Подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(2,3)$ и симметрийная редукция нелинейного ультрагиперболического уравнения Даламбера. I

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

1. Введение. Рассмотрим нелинейное ультрагиперболическое уравнение Даламбера в $(2+3)$-мерном псевдоевклидовом пространстве

$$\Box u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu}\right), \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}\Box u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} - u_{55}, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad u \equiv u(x), \\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 5,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = (u_1)^2 + (u_2)^2 - (u_3)^2 - (u_4)^2 - (u_5)^2, \quad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \tag{3}$$

F — произвольная гладкая функция.

Редукция волнового уравнения (1) в $(1+3)$-мерном пространстве осуществлена в [1, 2]. Пятимерное уравнение (1)–(3) можно рассматривать как естественное обобщение линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока; оно часто встречается в квантовой теории с фундаментальной длиной [3], в супергравитации, в квантовой теории частиц с переменной массой и спином [4].

К настоящему времени нет каких-либо эффективных методов решения многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Для ДУЧП специального вида, обладающих нетривиальной симметрией, одним из конструктивных способов исследования многомерных ДУЧП является метод редукции. Основы этого метода были заложены в классических трудах Софуса Ли и в настоящее время они интенсивно применяются и развиваются в различных направлениях [1, 2, 5–7].

Уравнение (1) инвариантно относительно группы Пуанкаре $P(2,3)$ — группы вращений и сдвигов в пятимерном псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой $(++---)$. Алгебру Ли этой группы обозначим символом $AP(2,3)$.

Провести редукцию какого-либо ДУЧП означает следующее [1, 5]: описать, например, все анзацы вида

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_s), \qquad 1 \le s \le 4, \tag{4}$$

Укр. мат. журн., 1988, **40**, № 4, С. 411–416.

при которых уравнение (1) сводится к уравнению для неизвестной функции $\varphi(\omega)$, $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_s\}$, и в это уравнение входят только “новые” переменные ω. Число “новых” переменных ω, по крайней мере, на единицу меньше числа “старых” переменных $x = \{x_1, \dots, x_5\}$. Ясно, что для редукции уравнения (1) необходимо в явном виде построить функцию $f(x)$ и переменные ω. С этой целью исследуем решетку подалгебр алгебры инвариантности $AP(2,3)$ уравнения (1). Зная неэквивалентные подалгебры алгебры $AP(2,3)$, найдем все наборы переменных ω, при которых анзац (4) (рассматриваем простейший случай, когда $f(x) = 1$) сведет пятимерное уравнение (1) к нескольким ДУЧП в s-мерном пространстве относительно переменных ω.

Итак, основной задачей редукции (более точно симметрийной редукции) является описание всех неэквивалентных подалгебр алгебры $AP(2,3)$. Полное решение этой задачи для алгебры $AP(2,2)$ и одного класса подалгебр алгебры $AP(2,3)$ дано в настоящей работе, и на ее основе получена система редуцированных уравнений для (1). В литературе исследована относительно определенной сопряженности решетка подалгебр таких алгебр: $AP(1,3)$ [8], $AO(1,4)$ [9], $AP(1,4)$ [10], $AP(2,2)$ [11], $A\tilde{P}(1,4)$ [12].

В п. 2 первой части работы введены необходимые понятия и определения, в п. 3 описаны все подалгебры коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$. В п. 1 второй части работы проведена классификация подалгебр алгебры $AP(2,2)$, в п. 2 построены инварианты подалгебр алгебр $AP(2,2)$ и $AP(2,3)$, а в п. 3 осуществлена симметрийная редукция уравнения (1).

2. Основные понятия. Обобщенной группой Пуанкаре $P(2,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Lambda & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Lambda \in O(2,n)$, $Y \in R^{(2+n)}$. Алгебра Ли $AP(2,n)$ этой группы определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} &[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\ &[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \dots = -g_{n+1,n+2} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, n+2$.

