Об условной инвариантности нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Монжа–Ампера относительно конформной алгебры

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

Показано, что уравнения Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, Монжа–Ампера условно инвариантны относительно конформной алгебры. Приведены некоторые конформно-инвариантные решения этих уравнений.

Рассмотрим нелинейное уравнения Даламбера

$$\Box u + \lambda_1 u^k = 0, \tag{1}$$

Лиувилля

$$\Box u + \lambda_2 \exp u = 0, \tag{2}$$

Борна–Инфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^{\mu\nu} u_\nu u_\mu = 0, \tag{3}$$

Монжа–Ампера

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \tag{4}$$

где $u \equiv u(x) \in R_1$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{n+1}$, $u_\mu = \partial u/\partial x_\mu$, $u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu$, $u_{\mu\nu} = \partial^2 u/\partial x_\mu \partial x_\nu$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства R_{n+1} с сигнатурой $(+, -, \ldots, -)$, $|u_{\mu\nu}|$ — определитель, составленный из вторых производных функции u; $\mu, \nu = \overline{0, n}$, по повторяющимся индексам предполагается суммирование, λ_1, λ_2, k — постоянные.

Рассмотрим также конформную алгебру $C(1, n+1)$, базисные операторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} &P_a = g^{AB}\partial_B \equiv g^{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \quad J_{AB} = x_A P_B - x_B P_A, \quad D = x_A P_A, \\ &K_A = 2x_A D - x_B x^B P_a, \quad A, B = \overline{0, n+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

и ее подалгебру

$$\begin{aligned} &P_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad D = x_A P_A, \\ &K_\mu = 2x_\mu D - x_B x^B P_\mu, \quad \mu, \nu = \overline{0, n}, \end{aligned} \tag{6}$$

где g^{AB} — метрический тензор пространства R_{1+n+1} с сигнатурой $(+, -, \ldots, -)$.

Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1988, С. 98–102.

Известно (см. [1–3]), что только при $k = \frac{n+3}{n-1}$ $(n \neq 1)$ уравнение (1) инвариантно относительно конформной алгебры, а уравнения (2)–(4) конформно неинвариантны.

В настоящей работе показано, что уравнения (1)–(4) условно инвариантны (понятие условной инвариантноти см. [4]) относительно конформной алгебры (5) или (6). Получены некоторые конформно-инвариантные решения этих уравнений.

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии:*

$$\begin{aligned} &u_\nu u^\nu = \lambda_3^2 u^{k+1}, \\ &\lambda_3^2 = 2\lambda_1[n(k-1)-k-1]^{-1}, \quad k \neq 1, \frac{n+3}{n-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

причем в формулах (6) $x_{n+1} = 2u^{(1-k)/2}/\lambda_3(1-k)$.

Доказательство. Нам необходимо доказать, что

$$\begin{aligned} &\underset{2}{X}(\Box u + \lambda_1 u^k) = \tau_1(\Box u + \lambda_1 u^k) + \tau_2(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}), \\ &\underset{1}{X}(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}) = \tau_3(u_\nu u^\nu - \lambda_3^2 u^{k+1}), \end{aligned} \tag{8}$$

где τ_1, τ_2, τ_3 — некоторые функции, X — инфинитизимальный оператор алгебры (6). $\underset{1}{X}$ и $\underset{2}{X}$ — первое и второе продолжения оператора X.

Согласно определению (см. [5]) инфинитизимальный оператор алгебры (6) имеет вид

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} &\xi^\mu(x,u) = 2x_\mu b_\nu x^\nu - b_\mu\left(x_\nu x^\nu - \frac{4u^{1-k}}{\lambda_3^2(1-k)^2}\right) + c_{00}x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &\eta(x,u) = 2(2b_\nu x^\nu + c_{00})u/(1-k), \end{aligned} \tag{10}$$

b_μ, c_{00}, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, d_μ — параметры, $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$, $\mu,\nu = \overline{0,n}$.

