Нова математична модель дифузійних процесів зі скінченною швидкістю

В.І. ФУЩИЧ, А.С. ГАЛІЦИН, А.С. ПОЛУБИНСЬКИЙ

The fourth-order partial differential equation $Lu = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)u(x,t) = 0$, where $L_2 = L_1 L_1$, L_1 is a classical heat conductivity operator is suggested to describe the heat and diffusion processes. The fundamental solution of the operator and some finite self-similar solutions are obtained.

В цьому повідомленні для опису теплових і дифузіїних процесів запропоновано диференціне рівняння з частинними похідними четвертого порядку, інваріантне відносно групи Галілея. Порівняно з класичним лінійним рівнянням параболічного типу воно більш коректно описує еволющійні процеси і дозволяє досліджувати їх спеціальні режими, зокрема — зі скінченною швидкістю розповсюдження збурень.

Оскільки класичне рівняння теплопровідності передбачає нескінченну швидкість розповсюдження збурень, що приводить до ряду відомих парадоксів [1–3], для описання процесів зі скінченною швидкістю рядом авторів було запропоноване гіперболічне рівняння, яке враховує релаксацію теплового потоку [2–4]. Однак всі нестаціонарні рівняння, в які входять другі похідні по часу, не інваріантні відносно перетворення Галілея, причому для більшості з них не виконується ні принцип Галілея, ні принцип Пуанкаре–Ейнштейна [5, 6]. Це свідчить про те, що гіперболічне рівняння не має відповідних симетрійних властивостей і, таким чином, не відображає основні фізичні закони збереження.

Розглянемо рівняння вигляду

$$Lu \equiv (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)u(x,t) = 0, \tag{1}$$

де α_1 і α_2 — дійсні параметри, $L_2 = L_1 L_1$,

$$L_1 \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \varkappa^2 \nabla^2, \tag{2}$$

$\varkappa$ — фізичний параметр, ∇^2 — оператор Лапласа, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Далі (1) будемо називати для скорочення біпараболічним рівнянням; при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ воно співпадае з класичним рівнянням теплопровідності. Можна показати, що (1) інваріантне відносно групи Галілея $G(3,1)$. Тому природно чекати, що його можна використовувати для описання процесів дифузійного типу, які не залежать від того, в яких інерційних системах вони спостерігаються.

При виведенні рівняння (1) із закону збереження енергії тепловий потік може бути визначений різними співвідношеннями. Зокрема, його можна задати у вигляді

$$q(x,t) = -\lambda \operatorname{grad} u - \mu \operatorname{grad} L_1 u; \quad \lambda, \mu = \text{const}. \tag{3}$$

Звідси при $\mu = 0$ випливае закон Фур'є.

Доповіді АН УРСР, Сер. А, 1988, № 8, С. 21–26.

Рівняння (1) при $\operatorname{sgn}\alpha_1 = \operatorname{sgn}\alpha_2$ зберігає асиметрію відносно часу t, що має місце для класичного рівняння теплопровідності, і відповідає принципу зростання ентропії.

Змінні в рівнянні (1) не розділяються в класичному розумінні, однак час може бути виключений перетворенням Лапласа, що приводить до рівняння в зображеннях

$$\begin{aligned}&\alpha_2\nabla^2\nabla^2\hat{u} - \varkappa^2(\alpha_1 + 2\alpha_2 p)\nabla^2\hat{u} + p(\alpha_1 + \alpha_2 p)\hat{u} = \\ &\quad = (\alpha_1 + \alpha_2 p)u(x,0) + \alpha_2\left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2\varkappa^2\nabla^2 u(x,0)\right),\end{aligned} \tag{4}$$

де p — параметр перетворення. Звідси, зокрема, випливає, що коректними початковими умовами для рівняння (1) поряд з

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_2(x), \quad \nabla^2 u(x,0) = u_2(x) \tag{5}$$

є умови

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} - 2\varkappa^2\nabla^2 u(x,0) = u_3(x). \tag{6}$$

З другого боку, у випадку всього простору E_n перетворенням Фур'є рівняння (1) зводиться до звичайного диференційного рівняння

$$\alpha_2\tilde{u}'' + (\alpha_1 + 2\alpha_2\varkappa^2\sigma^2)\tilde{u}' + (\alpha_1 + \alpha_2\varkappa^2\sigma^2)\varkappa^2\sigma^2\tilde{u} = 0, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