Если считать, что $AP(2,n)$ является алгеброй Ли векторных полей на $R(2,n)$, то инфинитезимальные операторы (5) представляются такими дифференциальными операторами первого порядка: $J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma}x_\gamma\partial_\beta - g^{\beta\gamma}x_\gamma\partial_\alpha$ (псевдовращения), $P_\alpha = \partial_\alpha$ (трансляции), где $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n+2)$.

Пусть G — подгруппа Ли группы $P(2,n)$ $\langle X_1, \dots, X_s\rangle = AG$-алгебра Ли группы G. Не тождественно постоянная функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+2})$ называется инвариантом группы G, если $f(x)$ постоянна на G-орбите каждой точки $x \in R(2,n)$. Известно [6], что $f(x)$ является инвариантом G тогда и только тогда, когда

$$X_i f(x) = 0 \tag{6}$$

для всех $i = 1, \dots, s$. Пусть r_* — общий ранг касательного отображения группы G [6], а $m = n + 2 - r_*$. Если $r_* < n + 2$, то существует система m функционально независимых инвариантов $f_1(x),\dots,f_m(x)$, обладающая тем свойством, что любой инвариант группы G имеет вид $\Psi(f_1(x),\dots,f_m(x))$. Эту систему инвариантов будем называть полной системой инвариантов группы G или алгебры AG. Число r_* назовем рангом алгебры AG, а число m — коразмерностью AG.

Пусть L_1 и L_2 — подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Если для некоторого элемента $C\in P(2,n)$ подалгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами, то подалгебры L_1, L_2 будем называть эквивалентными. В этом случае используем обозначение $L_1\approx L_2$.

Если функции $f_i(x)$, $i=1,\dots,k$, являются инвариантами ненулевой подалгебры L алгебры $AP(2,n)$, то L будем называть алгеброй инвариантности данной системы функций. Алгебра инвариантности называется минимальной, если она неэквивалентна ни одной своей собственной подалгебре. Из эквивалентности минимальных алгебр инвариантности не вытекает их сопряженность относительно группы внутренних автоморфизмов группы $P(2,n)$. Например, алгебры $\langle J_{13}-J_{35},P_1+P_5\rangle$, $\langle P_3,P_1+P_5\rangle$ являются минимальными алгебрами инвариантности для функций x_1-x_5, x_2, x_4 в пространстве $R(2,3)$. Очевидно, эти алгебры не являются $P(2,3)$-сопряженными. В то же время, поскольку для любых $X_1,X_2\in AP(2,n)$ имеем $[X_1,X_2]=X_1X_2-X_2X_1$, то для системы инвариантов каждой подалгебры алгебры $AP(2,n)$ существует одна максимальная алгебра инвариантности, содержащая все алгебры инвариантности данной системы функций.

Предложение 1. *Пусть L_1, L_2 — подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Для того чтобы $L_1\approx L_2$, необходимо и достаточно, чтобы максимальные алгебры инвариантности полных систем инвариантов подалгебр L_1 и L_2, были $P(2,n)$-сопряженными.*

Доказательство. Если $L_1\approx L_2$, то для некоторого элемента $C\in P(2,n)$ алгебры CL_1C^{-1} и L_2 обладают одними и теми же инвариантами. Пусть K_i — максимальная алгебра инвариантности полной системы инвариантов алгебры L_i, $i=1,2$. Очевидно, CK_1C^{-1} и K_2 обладают одними и теми же инвариантами, откуда в силу единственности максимальной алгебры инвариантности заключаем, что $CK_1C^{-1}=K_2$. Наоборот, если $CK_1C^{-1}=K_2$ для $C\in P(2,n)$, то CL_1C^{-1} и L_2 имеют одни и те же инварианты, а значит, $L_1\approx L_2$. Предложение доказано.

