О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

Получен ряд общих результатов о подалгебрах алгебры Ли $AC(1,n)$ конформной группы $C(1,n)$ пространства Минковского $R_{1,n}$, исследуемых относительно $C(1,n)$-сопряженности. Найдены в явном виде максимальные, максимальные разрешимые, максимальные абелевы и одномерные подалгебры алгебры $AC(1,n)$. Проведена классификация всех подалгебр алгебры $AC(1,4)$. Посредством симметрийной редукции найдены некоторые точные решения уравнения эйконала.

Введение

Конформная группа $C(1,n)$ является группой инвариантности ряда важных уравнений теоретической и математической физики [1]. Поэтому подгруппы этой группы можно использовать для построения точных решений таких уравнений. Если ограничиться связными подгруппами группы $C(1,n)$, то задача об их классификации относительно $C(1,n)$-сопряженности сводится к задаче о классификации подалгебр алгебры Ли $AC(1,n)$ группы $C(1,n)$ относительно $C(1,n)$-сопряженности. Такая классификация была проведена для $n=2$ [2]. В работах [3, 4] классифицированы подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,3)$, $AOpt(1,3)$, что позволяет говорить о почти завершенной классификации подалгебр алгебры $AC(1,3)$.

В данной работе для произвольного $n\geq 2$ изучается структура подалгебр алгебры $AC(1,n)$. Работа является продолжением исследований, выполненных в [5–9]. В § 1 приведено модифицированное изложение известных результатов о реализациях конформной группы и ее алгебры Ли. В § 2, используя результаты работ (10, 11], мы даем описание максимальных подалгебр алгебры $AC(1,n)$. В §§ 3, 4 исследуются подалгебры алгебр $A\tilde{P}(1,n)$, $AOpt(1,n)$ соответственно. Здесь же изложена классификация подалгебр алгебр $A\tilde{P}(1,4)$, $AOpt(1,4)$ относительно $C(1,4)$-сопряженности. В § 5 выделены максимальные разрешимые, максимальные абелевы и одномерные подалгебра алгебры $AC(1,n)$. § 6 посвящен классификации подалгебр алгебры $AC(1,4)$. В приложении приведены некоторые точные решения уравнения ейконала.

§ 1. Реализация конформной группы и ее алгебры Ли

Пусть $R_{1,n}$ $(n\geq 2)$ — пространство Минковского с метрикой $g_{\alpha\beta}$, где $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$, $g_{00}=-g_{11}=\cdots=-g_{nn}=1$ $(\alpha,\beta=0,1,\ldots,n)$. Отображение $x_i=x_i(y_0,y_1,\ldots,y_n)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ области $U\subset R_{1,n}$ в $R_{1,n}$ называется конформным, если

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}g^{kl}\frac{\partial x_l}{\partial y_\beta}=\lambda(x)g_{\alpha\beta},\quad (\lambda(x)\neq 0;\ x=x(y);\ x,y\in U;\ \alpha,\beta=0,1,\ldots,n).$$

Препринт 88.34, Институт математики АН УССР, Киев, 1988, 48 с.

Согласно теореме Лиувилля конформное преобразование области U является композицией движения, дилатации и инверсии или композицией движения и дилатации. Под движениями подразумеваются элементы группы $O(1,n)$ и сдвиги (трансляции) $T_{\vec{a}}: \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$, под дилатациями (разтяжениями) — отображения $\vec{x} \to \lambda\vec{x}$ ($\lambda \in R$, $\lambda > 0$), а инверсиями называют отображения

$$\hat{S}: \vec{x} \to \left(\frac{x_0}{\vec{x}^{\,2}}, \frac{x_1}{\vec{x}^{\,2}}, \dots, \frac{x_n}{\vec{x}^{\,2}}\right), \quad \hat{S}T_{\vec{a}},$$

где $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\vec{x}^{\,2} = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$.

