Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

The notion of the conventional invariance of differential equation is introduced. Some exact families of solutions of the nonlinear equation of acoustics are constructed.

В работах [1, 2] предложен следующий подход к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Предположим, что некоторое ДУЧП не обладает нетривиальной группой инвариантности. Для построения решений уравнения присоединяем к нему такое дополнительное ДУЧП, чтобы полученная (переопределенная) система обладала широкими симметрийными свойствами, если это удастся сделать, то далее, воспользовавшись симметрийными свойствами системы, строим решения переопределенной системы ДУЧП.

В основе нелинейной акустики лежит уравнение (см., например, [3, 4])

$$L(u) = u_{00} - c(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u})\Delta u = 0, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad x_0 \equiv t, \quad u \equiv u(x), \tag{1}$$

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$ — совокупность всех производных 1-го и 2-го порядка, Δ — оператор Лапласа, $c(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u})$ — произвольная гладкая функция.

Олвер и Розенау [4] построили семейства точных решений одномерного уравнения акустики вида

$$L(u) = u_{00} - uu_{11} = 0, \quad \Delta u \equiv u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad c(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}) = u. \tag{2}$$

Реализуем приведенный алгоритм для одномерного уравнения (2) и построим в явном виде классы точных решений уравнения (2). Решения, полученные в [4], входят в эти классы. Кроме того, многие наши результаты обобщаются на многомерные уравнения.

Определение. *Пусть оператор первого порядка*

$$Q = \xi^\mu(\boldsymbol{x}, u)\partial_\mu + \eta(\boldsymbol{x}, u)\partial_u, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n \tag{3}$$

не принадлежит алгебре инвариантности уравнения (1). Будем говорить, что уравнение (1) условно инвариантно относительно оператора Q, если его соответствующее продолжение $\tilde{Q}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{Q}L(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = \lambda_0 L(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) + \lambda_1 L_1(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}), \tag{4}$$

$$L_1(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \tag{5}$$

$$\tilde{Q}L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1, \tag{6}$$

Доклады АН УССР, Сер. А, 1988, № 10, С. 27–31.

λ_0, λ_1, λ_2, λ_3 — *некоторые функции от* u, $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$.

Соотношение (5) представляет собой дополнительное условие к исходному уравнению (1), при котором уравнение (1) инвариантно относительно оператора Q. Формула (6) выражает тот факт, что дополнительное уравнение (5) инвариантно относительно оператора Q. Очевидно, что определение условий инвариантности содержательное только в том случае, когда уравнения (1), (5) совместны. Дополнительное условие (5) выделяет из всего множества решений уравнения (1) некоторое подмножество, которое имеет более широкую симметрию, чем все множество решений.

В общем случае построить в явном виде оператор Q и уравнение (5) трудно. Эта задача существенно упрощается, если в качестве условия (5) выбрать уравнение

$$Qu = 0. \tag{7}$$

В этом случае (4) имеет вид

$$\tilde{Q}L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Qu). \tag{8}$$

Формула (8) дает конструктивный алгоритм для нахождения явного вида оператора Q.

С помощью алгоритма С. Ли можно показать, что уравнение (1) не инвариантно относительно преобразований Галилея. Выделим из множества решений уравнения (1) подмножество, которое инвариантно относительно преобразований Галилея.

Теорема 1. *Уравнение (1) условно инвариантно относительно операторов Галилея*

$$G_a = x_0\partial_a + m x_a \partial_u, \quad m = \text{const}, \tag{9}$$

если

$$c(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}) = F(\vec{v}, \vec{\nabla} v_2) + \frac{\vec{x}^{\,2}}{n x_0^2}, \quad n = 3, \tag{10}$$

где F — произвольная гладкая функция, вектор $\vec{v}$ задается выражениями

$$v_1 = x_0, \quad v_2 = u - \frac{m\vec{x}^{\,2}}{2x_0}, \quad v_3 = u_0 + \frac{(\vec{\nabla}u)^2}{2m}. \tag{11}$$

Дополнительное условие (7) имеет вид

$$G_a u = 0. \tag{12}$$

Доказательство теоремы (1) опускаем, поскольку оно сводится к применению хорошо известного (см., например, [5]) метода С. Ли к системе (1), (12).