Первое и второе продолжения оператора X строятся по следующим формулам:

$$\underset{1}{X} = X + \zeta^\mu\frac{\partial}{\partial u_\mu}, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta^\mu = {} & \frac{4u^{-k}}{\lambda_3^2(k-1)}(b_\nu u_\nu u_\mu - \lambda_3^2 b^\mu u^{k+1}) + 2\frac{k+1}{k-1}(2b_\nu x^\nu + c_{00}u_\mu) - \\ & - (2b^\mu x_\nu - 2b^\nu x_\mu + c_{\mu\nu})u_\nu; \end{aligned}$$

$$\underset{2}{X} = \underset{1}{X} + \sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}}, \tag{12}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = 2\frac{1+k}{1-k}(b_\mu u_\nu + b_\nu u_\mu) + \frac{2k}{1-k}(2b_\nu x^\nu + c_{00})u_{\mu\nu} + \frac{4u^{-k}b_\alpha}{\lambda_3^2(k-1)} \times$$
$$\times (u_\mu u_{\nu\alpha} + u_\nu u_{\mu\alpha}) + \frac{2u^{-k-1}}{\lambda_3^2(k-1)} b_\alpha u_\alpha [2u_{\mu\nu} - 2ku_\mu u_\nu + (k-1)\lambda_3^2 u^{k+1} g^{\mu\nu}] -$$
$$- (2b_\alpha x^\nu - 2b^\nu x_\alpha + c_{\alpha\nu})u_{\mu\alpha} - (2b_\alpha x^\mu - 2b^\mu x_\alpha + c_{\alpha\mu})u_{\nu\alpha}.$$

Искользуя формулы (9)–(12), убеждаемся в выполнении условий (8). Теорема доказана.

Теорема 2. *Уравнение Лиувилля (2) инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии*

$$u_\nu u^\nu = \frac{2\lambda_2}{n-1}\exp u \quad (n \neq 1), \tag{13}$$

причем в формулах (6) $x_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\lambda_2 \exp u}}$.

Теорема 3. *Уравнение* $\Box u = F(u)$ *инвариантно относительно конформной алгебры (6) при условии* $u_\nu u^\nu = G(u)$*, причем* $F(u) = n/\Phi\Phi' - \Phi''/(\Phi')^3$, $G(u) = (\Phi')^{-2}$ *в формулах (6)* $x_{n+1} = \Phi$, $\Phi = \Phi(u)$ *— произвольная дифференцируемая функция.*

Замечание 1. Система уравнений

$$\Box u = n/\Phi(u)\Phi'(u) - \Phi''(u)/[\Phi'(u)]^3,$$
$$u_\nu u^\nu = [\Phi'(u)]^{-2},$$

заменой $w = \Phi(u)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} &\Box w = n/w, \\ &w_\nu w^\nu = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Конформная вариантность системы уравнений (14) установлена в работе [6].

Теорема 4. *Уравнения Борна–Инфельда (3) и Монжа–Ампера (4) инвариантны относительно конформной алгебры (5) при условии*

$$u_\nu u^\nu = 1, \tag{15}$$

причем в формулах (5) $x_{n+1} = u$.

Теоремы 2–4 доказываются аналогично теореме 1.

Замечание 2. Уравнения Борна–Инфельда (3) и Монжа–Ампера (4) являются дифференциальными следствиями уравнения эйконала (15). Для уравнения (4) этот факт доказан в [6], а для уравнения (3) следует из формулы

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \left(\Box u - \frac{1}{2}u^\mu \partial_\mu\right)(1 - u_\nu u^\nu).$$

В силу замечания 2 такими решениями для уравнений (3) и (4) будут конформно инвариантные решения уравнения эйконала (15). Например, используя инварианты конформной алгебры (5), получаем следующий анзац

$$x_{n+1} = \sqrt{x_\nu x^\nu - \beta_\nu x^\nu \varphi(\omega)}. \tag{16}$$

Из (16) получается точное решение системы ДУЧП (14) вида

$$x_{n+1} \equiv w = \sqrt{x_\nu x^\nu + \gamma_\nu x^\nu}, \quad \gamma_\nu \gamma^\nu = 0.$$

1. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
2. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 679–682.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа, *Докл. АН СССР*, 1984, **278**, № 4, 847–851.
4. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–16.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференпиальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
6. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations, Preprint Institute for Mathematics and Applications, University of Minnesota, 1988, 5 p.