, P_2, T_1\rangle$,
$\langle D+A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle D+\alpha A_3, S+A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\alpha A_3, S+A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle D+\alpha A_3, S+A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1+D+\beta S, sS, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);
$\langle A_1+D+2S, P_2+T_1\rangle$: 0, (2), (2,3);
$\langle A_1+D+2S, P_2+T_3\rangle$: 0, (1), (2), (1,2);
$\langle A_1+D-2S+T_2, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1+D+T_3, P_2\rangle$: (2), (1,2);
$\langle A_1+D+T_1, P_2\rangle$: 0, (2), (2,3);
$\langle A_1+D+\beta S, sS, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_1\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+D-2S+\varepsilon_1T_2, P_1+\varepsilon_2T_2, P_2\rangle$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2=0,1;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0)$: 0, (1);
$\langle A_1+D+T_3, P_1+\varepsilon T_3, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$,
$\langle A_1+D+T_1, P_1+\varepsilon T_3, P_2, T_2\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$,
$\langle A_1+D, P_1+T_3, P_2\rangle$: (2), (1,2);
$\langle A_1+D+\varepsilon_1T_1, P_1+\varepsilon_2T_1, P_2\rangle$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2=0,1;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0)$,
$\langle A_1+D+\beta S, sS, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+D-4S, A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1+D+T_1, P_1, P_2, T_2\rangle$,
$\langle A_1+D-2S+\varepsilon_1T_2, A_3+\varepsilon_2T_3, P_1-\varepsilon_2T_2, T_1, P_2\rangle$ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2=0,1;\ \varepsilon_1+\varepsilon_2>0)$;
$\langle A_1+D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_3, A_3\rangle$: (1), (1,2);

$\langle A_1+D+2S, P_1, P_2+T_1, A_3\rangle$,
$\langle A_1+D+T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1+D+T_1, A_3, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1+D+\beta S+P_1, sS, P_2\rangle$ $(s=0,1)$; 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+D-2S+P_1+T_2, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1+D+P_1+T_3, P_2\rangle$: (2), (1,2);
$\langle A_1+D+P_1, P_2+T_2\rangle$,
$\langle A_1+D+2S+P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+D+2S+P_1, P_2+T_1\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+D+\alpha P_1, S+P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D+\beta S, sS, A_3, P_1\rangle$ $(s=0,1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D+T_3, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1-D-2S, A_3, P_1+T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+\varepsilon T_2, P_1+T_3\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+\gamma T_2, P_1+T_2+T_3, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+\varepsilon T_2, P_1+T_3, T_1\rangle$ $(\varepsilon=0,1)$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+\beta T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$ $(|\beta|\le|1)$,
$\langle A_1-D+\beta S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D, S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D+2S, A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$,
$\langle A_1-D+2S+T_1, A_3, P_1, P_2\rangle$, $\langle A_1-D+2S+T_1, A_3, P_1\rangle$,
$\langle A_1-D+2S+T_1, A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$,
$\langle A_1-D+T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D+T_3, A_3, P_1, P_2+T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D+T_2, A_3, P_1, P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D+T_2, A_3, P_1, P_2, +T_3, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_2, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_2, P_1, P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1-T_2, T_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_2+T_3, P_1-T_2, T_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1-D-2S, A_3+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D+\beta S+P_2, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D+P_2, S, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-D+2S+P_2+T_1, A_3, P_1\rangle$,
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+T_2, P_1\rangle$,
$\langle A_1-D+P_2+T_3, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+\gamma T_2+T_3, P_1-T_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+T_2, P_1, T_1\rangle$,
$\langle A_1-D-2S+P_2, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-D+\alpha P_2, S+P_2, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3).

4) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_{3,3}$ алгебры $AIGL(3,R)$:

$\langle A_1+\alpha D+\beta S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\ne1,\ \vee\,\alpha=0,\ \beta>0)$: 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha D+(1-\alpha)S+T_1, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\ge0,\ \alpha\ne1)$: 0, (2);