Из уравнения (12) получаем анзац

$$u = \varphi(x_0) + \frac{m}{2}\frac{\vec{x}^{\,2}}{x_0}, \tag{13}$$

который редуцирует уравнение (1), (10) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x_0 \ddot{\varphi}(x_0) = nmF(x_0, \varphi, \dot{\varphi}).$$

Остановимся теперь подробно на одномерном уравнении (2). Оператор Q ищем в виде

$$Q = A(\boldsymbol{x})\partial_0 + B(\boldsymbol{x})\partial_1 + (a(\boldsymbol{x})u + b(\boldsymbol{x}))\partial_u, \tag{14}$$

$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$, A, B, a, b — гладкие функции $\boldsymbol{x}$.

Теорема 2. *Уравнение (2) условно инвариантно относительно оператора (14), если функции A, B, a, b удовлетворяют следующей системе уравнений.*

Случай 1. $A \neq 0$, $B \neq 0$.

$$\begin{gathered}
a = 2\left(B_1 - A_0 + \frac{B}{A}A_1\right), \quad b = 2\frac{B}{A}B_0, \\
a_{00} + 2\frac{a}{A}a_0 - \left[\frac{a}{A}A_{00} + 2\left(\frac{a}{A}\right)_1 B_0\right] = b_{11} - \left[\frac{b}{A}A_{11} + 2\left(\frac{b}{A}\right)_1 A_1\right], \\
a_{11} = \frac{a}{A}A_{11} + 2\left(\frac{a}{A}\right)_1 A_1, \quad b_{00} = -2\frac{b}{A}a_0 + \left[\frac{b}{A}A_{00} + 2\left(\frac{b}{A}\right)_1 B_0\right], \\
B_{11} - 2a_1 - \left[\frac{B}{A}A_{11} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 A_1\right] + 2\frac{a}{A}A_1 = 0, \\
B_{00} + 2\frac{B}{A}a_0 - \left[\frac{B}{A}A_{00} + 2\left(\frac{B}{A}\right)_1 B_0\right] + 2\frac{a}{A}B_0 = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Индексы внизу означают соответствующую производную.

Случай 2. $A = 0$, $B \neq 0$. *Не умаляя общности, можно положить* $B = 1$.

$$\begin{gathered}
a_0 = 0, \quad a_{11} + 3aa_1 + a^3 = 0, \quad b_{00} - bb_1 - ab^2 = 0, \\
b_{11} + ab_1 + (3a_1 + 2a^2)b = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Случай 3. $A = 1$, $B = 0$.

$$a_1 = 0, \quad a_{00} + aa_0 - a^3 = b_{11}, \quad b(b_0 + ab) = 0, \quad b_{00} + a_0 b - a^2 b = 0. \tag{17}$$

Доказательство теоремы основано на использовании формулы (8), ввиду громоздкости его не приводим.

Для построения явного вида операторов Q необходимо решить системы уравнений (15)–(17). В общем случае это не удается сделать, поскольку они представляют собой нелинейную систему ДУЧП. Однако семейства частных решений системы (15)–(17) удалось построить. Явный вид этих решений и соответствующие им анзацы, которые редуцируют уравнение (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению, приведены в таблице, где приняты следующие обозначения: a_i, b_i — произвольные постоянные, $i = \overline{1, 10}$; $W(x_0)$ — функция Вейерштраса, т.е. решения уравнения