де $\tilde{u}$ — образ фур'є-функції, $u, \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \in E_n$. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\tilde{u}(\sigma;t) = c_1 e^{-\varkappa^2\sigma^2 t}(1 + c_2 e^{-\alpha_1 t/\alpha_2}), \quad \alpha_2 \neq \infty. \tag{8}$$

Якщо визначити фундаментальний розв'язок $G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau)$ біпараболічного оператора L як узагальнену функцію, що задовольняє рівняння $LG(\boldsymbol{r},\tau) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})\delta(\tau)$, де $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$, $\boldsymbol{\rho} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\boldsymbol{\rho}' = \{x_1', x]_2, \ldots, x_n'\}$, $\tau = t - t'$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функція, і ввести фундаментальний розв'язок $Q(\boldsymbol{r},\tau)$ класичного оператора теплопровідності L_1 [7], то між ними існує наступний зв'язок:

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau) = Q(\boldsymbol{r},\tau)\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1\tau/\alpha_2}), & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 < \infty,\\ \tau, & \text{якщо } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\end{cases} \tag{9}$$

де [1, 2]

$$Q(\boldsymbol{r},\tau) = \frac{4\pi\Theta(\tau)}{(2\varkappa\sqrt{\pi\tau})^n}e^{-\frac{\boldsymbol{r}^2}{4\varkappa^2\tau}}$$

($\Theta(\tau)$ — одинична функція Хевісайда). При цьому можна довести, що

$$G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau) \underset{\tau\to 0}{\to} G_{0,1}(\boldsymbol{r},\tau), \quad G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} Q(\boldsymbol{r},\tau), \tag{10}$$

тобто при достатньо малих τ фундаментальний розв'язок оператора L веде себе по τ як фундаментальний розв'язок оператора L_2, а для достатньо великих τ його характер визначається поведінкою фундаментального розв'язку оператора L_1.

При $\boldsymbol{r} \neq 0$ мають місце наступні асимптотичні співвідношення:

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \operatorname{sgn}\alpha_1 = \operatorname{sgn}\alpha_2, \\ \infty, & \text{якщо } \operatorname{sgn}\alpha_1 \neq \operatorname{sgn}\alpha_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} G_{0,1}(\boldsymbol{r},\tau) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } n = 1, \\ 1/\varkappa^2, & \text{якщо } n = 2, \\ 0, & \text{якщо } n = 3, 4, \ldots. \end{cases} \tag{12}$$

Побудована функція $G_{\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{r},\tau)$ задовольняє умови причинності і взаємності [1], характерні для фундаментального розв'язку класичного оператора L_1. Нижче наводяться розв'язки деяких спеціальних задач для одновимірного рівняння (1) та відзначаються їх властивості.

Нехай початковий розподіл температури на всій осі задовольняє співвідношення (6), де

$$u_0(x) = \begin{cases} w, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \qquad u_3(x) = 0. \tag{13}$$

У цьому випадку рівняння (1) має наступні розв'язки:

$$u = \begin{cases} s(x,t),\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0, \\ s(x,t) - \dfrac{w}{4\varkappa\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2 t}} + (a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2 t}}\right],\ \alpha_1 = 0, \\ s(x,t) - \dfrac{\alpha_2 w}{\alpha_1}\,\dfrac{1 - e^{-\alpha_1 t/\alpha_2}}{4\varkappa t\sqrt{\pi t}}\left[(a-x)e^{-\frac{(a-x)^2}{4\varkappa^2 t}} + (a+x)e^{-\frac{(a+x)^2}{4\varkappa^2 t}}\right], \\ \qquad\qquad \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 < \infty, \end{cases} \tag{14}$$

де

$$s(x,t) = \frac{w}{2}\left[\operatorname{erf}\frac{a-x}{2\varkappa\sqrt{t}} + \operatorname{erf}\frac{a+x}{2\varkappa\sqrt{t}}\right]$$

($\operatorname{erf} z$ — інтеграл ймовірності [1, 2, 10]). Результати обчислень по формулах (14) показали, що до деякого фіксованого моменту часу $t = t_0$ $u(x,t)$ є монотонно спадаючими функциями від x; при $t > t_0$ для розв'язків (14б) та (14в), на відміну від класичного випадку (14а), характерна поява одиничної хвилі, що рухається в напрямку осі x з спадаючою по t амплітудою. При цьому має місце нерівність $0 < u(x,t) \leq w$.

