О симметрийных свойствах комплексно-значных нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, И.А. ЕГОРЧЕНКО

1. В квантовой теории для описания заряженного скалярного поля [1] широко используется уравнение Даламбера для комплексной функции. В настоящей работе исследованы симметрийные свойства нелинейного волнового уравнения

$$\begin{aligned} &\Box u + F(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0, \\ &\Box u^* + F^*(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

и его обобщения

$$\begin{aligned} &L(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) = g^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha)u_{\mu\nu} + \\ &\qquad + \tilde{g}^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha)u^*_{\mu\nu} + b(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0, \\ &L^*(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $u = u(x)$ — комплексная функция действительного переменного $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$; звездочка означает комплексное сопряжение. Латинские индексы изменяются от 1 до n, греческие — от 0 до n. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование, например, $u_\mu u_\mu = u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_n^2$. Все рассматриваемые функции будем считать дифференцируемыми необходимое число раз:

$$u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \quad u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Далее будут описаны уравнения (1) и (2), инвариантные относительно естественных решений алгебры Пуанкаре $AP(1, n)$ с базисными операторами вида

$$\begin{aligned} &A = AP(1, n): \\ &P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad p_\mu \equiv i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \\ &g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, \ldots, -1). \end{aligned} \tag{3}$$

В качестве расширений будут рассмотрены алгебры с такими базисными операторами:

$$A_1 = A \oplus Q, \tag{4}$$

где Q — оператор заряда,

$$Q = u^* p_u - u p_{u^*}, \quad p_u = -i\frac{\partial}{\partial u}, \quad p_{u^*} = -i\frac{\partial}{\partial u^*};$$

$$A_2 = A \ni D \quad \text{и} \quad A_3 = A_1 \ni D_1, \tag{5}$$

Доклады Академии наук СССР, 1988, **298**, № 2, С. 347–351.

где оператор дилатации имеет вид

$$D_1 = x_\mu p^\mu - \lambda(up_u + u^* p_{u^*}) \tag{6}$$

или

$$D_2 = x_\mu p^\mu - \lambda(p_u + p_{u^*}); \tag{7}$$

$$A_4 = A_2 \Supset \{K_\mu\}, \quad A_5 = A_1 \Subset Q, \tag{8}$$

где K_μ — операторы, порождающие конформные преобразования:

$$K_\mu = 2x_\mu D_1 - x_\nu x^\nu p_\mu, \tag{9}$$

λ — произвольный параметр.

Для описания уравнений (1), (2), инвариантных относительно алгебр $A, A_1, \ldots, A_5$, нам необходимо иметь явные выражения для инвариантов этих алгебр.

2. Инварианты алгебр $A, A_1, \ldots, A_5$. Как хорошо известно [2, 3], дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка алгебры Ли есть функционально независимые решения системы

$$\overset{1}{X}_i \Phi(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) = 0, \tag{10}$$

где $\overset{1}{X}_i$ — первые продолжения по Ли базисных операторов соответствующей алгебры. Для отыскания квазилинейных дифференциальных инвариантов второго порядка необходимо найти все линейно независимые решения уравнения

$$\overset{2}{X}_i W(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} W(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha, u_{\alpha\beta}, u^*_{\alpha\beta}) &= g^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) u_{\mu\nu} + \\ &+ \tilde{g}^{\mu\nu}(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha) u^*_{\mu\nu} + b(u, u^*, u_\alpha, u^*_\alpha), \end{aligned} \tag{12}$$

$\overset{2}{X}_i$ — второе продолжение по Ли базисных операторов.