$\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, P_1 + T_2, P_2\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D - (1+\alpha)S + T_2, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1);
$\langle A_1 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, P_2\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1);
$\langle A_1 + 3D + 2S, P_1 + T_3, P_2 + T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D + (\alpha-1)S, P_1 + T_3, P_2\rangle$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$: (2), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D + 2S, P_1, P_2 + T_1\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$: 0, (2);
$\langle A_1 + \alpha D, P_1, P_2 + T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + (\alpha+1)S, P_1, P_2 + T_3\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$: (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D, S, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, A_3, P_1\rangle$ $(-1 < \alpha < 3,\ \alpha \neq 1\ \vee\ \alpha = 3,\ \beta > -2)$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1 + 3D - 2S, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, P_1 + T_2, A_3 + T_3\rangle$,
$\langle A_1 - S + T_2, P_1 + T_3, A_3, T_1\rangle$,
$\langle A_1 + 2S, D, A_3, P_1, P_2 + T_1\rangle$,
$\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D - (1+\alpha)S + T_2, P_1, A_3\rangle$ $(-1 < \alpha < 3,\ \alpha \neq 1)$: (1), (1,3);
$\langle A_1 + \alpha D + (1-\alpha)S + T_1, A_3, P_1\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3, P_1\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$: (1), (1,3);
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + T_3\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3 + \gamma T_3, T_1\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1 + T_2, A_3, T_1, T_3\rangle$ $(-1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + (\alpha-1)S, P_1 + T_3, A_3\rangle$ $(1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D - (3+\alpha)S, P_1, A_3 + T_2\rangle$ $(1 < \alpha < 3,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1), (1,3);
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, P_1, A_3 + T_3\rangle$ $(1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$: (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D, S, A_3, P_1\rangle$ $(1 < \alpha \leq 3,\ \alpha \neq 1)$: 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS, A_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1;\ s = 0, 1)$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1 + 3D - 2S + T_1, A_3 + T_3\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D + (1-\alpha)S + T_1, A_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: 0, (3);
$\langle A_1 + \alpha D - (1+\alpha)S + T_2, A_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: (1), (1,3);
$\langle A_1 - 3D + T_3, A_3 + T_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D - (3+\alpha)S, A_3 + T_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha D + \beta S, sS, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1;\ s = 0, 1)$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 + \alpha D + (1-\alpha)S + T_1, A_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D - (1+\alpha)S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D + T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$,
$\langle A_1 - 5D + 2S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_1\rangle$,
$\langle A_1 - 3D, A_3 + T_2, P_1 + T_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1 - 2D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2 + T_3, T_1\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D - (3+\alpha)S, A_3 + T_2, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$: 0, (1);
$\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2 + T_3, T_1\rangle$,
$\langle A_1 - 3D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2 + T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$,
$\langle A_1 + \alpha D - 2S, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \neq \pm 1)$,

$\langle A_1+\alpha D+2S, A_3, P_1, P_2+T_1\rangle$ ($\alpha\neq\pm1$),
$\langle A_1+\alpha D+(\alpha+1)S, A_3, P_1, P_2+T_3\rangle$ ($\alpha\neq\pm1$): (1), (1,2);
$\langle A_1-3D+\beta S, sS, A_3+P_2\rangle$ ($s=0,1$): 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-3D+4S+T_1, A_3+P_2\rangle$,
$\langle A_1-3D+2S+T_2, A_3+P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-3D+T_3, A_3+P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1-3D+\beta S, sS, A_3+P_2, P_1\rangle$ ($s=0,1$): 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-3D+4S+T_1, A_3+P_2, P_1\rangle$,
$\langle A_1-3D+2S+T_2, A_3+P_2, P_1, T_1\rangle$,
$\langle A_1-3D+T_3, A_3+P_2, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-3D, A_3+P_2, P_1+T_1\rangle$,
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3, P_1+T_2\rangle$,
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+\beta T_3, P_1+T_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-3D-2S, A_3+P_2+T_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1-3D-4S, A_3+P_2, P_1+T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1, D+T_3, A_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1, D, S, A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2) (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D, S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+\alpha S, D+\beta S, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha\geq 0$; $(\alpha;\beta)\neq(0;0)$; $(0;-2)$): 0, (1), (2), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1, D-2S, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+2S, D, P_1, P_2+T_1\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+S, D+S, P_1, P_2+T_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+S+T_1, D-S+\beta T_1, P_1, P_2\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+S, D-S+T_1, P_1, P_2\rangle$: 0, (2);
$\langle A_1+T_3, D+\beta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1, D+T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$, $\langle A_1, D, P_1, P_2+T_2\rangle$,
$\langle A_1+\alpha S, D+\beta S, A_3, P_1\rangle$ ($\alpha+3\beta+2\geq 0$; $(\alpha;\beta)\neq(-2;0)$; $(1;-1)$): 0, (1), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1-2S, D, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1+S, D-S, A_3, P_1\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1-2S, D, A_3+T_3, P_1+T_2\rangle$,
$\langle A_1-2S, D, A_3, P_1+T_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-2S, D, A_3+T_3, P_1+\beta T_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1-2S, D, A_3+T_3, P_1, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1-S, D+S, P_1+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1+S+T_1, D-S+\beta T_1, A_3, P_1\rangle$,
$\langle A_1+S, D-S+T_1, A_3, P_1\rangle$,
$\langle A_1+T_3, D+\beta T_3, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1, D+T_3, A_3, P_1\rangle$: (1), (1,2);
$\langle A_1+\alpha S, D+\beta S, A_3\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);
$\langle A_1-3S, D-S, A_3+T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3);
$\langle A_1-2S, D, A_3+T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1-S+T_2, D-S+\beta T_2, A_3\rangle$: (1), (1,3);