Якщо ж замість другої умови в (13) задати (5), де $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, то розв'язок такої задачі буде відрізнятись від (14в) лише знаком другого члена. Виявляється, що тут вказана нерівність не має місця: існує таке $t = t_0$, що при $t > t_0$ $u(x,t)$ змінює знак на осі x, причому $u \to -0$ при $x \to \infty$. Це явище має місце для будь-яких, скільки завгодно малих $\alpha_2 > 0$.

Покладемо в (1) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, і будемо шукати автомодельний розв'язок вигляду [8]

$$u_A(x,t) = e^{\beta t}\varphi(\xi), \quad \xi = x - vt \quad (\beta, v = \text{const}). \tag{15}$$

Тепловий потік тут, у відповідності з (3), визначається формулою

$$q = \mu e^{\beta t}(\varkappa^2\varphi''' + v\varphi'' - \beta\varphi'), \tag{16}$$

а $\varphi(\xi)$ визначається із диференційного рівняння

$$\varkappa^4\varphi^{IV} + 2\varkappa^2 v\varphi''' + (v^2 - 2\beta\varkappa^2)\varphi'' - 2\beta v\varphi' + \beta^2\varphi = 0. \tag{17}$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi = c_1 e^{r_1\xi} + c_2 e^{r_2\xi} + \xi(c_3 e^{r_1\xi} + c_4 e^{r_2\xi}), \quad r_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2}. \tag{18}$$

Можна довести, що серед множини функцій (18) містяться розв'язки, що задовольняють умови

$$\varphi(\xi) > 0, \quad \xi < 0, \quad \varphi(0) = 0,$$
$$\beta\varphi(0) - v\varphi'(0) - 2\varkappa^2\varphi''(0) = 0, \quad q(0) = 0.$$

Вони забезпечують неперервність початкових даних, що випливають з (6), та потоку в точці $\xi = 0$. Тому існують розв'язки рівняння $L_2 u = 0$ з всюду неперервним q, фінітні по x: $u_A(x,t) > 0$ при $x < vt$, $u_A(x,t) = 0$ при $x \geq vt$. Таким чином, це рівняння придатне для описання процесів з скінченною швидкістю розповсюдження збурень, причому таких розв'язків три:

$$\varphi = \begin{cases} c_1\left(e^{-\frac{v}{\varkappa^2}\xi} - \dfrac{v}{\varkappa^2}\xi - 1\right), & \xi < 0, \\ 0, \quad \xi \geq 0, \quad (\beta = 0); \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} c_2\xi\left(\dfrac{4r_2 + v/\varkappa^2}{4r_1 + v/\varkappa^2}e^{r_1\xi} - e^{r_2\xi}\right), & \xi < 0, \\ 0, \quad \xi \geq 0, \quad \left(\beta = -\dfrac{v^2}{8\varkappa^2}\right); \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} c_3\left[e^{r_2\xi} - e^{r_1\xi} + \dfrac{v(r_2 - r_1)\xi e^{r_1\xi}}{\varkappa^2(4r_1 + v/\varkappa^2)} + \dfrac{v\sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2}}{2\varkappa^2(v^2 + 8\beta\varkappa^2)}\times\right. \\ \qquad \left.\times\left(\sqrt{v^2 + 4\beta\varkappa^2} - v\right)\xi\left(e^{r_2\xi} - \dfrac{4r_2 + v/\varkappa^2}{4r_1 + v/\varkappa^2}e^{r_1\xi}\right)\right], \quad \xi < 0, \\ 0, \qquad \xi \geq 0, \quad \left(-\dfrac{v^2}{8\varkappa^2} < \beta < 0\right), \end{cases}$$

де c_j, $j = \overline{1,3}$ — довільні постійні.

Приклади фінітних розв'язків класичних нелінійних рівнянь теплопровідності, що мають подібні властивості, наведені в [8, 9].