Воспользовавшись явным видом базисных операторов алгебр $A, A_1, \ldots, A_5$, можно решить систему (10). Не вдаваясь в детали решения, приведем явный вид инвариантов:

$$A: \quad u,\ u^*,\ r_1 = u_\alpha u_\alpha, \quad r_2 = u_\alpha u^*_\alpha, \quad r_3 = u^*_\alpha u^*_\alpha; \tag{13}$$

$$A_1: \quad u^2 + u^{*2},\ r_1 + r_3,\ r_2^2 - r_1 r_3,\ \Omega = r_1 u^{*2} - 2r_2 u u^* + r_3 u^2; \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &A_2 = A \Supset D_1: \quad \frac{u}{u^*},\ \frac{r_1}{r_2},\ \frac{r_3}{r_2},\ \frac{r_1^\lambda}{u^{2(\lambda-1)}}; \\ &A_2 = A \Supset D_2: \quad u - u^*,\ \frac{r_1}{r_2},\ \frac{r_3}{r_2},\ \exp u \cdot r_1^{\lambda/2}; \end{aligned} \tag{15}$$

$$A_3: \quad \frac{(r_1 + r_3)^\lambda}{(u^2 + u^{*2})^{\lambda-1}},\ \frac{r_2^2 - r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2},\ \frac{\Omega}{(u^2 + u^{*2})(r_1 + r_3)}; \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
&A_4\ (\lambda=0): \quad u,\ u^*,\ \frac{r_1}{r_2},\ \frac{r_3}{r_2};\\
&A_4\ (\lambda\neq 0): \quad \frac{u}{u^*},\ \frac{\Omega}{u^{4-2/\lambda}};
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_5\ (\lambda=0): \quad u^2+u^{*2},\ \frac{r_2^2-r_1r_3}{(r_1+r_3)^2},\ \frac{\Omega}{r_1+r_3};\\
&A_5\ (\lambda\neq 0): \quad \Omega(u^2+u^{*2})^{1/\lambda-2}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Решая систему уравнений второго порядка (11), получаем базис квазилинейных инвариантов второго порядка:

$$
\begin{aligned}
A: \quad &\Box u,\ R_1=u_\alpha u_\beta u_{\alpha\beta},\ R_2=u_\alpha u^*_\beta u_{\alpha\beta},\ R_3=u^*_\alpha u^*_\beta u_{\alpha\beta},\\
&\Box u^*,\ R_4=u_\alpha u_\beta u^*_{\alpha\beta},\ R_5=u_\alpha u^*_\beta u^*_{\alpha\beta},\ R_6=u^*_\alpha u^*_\beta u^*_{\alpha\beta};
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1: \quad &H_1=u\Box u+u^*\Box u^*,\ H_2=i(u\Box u^*-u^*\Box u),\\
&H_3=B_1(-R_1+R_3+2R_5)+B_2(-R_6+R_4+2R_2),\\
&H_4=i[B_2(-R_1+R_3+2R_5)-B_1(-R_6+R_4+2R_2)],\\
&H_5=u(R_1+R_3)+u^*(R_4+R_6),\ H_6=i[u(R_4+R_6)-u^*(R_1+R_3)],\\
&H_7=u(R_3-R_5)+u^*(R_4-R_2),\ H_8=i[u(R_4-R_2)-u^*(R_3-R_5)],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

здесь $B_1=u^3-3u^{*2}u,\ B_2=B_1^*$;

$$
\begin{aligned}
A_2: \quad &\frac{u\Box u}{r_1},\ \frac{u^*\Box u^*}{r^3},\ \frac{uR_i}{r_2^2},\ i=1,\ldots,6;\\
A_3: \quad &\frac{H_1}{r_1+r_3},\ \frac{H_2}{r_1+r_3},\ \frac{H_3}{(u^2+u^{*2})(r_1+r_3)^2},\ \frac{H_4}{(u^2+u^{*2})(r_1+r_3)^2},\\
&\frac{H_i}{(r_1+r_3)^2},\ i=5,\ldots,8;
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
A_4\ (\lambda=0): \quad Z_1=\frac{1}{r_2^2}(r_1\Box u+(n-1)R_1),\ Z_2=\frac{1}{r_2^2}(r_1\Box u^*+(n-1)R_2),
$$

$$
Z_3=\frac{1}{r_2^2}(-r_3\Box u+2r_2\Box u^*+(n-1)R_3),\ Z_4=Z_3^*,\ Z_5=Z_2^*,\ Z_6=Z_1^*;
$$