Пусть $O(2, n+1)$ — группа изометрии псевдоэвклидова пространства $R_{2,n+1}$. Эта группа сохраняет конус

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_{n+3}^2 = 0$$

и действует на этом конусе точно. Пусть

$$x_\mu = z_{\mu+2}(z_{n+3} - z_1)^{-1} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда

$$\vec{x}^{\,2} = \frac{z_{n+3} + z_1}{z_{n+3} - z_1}, \quad z_1 = \frac{\vec{x}^{\,2} - 1}{\vec{x}^{\,2} + 1} z_{n+3}, \quad z_{\mu+2} = \frac{2z_{n+3}}{\vec{x}^{\,2} + 1} x_\mu \quad (\mu = 0, 1, \dots, n).$$

Пусть $C = (c_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n+3)$ — элемент $O(2, n+1)$. Отображение $\vec{x}\,' = C\vec{x}$ индуцирует отображение $\varphi_C : \vec{x} \to \vec{x}\,'$, которое в развернутом виде запишется так:

$$x'_{\mu-2} = \frac{2c_{\mu\nu}x^{\nu-2} + (c_{\mu,n+3} + c_{\mu1})\vec{x}^{\,2} + (c_{\mu,n+3} - c_{\mu1})}{2(C_{n+3,\nu} - c_{1\nu})x^{\nu-2} + a\vec{x}^{\,2} + b}, \tag{1.1}$$

где $\mu, \nu = 2, \dots, n+2$; $a = c_{n+3,n+3} - c_{11} - c_{1,n+3} + c_{n+3,1}$, $b = c_{n+3,n+3} + c_{11} - c_{1,n+3} - c_{n+3,1}$.

Теорема 1.1. *Отображение $\varphi : O(2, n+1) \to C(1, n)$, сопоставляющее матрице $C \in O(2, n+1)$ локальное преобразование φ_C пространства $R_{1,n}$, является гомоморфизмом группы $O(2, n+1)$ на группу $C(1, n)$ с ядром $\{\pm E_{n+3}\}$.*

Доказательство. Если

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2,n+2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{n+2,2} & \cdots & c_{n+2,n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то формула (1.1) примет вид $x'_{\mu-2} = c_{\mu\nu}x^{\nu-2}$ $(\mu, \nu = 2, \dots, n+2)$. Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R_{1,n}$,

$$E_{1,n} = \mathrm{diag}[1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n}], \quad E_m = \mathrm{diag}[\underbrace{1, \dots, 1}_{m}],$$

$\vec{a}^{\,T}$ — вектор-столбец, получаемый из $\vec{a}$ в результате транспонирования,

$$C = \begin{pmatrix} -\dfrac{\vec{a}^{\,2}}{2}+1 & \vec{a}E_{1,n} & \dfrac{\vec{a}^{\,2}}{2} \\ -\vec{a}^{\,T} & E_{n+1} & \vec{a}^{\,T} \\ -\dfrac{\vec{a}^{\,2}}{2} & \vec{a}E_{1,n} & \dfrac{\vec{a}^{\,2}}{2}+1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C \in O(2, n+1)$, а преобразование (1.1) примет вид $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$. Если

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda} & 0 & \dfrac{\lambda^2-1}{2\lambda} \\ 0 & E_{n+1} & 0 \\ \dfrac{\lambda^2-1}{2\lambda} & 0 & \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda} \end{pmatrix},$$

то $x'_\mu = \lambda x_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, n)$. Если $C = -E_{1,n+2}$, то

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{\vec{x}^{\,2}} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n).$$

На основания проведенних рассуждений и теоремы Лиувилля заключаем, что каждое конформное преобразование имеет вид φ_C, где $C \in O(2, n+1)$. Теперь покажем, что для каждой матрицы $C \in O(2, n+1)$ отображение φ_C является конформным.

Если $T_{\vec{a}}$ — сдвиг пространства $R_{1,n}$ на вектор $\vec{a}$, то $\hat{S}T_{\vec{a}}\hat{S}$ задается формулой

$$x'_\mu = \frac{x_\mu + \vec{x}^{\,2} a_\mu}{2g^{\rho\nu}a_\rho x_\nu + \vec{a}^{\,2}\vec{x}^{\,2} + 1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n).$$

Композиция $\hat{S}T_{\vec{a}}\hat{S}$ и преобразования подобия

$$x''_\mu = \lambda b_{\mu\nu} x'^{\nu} + c_\mu$$

совпадают с преобразованием

$$x''_\mu = \frac{(\lambda b_{\mu\nu} + 2c_\mu g_{\rho\nu}a^\rho)x^\nu + (\lambda b_{\mu\nu}a^\nu + \vec{a}^{\,2}c_\mu)\vec{x}^{\,2} + c_\mu}{2g_{\rho\nu}a^\rho x^\nu + \vec{a}^{\,2}\vec{x}^{\,2} + 1}. \tag{1.2}$$