На півосі $x \geq 0$ будемо шукати автомодельні розв'язки рівняння $L_2 u = 0$ для степеневого межового режиму [8]

$$u(0,t) = (1+t)^\alpha, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

вигляду

$$u_A(x,t) = (1+t)^\alpha\varphi(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{1+t}} \quad (0 \leq \xi < \infty). \tag{19}$$

Неважко показати, що $\varphi(\xi)$ задовольняє рівняння

$$\left(\varkappa^2\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi}-(\alpha-1)\right)\left(\varkappa^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi\right)=0,\quad \varphi(0)=1. \tag{20}$$

Його розв'язок виражається через функції Ерміта [10]:

$$\begin{aligned}\varphi &= c_1H_{2\alpha}\left(i\frac{\xi}{2\varkappa}\right)+c_2H_{2(\alpha-1)}\left(i\frac{\xi}{2\varkappa}\right)+\\ &\quad + e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa^2}}\left[c_3H_{-2(\alpha+1)}\left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right)+c_4H_{-2(\alpha-1)}\left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right)\right],\end{aligned} \tag{21}$$

де c_j, $j=\overline{1,4}$ — довільні постійні. Із асимптотичних представлень функцій Ерміта випливає, що

$$\lim_{\xi\to\infty}\varphi=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha\neq 1,\ c_1=c_2=0,\\ 1 & \text{при } \alpha=1,\ c_1=0.\end{cases}$$

Доведена наступна

Теорема 1. *Нехай $u_A(x,t)$ — автомодельний розв'язок рівняння $L_2u=0$ вигляду (19), обмежений на нескінченності. Тоді:*

1) якщо $0<\alpha<1$, то вибором постійних c_2, c_3 і c_4 в (21) можна визначити фінітний по x розв'язок з всюди неперервним тепловим потоком, що описує хвилю з скінченною швидкістю розповсюдження збурень;

2) якщо $\alpha>1$, то $u_A(x,t)$ — монотонна функція своїх аргументів, що описує розповсюдження збурень з нескінченною швидкістю.

Нехай $x\geq 0$, а при $x=0$ для рівняння $L_2u=0$ задано межовий режим з загостренням [8]

$$u(0,t)=(T-t)^{-\alpha},\quad \alpha=\text{const}>0, \tag{22}$$

тобто $u(0,t)\to\infty$ при $t\to T^-$. Автомодельний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$u_A(x,t)=(T-t)^{-\alpha}\varphi(\xi),\quad \xi=\frac{x}{\sqrt{T-t}}. \tag{23}$$

Можна показати, що $\varphi(\xi)$ задовольняє рівняння

$$\left(\varkappa^2\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{\xi}{2}\frac{d}{d\xi}-(\alpha+1)\right)\left(\varkappa^2\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-\frac{\xi}{2}\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi\right)=0,\quad \varphi(0)=1, \tag{24}$$

а його розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned}\varphi &= c_1H_{-2\alpha}\left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right)+c_2H_{-2(\alpha+1)}\left(\frac{\xi}{2\varkappa}\right)+\\ &\quad + e^{\frac{\xi^2}{4\varkappa^2}}\left[c_3H_{2\alpha-1}\left(\frac{i\xi}{2\varkappa}\right)+c_4H_{2\alpha+1}\left(\frac{i\xi}{2\varkappa}\right)\right].\end{aligned} \tag{25}$$

Доведена наступна

Теорема 2. *В степеневому межовому режимі з загостренням при будь-якому $\alpha>0$ рівняння $L_2u=0$ не має фінітних автомодельних розв'язків вигляду (23), обмежених на нескінченності, і описує розповсюдження збурень з нескінченною швидкістю.*

1. Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, в 2 т., М., Изд-во иностр лит., 1958, Т. 1, 930 с.
2. Лыков А.В., Теория теплопроводности, М., Высш. шк., 1967, 599 с.
3. Толубинский Е.В., Теория процессов переноса, Киев, Наук. думка, 1969, 259 с.
4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Обобщенная термомеханика, Киев, Наук. думка, 1976, 310 с.
5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–22.
6. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
7. Положий Г.Н., Уравнения математической физики, М., Высш. шк., 1964, 560 с.
8. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах квазилинейных параболических уравнений, М., Наука, 1987, 477 с.
9. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А., Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур), М., Наука, 1987, 352 с.
10. Никифиров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики, М., Наука, 1984, 319 с.