$$
A_4\ (\lambda\neq 0): \quad Y_1=u^{2/\lambda-2}\left\{2u\Box u-\frac{2\lambda+n-1}{\lambda}r_1\right\},\ Y_2=Y_1^*,
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_3=(uu^*)^{2/\lambda-4}u^2\{2(1-\lambda)(r_1u^*-r_2u)^2+\\
&+2\lambda u(u^{*2}R_1-2uu^*R_2+u^2R_3)-r_1\Omega\},\ Y_4=Y_3^*;
\end{aligned}
$$

$$
A_5\ (\lambda=0): \quad \frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{B_1(-Z_1+Z_3+2Z_5)+B_2(-Z_6+Z_4+2Z_2)\},
$$

$$
\frac{ir_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{B_2(-Z_1+Z_3+2Z_5)-B_1(-Z_6+Z_4+2Z_2)\},
$$

$$
\frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u(Z_1+Z_3)+u^*(Z_4+Z_6)\},
$$

$$\frac{ir_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u(Z_4+Z_6)-u^*(Z_1+Z_3)\},$$

$$\frac{r_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u(Z_3-Z_5)+u^*(Z_4-Z_2)\},$$

$$\frac{ir_2^2}{(r_1+r_3)^2}\{u(Z_4-Z_2)-u^*(Z_3-Z_5)\};$$

$$A_5\ (\lambda\neq 0):\quad \frac{u^2+u^{*2}}{\Omega}\left\{u\Box u+u^*\Box u^*-\frac{2\lambda+n-1}{2\lambda}(r_1+r_3)\right\},$$

$$\frac{u^2+u^{*2}}{\Omega}\{2\lambda u(u^{*2}R_1-2uu^*R_2+u^2R_3)+$$
$$+2u^*\lambda(u^{*2}R_4-2uu^*R_5+u^2R_6+2(1-\lambda)(r_1u^*-r_2u)^2+$$
$$+2(1-\lambda)(r_3u-r_2u^*)^2-(r_1+r_3)\Omega\},$$

$$\frac{u^2+u^{*2}}{\Omega}\{(2\lambda-1)(u^*\Box u-u\Box u^*)\Omega-$$
$$-(2\lambda+n-1)(u^*(u^{*2}R_1-2uu^*R_2+u^2R_3)-$$
$$-u(u^{*2}R_4-2uu^*R_5+u^2R_6))\};$$

r_i, Ω — обозначения, использовавшиеся при записи инвариантов нулевого и первого порядка. Приведенные системы инвариантов являются полными при $n\geq 3$.

3. Симметрия уравнений (1), (2). Полную информацию об инвариантности уравнения (1) относительно алгебр дает следующая

Теорема 1. *Система (1) инвариантна относительно алгебр*

A, *если* $F=\varphi(u,u^*,r_1,r_2,r_3)$;
A_1, *если* $F=f(\omega)u+ig(\omega)u^*$

(здесь и далее f и g обозначены произвольные действительные функции, φ и φ^* — произвольные комплексные, ω — инварианты (13)–(18) соответствующих алгебр);

$A_2=A\Supset D_1$, *если* $F=u^{1-2/\lambda}\varphi(\omega)$;
$A_2=A\Supset D_2$, *если* $F=\exp u\cdot\varphi(\omega)$;
A_3, *если* $F=(u^2+u^{*2})^{-4/\lambda}(uf(\omega)+iu^*g(\omega))$;
A_4, *если* $\lambda=\frac{1-n}{2}$, $F=u^{(n+3)/(n-1)}\varphi(\omega)$;
A_5, *если* $F=(u^2+u^{*2})^{2/(n-1)}(uf(\omega)+iu^*g(\omega))$.

Для доказательства теоремы необходимо использовать лиевское условие инвариантности в виде

$$\overset{2}{X}_iL\Big|_{\substack{L=0\\L^*=0}}=0 \tag{22}$$

и разрешить его относительно неизвестной функции F при заданных базисных операторах алгебр $A,A_1,\ldots,A_5$.