Если $b \neq 0$, то формулу (1.1) можно записать таким образом:

$$x'_{\mu-2} = \frac{2b^{-1}c_{\mu\nu}x^{\nu-2} + b^{-1}(c_{\mu,n+3} + c_{\mu 1})\vec{x}^{\,2} + b^{-1}(c_{\mu,n+3} - c_{\mu 1})}{2b^{-1}(c_{n+3,\nu} - c_{1\nu})x^{\nu-2} + b^{-1}a\vec{x}^{\,2} + 1}. \tag{1.3}$$

Нетрудно установить, что преобразование (1.3) является преобразованием (1.2).

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\operatorname{diag}[J, E_{n+1}]$, $\operatorname{diag}[1, 1, \ldots, J, \ldots, 1]$ содержатся в $O(2, n+1)$. Отображение φ сопоставляет каждой из этих матриц отображение вида (1.3), т.е. конформное преобразование пространства $R_{1,n}$. Умножение матрицы $C \in O(2, n+1)$ на одну из указанных матриц слева или справа равносильно перестановке в матрице C соответственно столбцов или строк.

Если в формуле (1.1) $b = 0$, то, переставляя в матрице C строки и столбцы, мы получим матрицу $\bar{C}$, для которой $\bar{b} \neq 0$. Но в таком случае $\varphi_{\bar{C}}$ — конформное преобразование, а значит, φ_C — также конформное преобразование.

На основании всего изложенного можно сделать вывод, что φ — гомоморфизм $O(2, n+1)$ на $C(1, n)$. Нетрудно установить, что ядро φ состоит из $\pm E_{n+3}$. Теорема доказана.

Группу $C(1, n)$ будем рассматривать как группу Ли, для которой гладкое многообразие индуцируется гладким многообразием группы $O(2, n+1)$.

Гомоморфизм $\varphi : O(2, n+1) \to C(1, n)$ индуцирует гомоморфизм f алгебры $AO(2, n+1)$ на алгебру $AC(1, n)$. Но алгебра $AO(2, n+1)$ при $n > 1$ является простой. Поэтому $\mathrm{Ker}\ f = 0$, а значит, f — изоморфизм $AO(2, n+1)$ на $AC(1, n)$. Исходя из этого факта, получаем коммутационные соотношения для алгебры $AC(1, n)$.

Пусть Ω_{ab} $(a, b = 1, \ldots, n+3)$ — генераторы стандартного базиса алгебры $AO(2, n+1)$. Тогда базис алгебры $AC(1, n)$ образуют $J_{\alpha\beta}$, P_α, K_α, D $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n;\ \alpha \neq \beta)$, где

$$
\begin{aligned}
&J_{\alpha\beta} = f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}) \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n),\\
&P_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,n+3}) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n),\\
&K_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,n+3}) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n), \qquad D = -f(\Omega_{1,n+3}).
\end{aligned}
$$

Выписанные генераторы удовдетворяют следующим коммутационним соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta} J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} J_{\alpha\gamma}, \quad [P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} P_\gamma - g_{\alpha\gamma} P_\beta,\\
&[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [K_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta} K_\gamma - g_{\alpha\gamma} K_\beta, \quad [K_\alpha, K_\beta] = 0,\\
&[D, P_\alpha] = P_\alpha, \quad [D, K_\alpha] = -K_\alpha, \quad [D, J_{\alpha\beta}] = 0, \quad [K_\alpha, P_\beta] = 2(g_{\alpha\beta} D - J_{\alpha\beta})\\
&(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Как следует из доказательства теоремы 1.1, $J_{\alpha\beta}$, P_α, D являюся генераторами псевдовращений, трансляций (сдвигов), дилатации соответственно. Далее матрице $-E_{1,n+2}$ гомоморфизм φ сопоставляет инверсию $\hat{S}$. Так как

$$
E_{1,n+2}(\Omega_{1,a+2} - \Omega_{a+2,n+3}) E_{1,n+2} = -(\Omega_{1,a+2} + \Omega_{a+2,n+3}),
$$

то $\hat{S} P_a \hat{S} = -K_a$. Значит, K_a является генератором однопараметрической группы $\hat{S} \exp(\theta P_a) \hat{S}$.