3. Подалгебры коразмерности 1 алгебры $\boldsymbol{AP(2,3)}$. Поскольку в [7] найдены подалгебры коразмерности 1 алгебры $AP(1,3)$, а во второй части работы будет получен перечень всех подалгебр для алгебры $AP(2,2)$, то следует исключить из рассмотрения подалгебры вида $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$, где $L\subset AP(2,2)$, $K\subset AP(1,3)=\langle P_a\rangle\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{ab}|a,b=2,3,4,5\rangle$. В дальнейшем через $\mathcal{L}$ будем обозначать минимальную подалгебру коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$, не эквивалентную $AO(2,3)$, $\langle P_1\rangle\oplus K$, $L\oplus\langle P_5\rangle$ и обладающую тем свойством, что ее проекция $\pi(\mathcal{L})$ на $AO(2,3)$ принадлежит нормализатору $AOpt(1,2)$ двумерного изотропного пространства $\langle P_1+P_5,P_2+P_4\rangle$ в $AO(2,3)$.

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&M=J_{12}-J_{25}+J_{14}-J_{45},\quad D=-J_{15}+J_{24},\quad Z=J_{15}+J_{24},\\
&S=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}-J_{14}-J_{25}),\quad T=\frac{1}{2}(J_{12}+J_{45}+J_{14}+J_{25}),\\
&G_3=J_{13}-J_{35},\quad H_3=J_{23}-J_{34},\quad N_1=P_1+P_5,\quad N_2=P_2+P_4,
\end{aligned}
$$

$$Y_1 = P_1 - P_5, \quad Y_2 = P_2 - P_4, \quad AGL(2,R) = \langle D, S, T\rangle \oplus \langle Z\rangle,$$
$$U = \langle Y_1, Y_2, N_1, N_2, P_3\rangle.$$

Записанные элементы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered}
[D,S] = 2S, \quad [T,D] = 2T, \quad [T,S] = D, \quad [M,Z] = 2M, \quad [G_3,Z] = G_3,\\
[H_3,Z] = H_3, \quad [Z,Y_1] = Y_1, \quad [Z,Y_2] = Y_2, \quad [N_1,Z] = N_1, \quad [N_2,Z] = N_2,\\
[D,G_3] = G_3, \quad [H_3,D] = H_3, \quad [Y_1,D] = Y_1, \quad [D,Y_2] = Y_2, \quad [D,N_1] = N_1,\\
[N_2,D] = N_2, \quad [S,H_3] = G_3, \quad [Y_1,S] = Y_2, \quad [S,N_2] = N_1, \quad [G_3,T] = H_3,\\
[T,Y_2] = Y_1, \quad [N_1,T] = N_2, \quad [G_3,H_3] = M, \quad [Y_1,G_2] = 2P_3, \quad [P_3,G_3] = N_1,\\
[Y_2,H_3] = 2P_3, \quad [P_3,H_3] = N_2, \quad [Y_1,M] = 2N_2, \quad [M,Y_2] = 2N_1
\end{gathered} \tag{7}$$

(нулевые коммутаторы опущены).

В [11] показано, что $AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3\rangle \oplus AGL(2,R)$. Очевидно, $\mathcal{L} \subset U \dot{+} AOpt(1,2)$. Через τ, ε, π будем обозначать проектирования $\mathcal{L}$ соответственно на $AGL(2,R)$, пространство $\langle P_3, H_3, G_3\rangle$ и $AO(2,3)$. Исследование алгебры $\mathcal{L}$ проводится в леммах 1–7 и теореме 1 в зависимости от ее проекции $\tau(\mathcal{L})$. Если $\tau(L_1) \neq L_2$, но $L_1 \approx L_2$, то в перечне подалгебр будет фигурировать только алгебра L_1.