Теорема 2. *Уравнение*

$$(u_\alpha u_\alpha - 1)(u^*_\alpha u^*_\alpha - 1) = (u_\alpha u^*_\alpha)^2 \tag{23}$$

является единственным уравнением первого порядка, инвариантным относительно алгебры Пуанкаре $AP(1, n+2)$, группа Ли которой задана в пространстве (x, u, u^*).

Уравнение (23) можно рассматривать как комплексный аналог уравнения Гамильтона (эйконала) $u_\alpha u_\alpha - 1 = 0$ [5].

Теорема 3. *Единственной системой вида (2), инвариантной относительно алгебры $AP(1, n+2)$, является система*

$$\begin{aligned} &(r_2^2 - (r_3 - 1)(r_1 - 1))\Box u + (r_3 - 1)R_1 - 2r_2 R_2 + (r_1 - 1)R_3 = 0,\\ &(r_2^2 - (r_1 - 1)(r_3 - 1))\Box u^* + (r_3 - 1)R_4 - 2r_2 R_5 + (r_1 - 1)R_6 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Система (24) представляет собой комплексное обобщение уравнения типа Эйлера–Лагранжа [4]:

$$\Box u(1 - u_\nu u_\nu) + u_\nu u_\mu u_{\mu\nu} = 0.$$

Определение. *Две системы уравнений*

$$L_1 = 0, \quad L_1^* = 0, \qquad L_2 = 0, \quad L_2^* = 0,$$

где L_1, L_2 имеют вид (2), называются эквивалентными с точностью до решений уравнений первого порядка, или просто эквивалентными, если возможно следующее представление:

$$L_1 = fL_2 + gL_2^*, \quad L_1^* = f^* L_2^* + g^* L_2,$$

где $ff^* - gg^* \neq 0$; f, g зависит от u, u^*, u_α, u^*_α.

Теорема 4. *Уравнения (2) инвариантны относительно алгебр $A, A_1, \ldots, A_5$ только в том случае, если они эквивалентны следующей системе:*

$$\alpha^i(\omega)W^i + \alpha(\omega), \quad \alpha^{i*}W^{*i} + \alpha^*(\omega) = 0,$$

где ω — дифференциальные инварианты нулевого и первого порядка, W^i — инварианты второго порядка вида (12) соответствующих алгебр.

4. Примеры. Приведем пример системы, инвариантной относительно конформной группы $C(1,3)$ в четырехмерном пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3):

$$\Box u = u^3 \varphi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6}\right), \quad \Box u^* = u^{*3} \varphi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^6}\right),$$

Эта система является комплексным обобщением единственного конформно-инвариантного уравнения $\Box u + \lambda u^3 = 0$ для действительной функции.

Уравнение

$$\begin{aligned} &\Box u - \frac{n-1}{2}\{(R_3 - R_5)r_1 + (R_4 - R_2)r_2\}(r_1 r_3 - r_2^2)^{-1} =\\ &\quad = (u^2 + u^{*2})^{-1}(f(r_1 u + r_2 u^*) + i(r_2 u - r_1 u^*)g) = 0, \end{aligned}$$

где f, g — действительные функции от инвариантов нулевого и первого порядка, инвариантные относительно алгебры $AC(1,n)$ с нулевой конформной степенью.

Уравнения

$$u\Box u - \frac{n+1}{2}r_1 = \Phi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2}\right),$$

$$\frac{2u}{\Omega}(u^{*2}R_1 - 2uu^*R_2 + u^2R_3) = r_1 + \Phi\left(\frac{u}{u^*}, \frac{\Omega}{u^2}\right)$$

инвариантны относительно $AC(1,n)$ с конформной степенью 1; r_i, Ω, R_j — обозначения, использовавшиеся при записи инвариантов первого и второго порядка. К приведенным уравнениям, конечно, следует дописать комплексно-сопряженные.

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973, 416 с.
2. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, М., ИЛ, 1947, 358 с.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Фущич В.И.. Серов Н.И., *ДАН*, 1984, **278**, № 4, 847–851.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645–3656.