Теперь найдем векторные поля, отвечаючие конформным преобразованиям пространства $R_{1,n}$. Известно, что

$$
\begin{aligned}
&P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{0a} = x_0 \partial_a + x_a \partial_0, \quad J_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad D = -x^\alpha \partial_\alpha\\
&\left(\alpha = 0, 1, \ldots, n,\ a, b = 1, \ldots, n,\ \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
(\hat S\partial_\alpha \hat S)f(x_0,x_1,\ldots,x_n) &= \hat S\partial_\alpha f\left(\frac{x_0}{\vec x^{\,2}},\frac{x_1}{\vec x^{\,2}},\ldots,\frac{x_n}{\vec x^{\,2}}\right) = \\
&= \hat S\left\{\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(-\frac{x_0}{(\vec x^{\,2})^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(-\frac{x_1}{(\vec x^{\,2})^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \cdots + \right.\\
&\quad\left. + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(-\frac{x_n}{(\vec x^{\,2})^2}\right)(2g_\alpha^\beta x_\beta) + \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{1}{\vec x^{\,2}}\right\} = \\
&= \hat S\left\{\left(-\frac{2g_\alpha^\beta x_\beta}{\vec x^{\,2}}\right)\left[\frac{x_0}{\vec x^{\,2}}\frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{x_1}{\vec x^{\,2}}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{x_n}{\vec x^{\,2}}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right] + \right.\\
&\quad\left. + \left[\left(\frac{x_0}{\vec x^{\,2}}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{\vec x^{\,2}}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{x_n}{\vec x^{\,2}}\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right\} = \\
&= -(2g_\alpha^\beta x_\beta)x_\gamma\frac{\partial f}{\partial x_\gamma} + g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Мы получили, что

$$
K_\alpha = 2g_\alpha^\beta x_\beta x_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\gamma} - g^{\beta\gamma}x_\beta x_\gamma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.
$$

Теорема 1.2. *Если отождествить алгебры $AC(1,n)$ и $AO(2,n+1)$, то группа $C(1,n)$-автоморфизмов алгебры $AC(1,n)$ совпадает с ее группой $O(2,n+1)$-автоморфизмов.*

Доказательство. Пусть $X,Y,Z\in AO(2,n+1)$, $g\in O(2,n+1)$, $f: AO(2,n+1)\to AC(1,n)$ — изоморфизм, индуцированный гомоморфизмом $\varphi: O(2,n+1)\to C(1,n)$. Если

$$
g\exp(tX)g^{-1} = \exp(tY),
$$

то

$$
\varphi(g)\varphi(\exp(tX))\varphi(g)^{-1} = \varphi(\exp(tY)).
$$

Отсюда заключаем, что $gXg^{-1}=Y$, $\varphi(g)f(X)\varphi(g)^{-1}=f(Y)$. Значит, каждый $O(2,n+1)$-автоморфизм алгебры $AC(1,n)$ является $C(1,n)$-автоморфизмом.

Наоборот, пусть мы имеем $C(1,n)$-автоморфизм алгебры $AC(1,n)$: $\varphi(g)f(X)$ $\varphi(g)^{-1}=f(Y)$. Если $g\exp(tX)g^{-1}=\exp(tZ)$, то $\varphi(g)f(X)\varphi(g)^{-1}=f(Z)$. Отсюда следует, что $f(Y)=f(Z)$, а потому $Y=Z$. Значит, данный $C(1,n)$-атоморфизм индуцируется $O(2,n+1)$-автоморфизмом $gXg^{-1}=Y$. Теорема доказана.

§ 2. Максимальные подалгебры конформной алгебры

В дальнейшем будем отождествлять прообраз с образом при изоморфизме f алгебры $AO(2,n+1)$ на алгебру $AC(1,n)$. В связи с этим мы получаем два набора обозначенкй для одного и того же базиса. Пусть I_{ab} — матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении a-й строки и b-го столбца и нули иа всех остальних местах. Тогда базис алгебры $AO(2,n+1)$ составляют матрицы:

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{12} = I_{12} - I_{21},\quad \Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ba}\quad (a<b,\ a,b=3,\ldots,n+3),\\
&\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}\quad (i=1,2,\ a=3,\ldots,n+3).
\end{aligned}
$$

Базисные элементы удовлетворяет таким коммутационним соотношениям:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \rho_{ad}\Omega_{bc} + \rho_{bc}\Omega_{ad} - \rho_{ac}\Omega_{bd} - \rho_{bd}\Omega_{ac},$$

где $\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = \cdots = -\rho_{n+3,n+3} = 1$, $\rho_{ab} = 0$ при $a \neq b$ $(a, b = 1, 2, \ldots, n+3)$.