$$\ddot{W} = W^2, \quad W = W(x_0), \tag{18}$$

Оператор Q	Анзац	Редуцированное уравнение
$\partial_1 + a_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) + a_1x_1$	$\varphi'' = 0$
$\partial_0 + (a_2x_1 + a_3)\partial_u$	$u = \varphi(x_1) + x_0(a_2x_1 + a_3)$	$\varphi'' = 0$
$\partial_0 + (a_4x_0 + a_5)\partial_1 + 2a_4(a_4x_0 + a_5)\partial_u$	$u = \varphi(\omega) + 2a_4x_1$	$(\varphi - 2a_4\omega - a_5^2)\varphi'' = a_4\varphi'$
$\partial_1 + [W(x_0)x_1 + f(x_0)]\partial_u$	$u = \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + f(x_0)x_1 + \varphi(x_0)$	$\varphi'' = W\varphi$
$x_0\partial_0 + (u + a_7x_1 + a_8)\partial_u$	$u = x_0\varphi(x_1) - (a_7x_1 + a_8)$	$\varphi'' = 0$
$x_0\partial_0 + [x_0^3(a_9x_1 + a_{10}) - 2u]\partial_u$	$u = x_0^{-2}\varphi(x_1) + \frac{1}{5}x_0^3(a_9x_1 + a_{10})$	$\varphi'' = 6$
$x_1\partial_1 + (u + b_1x_0 + b_2)\partial_u$	$u = x_1\varphi(x_0) - (b_1x_0 + b_2)$	$\varphi'' = 0$
$x_1\partial_1 + \left[u + \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 - f(x_0)\right]\partial_u$	$u = \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + \varphi(x_0)x_1 + f(x_0)$	$\varphi'' = W\varphi$
$(x_0^2 - 1)\partial_0 + 2x_1\partial_1 + (x_0 + 1)u\partial_u$	$u = (x_0 - 1)\varphi\left(\frac{x_0+1}{x_0-1}x_1\right)$	$\varphi'' = 0$
$x_0^3\partial_0 + (3x_0^2u - 15x_1^2 + b_3x_1 + b_4)\partial_u$	$u = x_0^3\varphi(x_1) + 3x_0^{-2}x_1^2 - \frac{1}{5}x_0^{-2}(b_3x_1 + b_4)$	$\varphi'' = 0$
$x_0^2x_1\partial_1 + (x_0^2u + 3x_1^2 + b_5x_0^5 + b_6)\partial_u$	$u = x_1\varphi(x_0) + 3x_0^{-2}x_1^2 - b_5x_0^2 - b_6x_0^{-2}$	$x_0^2\varphi'' = 64$
$W(x_0)\partial_0 + W(x_0)u\partial_u$	$u = W(x_0)\varphi(x_1)$	$\varphi'' = 1$
$F(x_0)\partial_0 + \left[F(x_0)u + \frac{1}{2}x_1^2 + b_7x_1 + b_8\right]\partial_u$	$u = F(x_0)\varphi(x_1) + \left(\frac{x_1^2}{2} + b_7x_1 + b_8\right)F(x_0)\int F^{-2}(x_0)dx_0$	$\varphi'' = b_9$

$f(x_0)$ — решение уравнения Ламе

$$\ddot{f} = Wf, \tag{19}$$

$F(x_0)$ — решение уравнения

$$\ddot{F} = F^2 \left\{ \int F^{-2}(x_0)dx_0 + b_9 \right\}, \tag{20}$$

φ — неизвестная функция, подлежащая определению,

$$\omega = \frac{1}{4}a_4x_0^2 + a_5x_0 - x_1.$$

Проинтегрировав редуцированные уравнения (см. колонку 4 таблицы) и подставив эти решения в соответствующие анзацы, получаем следующие классы точных решений нелинейного уравнения акустики (2):

$$\begin{aligned}
&u = P_1(x_0)Q_1(x_1), \quad u = x_0^{-2}\left\{3x_1^2 + Q_1(x_1)\right\} + x_0^3R_1(x_1),\\
&u = \frac{1}{2}W(x_0)x_1^2 + f^{-1}(x_0)x_1 + f^2(x_0),\\
&u = \varphi(\omega) + a_4x_0(a_4x_0 + 2a_5),\\
&u = \left\{P_2(x_1) + Q_2(x_1)\int F^{-2}(x_0)dx_0\right\}F(x_0),
\end{aligned} \tag{21}$$

где $P_k(x)$, $Q_k(x)$, $R_k(x)$ — произвольные многочлены степени k $(k = 1, 2)$, $f^k(x_0)$ — решения уравнения Ламе (19), $\varphi(\omega)$ и ω приведены в строке 3 таблицы.

В том частном случае, когда $a_4 = 2$, $a_5 = 0$, оператор Q_3 (см. строку 3 таблицы) совпадает с оператором работы [4].

Все результаты, полученные выше для одномерного уравнения (2), обобщаются на многомерное нелинейное уравнение акустики.

1. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
2. Фущич В.И., Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? в Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 4–6.
3. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, New York, Academic Press, 1965, 495 p.
4. Olver P.J., Rosenau P., The construction of special solutions to partial differential equations, *Physics Letters A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1987, 400 с.