Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності

В.І. ФУЩИЧ, М.І. СЄРОВ, В.І. ЧОПИК

A concept on the conditional invariance is introduced. It is proved that nonlinear heat conduction equation does not contradict the Galilean relativity principle, provided that its solutions satisfy the Hamilton–Jacobi equation.

Прийнято вважати, що нелінійні процеси тепломасопереносу описуються рівнянням

$$
\begin{gathered}
u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} = 0, \quad u \equiv u(x_0, x_1, x_2, x_3), \\
u_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad x_0 \equiv t, \quad c(u) \neq \text{const}, \quad a = 1, 2, 3,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В [1] звернено увагу на те, що серед множини нелінійних рівнянь (1) не існує ні одного рівняння, для якого виконувався б принцип відносності Галілея, тобто рівняння (1) не інваріантне відносно операторів Галілея

$$
G_a = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a u\frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1, 2, 3. \tag{2}
$$

Лінійне рівняння (1) (випадок $c(u) = \text{const}$) інваріантне відносно операторів (2), які породжують перетворення Галілея

$$
x'_a = x_a + v_a t, \tag{3}
$$

v_a — швидкість інерційної системи відліку K', що рухається відносно системи K зі швидкістю v_a.

Із сказаного випливає [2], що або рівняння (1) непридатне для описування нелінійних процесів теплопровідності і його необхідно замінити іншим, або з множини розв'язків (1) потрібно виділити таку підмножину, яка була б інваріантною відносно перетворень Галілея.

Нижче реалізуємо другу можливість, тобто покажемо, що якщо до рівняння (1) дописати певну додаткову умову, то (1) разом з додатковим рівнянням, інваріантне відносно операторів типу (2).

Розглянемо диференційне рівняння в частинних похідних (ДРЧП)

$$
\begin{gathered}
L(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{n}{u}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}(n+1), \\
\underset{1}{u} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad \underset{2}{u} \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_0}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}\right), \ \ldots
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Означення 1 (С. Лі). *Рівняння (4) інваріантне відносно операторів*

$$
X = \xi_\mu(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}
$$

Доповіді АН УРСР, Сер. А, 1988, № 9, С. 17–20.

якщо

$$\tilde{X}L\Big|_{L=0} = 0, \quad \text{або} \quad \tilde{X}L = \lambda(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{n}{u})L,$$

де $\tilde{X}$ — відповідне продовження оператора X, λ — довільна неперервно-диференційовна функція.

Нехай деякий оператор Q не належить алгебрі інваріантності рівняння (4) і його продовження задається формулою

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 L, \tag{6}$$

$$\tilde{Q}L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \tag{7}$$

$$L_1 \equiv L_1(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{n}{u}) = 0, \tag{8}$$

λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — довільні неперервно-диференційовні функції.

Означення 2. *Будемо казати, що рівняння (4) умовно інваріантне, якщо воно разом з рівнянням (8) інваріантне відносно оператора Q, тобто виконуються умови (6), (7).*

Додаткова умова (рівняння) виділяє із всієї множини розв'язків такі підмножини, які мають більш широку симетрію, ніж вся множина розв'язків рівняння (4).

Означення 3 [3]. *Рівняння (4) назвемо Q-інваріантним, якщо*

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Qu). \tag{9}$$

Зрозуміло, що (9) це більш сильна умова, ніж (7). В [3] умова (9) використана для побудови точних розв'язків деяких нелінійних хвильових рівнянь.

Теорема 1. *Рівняння (1) умовно інваріантне відносно операторів*

$$G_a = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + M(u) x_a \frac{\partial}{\partial u}, \tag{10}$$

якщо (8) має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2} M^{-1}(u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \tag{11}$$

$$M(u) = \frac{1}{2} u c^{-1}(u). \tag{12}$$

Для доведення теореми необхідно побудувати друге продовження оператора (10) і використати формулу (7). Звідси одержимо, що рівняння (1) буде умовно інваріантним, якщо рівняння (8) має вигляд (11), (12).