$\langle A_1 - S, D - S + T_2, A_3\rangle$: (1), (1,3);
$\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, A_3\rangle$: 0, (3);
$\langle A_1 + S, D - S + T_1, A_3\rangle$: 0, (3);
$\langle A_1 + T_3, D + \beta T_3, A_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1, D + T_3, A_3\rangle$: 0, (1), (1,2);
$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S, A_3, P_1, P_2\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_1 - 3S, D - S, A_3 + T_2, P_1, P_2\rangle$: 0, (1);
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1 - T_2, P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1 - 2S, D, A_3 + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_1 - S + T_2, D - S + \beta T_2, A_3, P_1, P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1 - S, D - S + T_2, A_3, P_1, P_2, T_1\rangle$,
$\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1, A_3, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1 + S, D - S + T_1, A_3, P_1, P_2\rangle$,
$\langle A_1 + S, D + S, A_3, P_1, P_2 + T_3\rangle$: (1), (1,2);

5) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ алгебры $AIGL(3,R)$:

F: 0, (1,2), (1,2,3) (F — подалгебра класса $\tilde{\mathfrak{M}}_1$);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, P_1 + T_2, P_2 - T_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A_2 + A_3, D, P_1 + T_2, P_2 - T_1\rangle$, $\langle A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, D + T_3, T_1, T_2\rangle$,
$\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \delta T_3, P_1, P_2, T_1, T_2\rangle$ $(\delta \geq 0)$, $\langle A_2 + A_3, D + T_3, T_2, P_2, T_1, P_1\rangle$.

6) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_k$ алгебры $AIGL(3,R)$:

F: 0, (1), (1,2,3) (F — подалгебра класса $\tilde{\mathfrak{M}}_2$);
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + T'_1, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3 + T_1, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2\rangle$, $\langle A'_2 + A'_3 + T_1, D' + \alpha T_1, P'_1, P'_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\alpha > 0)$.
$\langle A'_2 + A'_3, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3 + \alpha D' + 2\alpha S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2\rangle$, $\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, -T_2\rangle$,
$\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_2 + \beta T_3, P'_2 - \beta T_2 + T_3, T_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$,
$\langle A'_2 + A'_3, D' + 2S, P'_1 + T_3, P'_2 - T_2, T_1\rangle$
$\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, T_1\rangle$, $\langle A'_1, A'_2, A'_3, D' + T_1, P'_1, P'_2\rangle$,
$\langle A'_1, A'_2, A'_3, P'_1 + T_2, P'_2 + T_3, D' + 2S, T_1\rangle$,

7) Подалгебры класса $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ алгебры $AIGL(3,R)$:

$AO(3)$: 0, (1,2,3); $AO(2,1)$: 0, (1,2,3);
$AO(3) \oplus \langle S\rangle$: 0, (1,2,3); $AO(2,1) \oplus \langle S\rangle$: 0, (1,2,3);
$ASL(3,R)$: 0, (1,2,3); $AGL(3,R)$: 0, (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + \beta S\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha D, S\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3 + \alpha S, D + \beta S\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle A_2 + A_3, D, S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R)$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R) \oplus \langle S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$ASL(2,R) \oplus \langle D + \alpha S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$AGL(2,R) \oplus \langle S\rangle$: 0, (3), (1,2), (1,2,3);
$\langle D + \beta S, sS\rangle$ $(s = 0, 1)$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);

$\langle D - S + T_2\rangle$: 0, (1), (3), (1,3); $\langle D + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);

$\langle A_1 + \alpha D + \beta S\rangle$ $(0 < \alpha < 1 \ \vee\ \alpha = 0,\ \beta > 0)$: 0, (1), (1,2), (2), (3), (1,3), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1\rangle$: 0, (1), (3), (1,2), (1,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + \alpha D + (1-\alpha)S + T_1\rangle$ $(0 \le \alpha \le 1)$: 0, (2), (3), (2,3);

$\langle A_1 + \alpha D - (1+\alpha)S + T_2\rangle$ $(0 \le \alpha < 1)$: 0, (1), (3), (1,3);

$\langle A_1 + \alpha D + T_3\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$: 0, (1), (2), (1,2);

$\langle S\rangle$: 0, (1), (1,2), (1,2,3); $\langle A_1 + T_3\rangle$: 0, (1), (1,2);

$\langle A_1 + \alpha D, S\rangle$ $(0 \le \alpha < 1)$: 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + \alpha S, D + \beta S\rangle$ $(\alpha \ge 3\beta + 2)$: 0, (1), (2), (3), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + 2S, D\rangle$: 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + S, D - S\rangle$: 0, (1), (2), (1,2), (2,3), (1,2,3);

$\langle A_1 + S + T_1, D - S + \beta T_1\rangle$: 0, (2), (2,3);

$\langle A_1 + S, D - S + T_1\rangle$: 0, (2), (2,3);

$\langle A_2 + A_3 + \alpha D + T_3\rangle$: 0, (1,2); $\langle A_2 + A_3 + T_3, D + \alpha T_3\rangle$ $(\alpha \ge 0)$: 0, (1,2);

$\langle A_2 + A_3, D + T_3\rangle$: 0, (1,2); $ASL(2,R) \oplus \langle D + T_3\rangle$: 0, (1,2).

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.
3. Баранник А.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп, Препринт № 86.87, Киев, Институт математики АН УССР, 1986, 48 с.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
6. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.