Лемма 1. *Если $\tau(\mathcal{L}) = 0$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из следующих алгебр:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 = \langle G_3 + 2Y_2 + \alpha N_2, H_3 + Y_1 + \beta Y_2, M + 2P_3, N_1\rangle, \quad \alpha, \beta \in R,\\
&\mathcal{L}_2 = \langle G_3 + Y_2, H_3 + Y_1, M, N_1, N_2\rangle,\\
&\mathcal{L}_3 = \langle G_3 + Y_1, H_3 + Y_2, M, N_1, N_2\rangle,\\
&\mathcal{L}_4 = \langle G_3 + Y_1, H_3 - Y_2, M, N_1, N_2\rangle.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3\rangle$. С точностью до автоморфизма $\exp(\theta^i Y_j + \theta_3 P_3)$, $i = 1,2$, алгебра $\mathcal{L}$ содержит элементы $X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha N_2 + \delta M$, $X_2 = H_3 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \sigma M$. Очевидно, проекция $\sigma X_1 - \delta X_2$ на $\langle M\rangle$ равна нулю. Отсюда заключаем, что с точностью до автоморфизма $\exp\theta(S+T)$ можно предполагать, что $\delta = 0$. Автоморфизм $\exp(\theta G_3)$ позволяет обратить в нуль и коэффициент σ. Если $P_3 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_2 Y_2 + \delta_1 N_1 + \delta N_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $N_1 + 2\gamma_1 P_3$, $N_2 + 2\gamma_2 P_3$, $2\gamma_1 N_1$, а потому $N_1, N_2, P_3 \in \mathcal{L}$. Но в таком случае $\mathcal{L} \approx L \oplus \langle P_5\rangle$, где $L \subset AP(2,2)$. Противоречие. Пусть $X_3 = [X_1, X_2]$. Очевидно, $X_3 = M + 2(\alpha_2 - \lambda_1)P_3$, где $\alpha_2 - \lambda_2 \neq 0$, $[X_3, X_1] = (4\alpha_2 - 2\lambda_1)N_1 - 2\alpha_1 N_2$, $[X_3, X_2] = 2\lambda_2 N_1 + (2\alpha_2 - 4\lambda_1)N_2$. Если $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент вида $\rho_1 N_1 + \rho_2 N_2$, то, применяя автоморфизм $\exp\theta(S+T)$, получаем $N_1 \in \mathcal{L}$. Так как $\langle M + \mu P_3, N_1, N_2\rangle \approx \langle P_3, N_1, N_2\rangle$, то $N_2 \notin \mathcal{L}$. Поэтому можно предполагать, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\lambda_1$. С точностью до автоморфизма $\exp(\theta, Z)$ получаем $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

Пусть $\varepsilon\mathcal{L} = \langle G_3, P_3\rangle$. Тогда, применяя автоморфизм $\exp(\theta_1, Y_1 + \theta_2 H_3 + \theta_3 P_3\rangle$, убеждаемся, что $\mathcal{L}$ содержит элементы $X_1 = G_3 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \beta N_2$, $X_2 = P_3 + \gamma M + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu N_2$, $X_3 = [X_2, X_1] = (1 + 2\gamma\alpha_2)N_1 - 2\gamma\alpha_1 N_2 + 2\lambda_1 P_3$, $X_4 = [X_3, X_1] = 2\lambda_1 N_1$. За счет автоморфизма $\exp(\theta_1 H_3 + \theta_2 Y_1)$ можно допускать, что $\lambda_2 = 0$ при $\gamma \neq 0$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то $N_1, P_3 - \gamma\alpha_1\lambda_1^{-1}N_2 \in \mathcal{L}$. Автоморфизм $\exp(\theta H_3)$ позволяет выделить P_3, что противоречит определению $\mathcal{L}$. Значит, $\lambda_1 = 0$. Так как $\dim\mathcal{L} \geq 4$, то $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент $\delta_1 N_1 + \delta_2 N_2 + \sigma M + \rho Y_2$. Анализируя возможные случаи, приходим к выводу, что $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$, где $\varepsilon(\mathcal{L}') = \langle G_3\rangle$.

Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3 \rangle$, то $\mathcal{L}$ сопряжена алгебре $\langle G_3 + Y_1, Y_2, N_1, N_2 \rangle$, а последняя эквивалентна алгебре $L \oplus \langle P_5 \rangle$, где $L \subset AP(2,2)$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle P_3 \rangle$, то $P_3 \in \mathcal{L}$ или $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$, где $\varepsilon L' = 0$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$, то с точностью до автоморфизмов $\exp\theta(S+T)$, $\exp(\theta_1 J_{15} + \theta_2 J_{24})$, $\exp(\theta T)$ алгебра $\mathcal{L}$ сопряжена одной из алгебр $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_5 = \langle D + \alpha P_3, G_3 + \beta Y_2, M + P_3, N_1 \rangle, \quad \beta \neq 0,\\
&\mathcal{L}_6 = \langle D, G_3 + Y_2, M - 2P_3, N_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_7 = \langle D + \alpha P_3, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0,\\
&\mathcal{L}_8 = \langle D, G_3 + Y_2, N_1, N_2 \rangle, \quad \mathcal{L}_9 = \langle D + \alpha P_3, M + P_3, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Так как D действует вполне приводимо на U и аннулирует в U только $\langle M, P_3 \rangle$, то в силу предложения 2.1 [12] $D + \gamma M + \delta P_3 \in \mathcal{L}$. На основании леммы 3.1 [12] пространство $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3 \rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$, то ранг алгебры $\mathcal{L}$ равен 5. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$. С точностью до сопряженности $G_3 + \lambda Y_2 \in \mathcal{L}$, $\lambda \neq 0$. Проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1 \rangle$ равна 0. Если $M + \mu P_3 \in \mathcal{L}$, $\mu \neq 0$, то $D + \delta P_3 \in \mathcal{L}$. При $\delta \neq 0$ получаем алгебру $\mathcal{L}_5$. Если $N_2 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L} = \mathcal{L}_6$. Допустим, что $M + \mu P_3 \notin \mathcal{L}$, $\mu \neq 0$. В этом случае $N_1, N_2 \in \mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L}$ эквивалентна $\mathcal{L}_7$.

Пусть $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Автоморфизм, соответствующий $\mathrm{diag}\,[J, 1, J]$, сводит случай $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle H_3, P_3 \rangle$ к случаю $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, P_3 \rangle$.

Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3 + \beta Y_2$, $H_3 + \beta Y_1 + \delta N_2$, M. Если $\beta \neq 0$, то $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_8$. Если $\beta = 0$, то $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D + \lambda Z \rangle$, $\lambda > 0$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{10} = \langle 3D + Z + \mu P_3, M + Y_1, Y_2, N_1 \rangle, \quad \mu > 0,\\
&\mathcal{L}_{11} = \langle D + Z + \alpha P_3, G_3 + Y_1, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha > 0,\\
&\mathcal{L}_{12} = \langle 3D + Z, M + Y_1, H_3, N_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Лемма 4. *Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle T \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной из алгебр*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{13} = \langle T + G_3 + \alpha Y_1 + Y_3, H_3 + 2Y_1 + \beta N_1, M - 2P_3, N_3 \rangle, \quad \alpha, \beta \in R,\\
&\mathcal{L}_{14} = \langle T + G_3 + \alpha Y_1 + Y_2, H_3 + Y_1, M, N_1, N_2 \rangle, \quad \alpha \in R.
\end{aligned}$$

Доказательство лемм 3, 4 аналогично доказательству лемм 1,2.

Лемма 5. *Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D, T \rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна $\mathcal{L}_{15} = \langle D, T, H_3 + Y_1, M + 2P_3 \rangle$.*

Доказательство. На основании предложения 2.1 и леммы 3.1 [12] алгебра $\mathcal{L}$ содержит $\langle D + \alpha M + \beta P_3, T \rangle$, а $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, P_3 \rangle$, $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$, $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$, причем, если K -— проекция $\mathcal{L} \cap U$ на $\langle G_3, Y_2, N_1 \rangle$, то $[T, K]$ содержится в проекции $\mathcal{L} \cap U$ на $\langle H_3, Y_1, N_2 \rangle$. Легко видеть, что $\langle T, N_2 \rangle \approx \langle Y_1, N_2 \rangle$, $\langle T, Y_1 + \delta N_2 \rangle \approx \langle Y_1, N_2 \rangle$. Если $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3, P_3 \rangle$, то $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{15}$. Пусть $\varepsilon(\mathcal{L}) = \langle G_3, H_3 \rangle$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит $G_3 + \gamma Y_2$, $H_3 - \gamma Y_1$. Так как $[G_3 + \gamma Y_2, H_3 - \gamma Y_1] = M + 4\gamma P_3$, то $\gamma = 0$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если $\tau(\mathcal{L}) = \langle D + \lambda Z, T\rangle$, $\lambda \neq 0$, то $\mathcal{L}$ сопряжена одной из следующих алгебр:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{16} = \langle D + 3Z, T + G_3, N_1, N_2\rangle,\\
&\mathcal{L}_{17} = \langle D + 3Z + \alpha P_3, T + G_3, N_1, N_2\rangle, \quad \alpha > 0,\\
&\mathcal{L}_{18} = \langle D + 3Z, T + G_3, M, H_3 + \gamma N_2\rangle, \quad \gamma > 0,\\
&\mathcal{L}_{19} = \langle D + 3Z, T + N_1, M, H_3\rangle.
\end{aligned}$$