Для завершення доведення залишилося перевірити, що рівняння (11) інваріантне відносно операторів G_a, тобто

$$\tilde{G}_a \left\{ u_0 + \frac{1}{2} M^{-1}(u) (\vec{\nabla} u)^2 \right\} = 0. \tag{13}$$

У справедливості (13) легко пересвідчитись нескладними підрахунками. Таким чином теорему доведено.

Теорема 2. *Рівняння (1) Q-інваріантне, якщо*

$$c(u) = \frac{1}{2}m^{-1}u^r, \quad M(u) = 2mr^{-n-2}u^{1-r}, \tag{14}$$

де n — число просторових змінних (1), $m \neq 0$, $r \neq -2n^{-1}$ — довільні постійні.

Наслідок 1. *Принцип відносності Галілея виконується для такої перевизначної системи:*

$$\begin{aligned} & u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} = 0, \\ & u_0 + \frac{1}{2}M^{-1}(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

де $M(u)$ визначається за формулою (12).

Зауваження 1. Система (15) заміною

$$W = 2m\int \frac{c(u)}{u}du \tag{16}$$

зводиться до системи рівнянь Лапласа і Гамільтона–Якобі

$$\begin{aligned} & \Delta W = 0, \\ & W_0 + \frac{(\vec{\nabla} W)^2}{2m} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Теорема 3. *Максимальною (у розумінні С. Лі) алгеброю інваріантності рівняння (17) є розширена алгебра Галілея $G_1(1, n+1)$ з базисними операторами*

$$\begin{aligned} & P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{n+1} = \frac{\partial}{\partial W}, \quad I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \\ & D^1 = 2x_0 P_0 + x_a P_a, \quad D^2 = 2WP_{n+1} + x_a P_a, \\ & G_a^1 = x_a P_a + m x_a P_{n+1}, \quad G_a^2 = WP_a + m x_a P_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Всі наведені теореми доводяться стандартним методом Лі.

Теорема 4. *Рівняння (1) умовно інваріантне відносно операторів*

$$G_a^2 = u\frac{\partial}{\partial x_a} + m x_a \frac{\partial}{\partial x_0}. \tag{19}$$

Умова (8) має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0. \tag{20}$$

Доведення. Побудуємо друге продовження операторів (19) і подіємо ним на (1). Одержимо

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_a^2\left\{u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left(c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\right\} = -\frac{\partial u}{\partial x_a}\left\{u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left(c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right)\right\} - \\ & -\frac{2c'(u)}{m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\left\{u_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} - 2mc(u)\left\{u_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Із інваріантності рівняння Гамільтона–Якобі відносно G_a^2 і (21) випливає справедливість теореми.

Наслідок 2. *Оператори G_a^2 породжують такі скінченні перетворення:*

$$
\begin{aligned}
&x_0' = \frac{m}{2}\tau^2 u + m\tau_a\tau_a + x_0,\\
&x_a' = \tau_a u + x_a,\\
&u' = u, \quad \tau^2 = \tau_a\tau_a, \quad \tau_a \text{ — груповий параметр.}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Відзначимо, що перетворення (22) одержуються із стандартних перетворень Галілея заміною $u \to x_0$, $x_0 \to u$.

Теорема 5. *Система рівнянь*

$$
\begin{aligned}
&u_0 + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} = 0,\\
&u_0 + \frac{1}{2m}\frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0,
\end{aligned}
$$

при $c(u) = \{(2n+n)m\}^{-1}u$ інваріантна відносно алгебри Лі з базовими операторами:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad I_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad D^1 = 2x_0 P_0 + x_a P_a,\\
&D^2 = 2u\frac{\partial}{\partial u} + x_a P_a, \quad G_a^2 = uP_a + m x_a P_0, \quad A = u^2\frac{\partial}{\partial u} + u x_a P_a + \frac{m}{2}\boldsymbol{x}^2 P_0,\\
&K_a = x_a x_0 P_0 + x_a x_b P_b + \left(\frac{x_0 u}{m} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2\right) P_a + x_a u\frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = 1, 2, \ldots, n,\\
&\boldsymbol{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.
\end{aligned}
$$

Доведення теореми проводиться методом Лі.

1. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
3. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equation with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.