Доказательство. На основании коммутационных соотношений (7) имеем

$$\begin{aligned}
&[D + \lambda Z, \alpha T + \beta G_3 + \gamma H_3 + \delta P_3 + \rho_1 Y_1 + \rho_2 Y_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \sigma M] =\\
&= -2\alpha T + (1 - \lambda)(\beta G_3 + \mu_1 N_1) - (1 + \lambda)(\gamma H_3 + \mu_2 N_2) + (\lambda - 1)\rho_1 Y_1 +\\
&\ + (\lambda + 1)\rho_2 Y_2 - 2\lambda\sigma M.
\end{aligned}$$

Пусть $\lambda \neq \pm 1/3, \pm 1, \pm 3$. В силу предложения 2.1 и леммы 3.1 из [12] алгебра $\mathcal{L}$ содержит $D + \lambda Z + \mu P_3$, T, а пространство $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M\rangle$, $\langle Y_1\rangle$, $\langle Y_2\rangle$, $\langle G_3, N_1\rangle$, $\langle H_3, N_2\rangle$, $\langle P_3\rangle$. Если $G_3 + \gamma N_1 \in \mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ содержит $[G_3 + \gamma N_1, T] = H_3 + \gamma N_2$, а также M. В этом случае $\mathcal{L} = \langle D + \lambda Z, M, G_3 + \gamma N_1, H_3 + \gamma N_2, T\rangle$, а потому $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$.

Если $\lambda = 1/3$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D + Z + \mu P_3$, T, а $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle M, Y_1\rangle$, $\langle Y_2\rangle$, $\langle G_3, N_1\rangle$, $\langle H_3, N_2\rangle$, $\langle P_3\rangle$. Отсюда вытекает, что если $\mu = 0$, то $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$ или $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_{19}$; если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$. Если $\lambda = -1/3$, то $\mathcal{L}$ содержит $3D - Z + \mu P_3$, T, а $\mathcal{L} \cap U$ разлагается в сумму своих проекций на $\langle Y_1\rangle$, $\langle M, Y_2\rangle$, $\langle G_3, N_1\rangle$, $\langle H_3, N_2\rangle$, $\langle P_3\rangle$. Поскольку $[T, Y_2] = Y_1$, $\langle T, Y_1\rangle \approx \langle N_2, Y_1\rangle$, то проекция $\mathcal{L}$ на $\langle Y_1, Y_2\rangle$ равна нулю. Если $\mu = 0$, то $\mathcal{L}$ сопряжена подалгебре алгебры $AO(2,3)$. Если $\mu \neq 0$, то $\dim \mathcal{L} = 3$.

Случаи $\lambda = \pm 1, \pm 3$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если $Z \in \tau(\mathcal{L})$, то $\mathcal{L}$ сопряжена одной из алгебр*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{20} = \langle D + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2\rangle, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \geq 0,\\
&\mathcal{L}_{21} = \langle S + T + \alpha P_3, Z + \beta P_3, N_1, N_2\rangle, \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha, \beta \geq 0.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству предыдущих лемм.

Теорема 1. *Подалгебры коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$, не эквивалентные $AO(2,3)$, $\langle P_1\rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5\rangle$, исчерпываются относительно эквивалентности алгебрами, описанными в леммах 1–7.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случаев алгебр $\mathfrak{C} \subset AP(2,3)$, проекции которых на $AO(2,3)$ не сопряжены подалгебрам алгебры $AOpt(1,2)$. Пусть $G_a = J_{1a} - J_{a5}$, $a = 2,3,4$, $AO(2,4) = \langle J_{cd} | c, d = 2,3,4\rangle$, $A\tilde{P}(1,2)' = \langle G_2, G_3, G_4\rangle \Subset (AO(2,4) \oplus \langle J_{15}\rangle)$. Так как $J_{15} = (Z - D)/2$, $G_2 = (M + 2S)/2$, $G_4 = (M - 2S)/2$, то $J_{15}, G_2, G_3, G_4 \in AOpt(1,2)$. Отсюда вытекает, что подалгебра $\mathfrak{F}$ алгебры $A\tilde{P}(1,2)'$ не сопряжена подалгебре алгебры $AOpt(1,2)$ тогда и только тогда, когда ее проекция $\mathfrak{R}$ на $AO(2,4)$ не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_2, P_3, P_4\rangle$. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда сопряжена одной из алгебр $AO(2,4)$, $\langle J_{34}\rangle$.

Пусть $\mathcal{L}$ — подалгебра коразмерности 1 алгебры $AP(2,3)$, не эквивалентная $AO(2,3)$, $\langle P_1\rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5\rangle$; π — проектирование $\mathcal{L}$ на $AO(2,3)$; $\mathfrak{F} = \pi(\mathcal{L}) \subset A\tilde{P}(1,2)'$, $\mathfrak{R} = \langle J_{34}\rangle$. В силу леммы 3.1 [12] алгебра $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию W

на $\langle G_3, G_4, P_3, P_4\rangle$. Если $W = 0$, то функция $x_3^2+x_4^2$ будет инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \approx \langle J_{34}, P_1, P_2, P_5\rangle$. Если $P_3, P_4 \in W$, то $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Пусть $W \neq 0$ и $P_3, P_4 \notin W$. Тогда W обладает базисом $G_3 + \alpha P_3 + \beta P_4$, $G_4 - \beta P_3 + \alpha P_4$. Коммутатор этих элементов совпадает с $2\beta N_1$. Если $\beta \neq 0$, то $N_1 \in \mathcal{L}$. Отсюда легко получить, что $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $\beta = 0$, то с точностью до автоморфизма $\exp(\theta Y_1)$ имеем $W = \langle G_3, G_4\rangle$. Если проекция $\mathcal{L}$ на $\langle J_{15}\rangle$ равна 0, то $x_1 - x_5$ является инвариантом $\mathcal{L}$, а потому $\mathcal{L} \approx \langle N_1, P_2, P_3, P_4\rangle$. Если проекция Ω на $\langle N_1, G_2\rangle$ отлична от 0, то $\mathcal{L}$ содержит свою проекцию Ω на $\langle N_1, G_2\rangle$. Допустим, что $\Omega = \langle G_2 + \gamma N_1\rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(\theta P_2)$, получаем $G_2 \in \Omega$. Если $N_1 \in \Omega$, то $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}'$, где $\pi(\mathcal{L}') \subset AOpt(1,2)$. Если $N_1 \notin \Omega$, то $\mathcal{L} \approx AO(2,3)$ или $\mathcal{L} \approx L \oplus \langle P_5\rangle$.

Случай $\mathfrak{F} = \pi(\mathcal{L})$, $\mathfrak{R} = AO(2,4)$ рассматривается аналогично. Если проекция $\mathcal{L}$ на $AO(2,3)$ не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$, то $\mathcal{L}$ эквивалентна одной и алгебр $AO(2,3)$, $\langle P_1\rangle \oplus K$, $L \oplus \langle P_5\rangle$. Теорема доказана.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в Теоретико-алгебраические методы исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear manydimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.
3. Кадышевский В.Г., Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий, *Физика элементр., частиц и атом. ядра*, 1980, **11**, вып. 1, 5–36.
4. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
5. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
10. Fushchych W.I, Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
11. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2,n)$, Препринт № 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
12. Barannik L.F., Fushchych W.I., On subaalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1,n)$, *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 7, 1003–1017.