Эти же базисные элементы мы обозначаем и таким образом:

$$\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n,\ \alpha < \beta), \quad \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(K_\alpha + P_\alpha),$$
$$\Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, n), \quad -\Omega_{1,n+3} = D.$$

Пусть $R_{2,n+1} = \langle Q_1, \ldots, Q_{n+3}\rangle$ — $(2+n+1)$-мерное псевдоэвклидово пространство с метрикой

$$\rho(X, X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_{n+3}^2, \quad X = x_i Q^i.$$

Если W — невырожденное подпространство пространства $R_{2,n+1}$, то через $O(W)$ обозначим группу изометрий пространства W, а через $AO(W)$ — ее алгебру Ли.

Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется неприводимой, если в W не существует F-инвариантное подпространство, отличное от O и W. В противном случае F называется приводимой. Если для каждого F-инвариантного подпространства W' в W существует такое F-инвариантное подпространство W'' в W, что $W = W' \oplus W''$, то алгебра F называется вполне приводимой.

Чэнь Су-шин и Гринберг [10] установили, что алгебра $AO(1, m)$ $(m \geq 2)$ не имеет неприводимых подалгебр, отличных от $AO(1, m)$. Тауфик [11] показал, что всякая полупростая неприводимая подалгебра алгебры $AO(2, m)$ $(m \geq 3)$ переходится автоморфизмом этой алгебры в одну из следующих алгебр:

1) $AO(2, m)$; 2) $ASU(1, m|2)$ (m — четное);
3) $\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45}\rangle$ $(m = 3)$.

Если m — нечетное число, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(2, m)$ является полупростой, а потому совпадает с $AO(2, m)$. Если $m = 2k$ и F — неполупростая неприводимая подалгебра алгебры $AO(2, m)$, то F разлагается в прямую сумму фактора Леви и одномерного центра $\langle Z\rangle$. С точностью до $O(2, m)$-сопряженности $Z = \Omega_{12} - \Omega_{34} - \cdots - \Omega_{2k+1,2k+2}$. Централизатор L элемента Z в $AO(2, m)$ состоит иа матриц

$$\begin{pmatrix} \mu_{11}J & \lambda_{12}E + \mu_{12}J & \cdots & \lambda_{1,k+1}E + \mu_{1,k+1}J \\ \lambda_{12}E - \mu_{12}J & \mu_{22}J & \cdots & \lambda_{2,k+1}E + \mu_{2,k+1}J \\ . & . & \cdots & . \\ \lambda_{1,k+1}E - \mu_{1,k+1}J & -\lambda_{2,k+1}E + \mu_{2,k+1}J & \cdots & \mu_{k,k+1}J \end{pmatrix},$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $L = ASU(1, k) \oplus \langle Z\rangle$. Отсюда на основания результата Тауфика заключаем, что с точностью до $O(2, 2k)$-сопряженности алгебра $ASU(1, k) \oplus \langle Z\rangle$ является единственной максимальной неприводимой подалгеброй алгебры $AO(2, 2k)$.

Пусть F — подалгебра алгебры $AO(2,n+1)$ и пусть F не имеет в $R_{2,n+1}$ инвариантных изотропных подпространств. Тогда F — вполне приводимая алгебра. Существует такое ортогональное разложение $R_{2,n+1} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, что F допускает разложение в подпрямую сумму $F = F_1 \dot{+} \cdots \dot{+} F_s$, где F_i — неприводимая подагебра алгебры $AO(W_i)$ $(i = 1,\ldots,s)$.

Пустъ $\rho_i(X,X)$ — ограничение метрики $\rho(X,X)$ на W_i $(i = 1,\ldots,s)$. Если $(2,m)$ — сигнатура $\rho_1(X,X)$, то на основании теоремы Витта о продолжении изометрий можно предполагать, что $W_1 = R_{2,m} = \langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m+2}\rangle$, $W_2 = \langle Q_{m+3}, \ldots, Q_{k_2}\rangle$, …, $W_s = \langle Q_{k_{s-1}+1}, \ldots, Q_{n+3}\rangle$. В этом случае F_1 — неприводимая подалгебра алгебры $AO(2,m)$, а $F_2,\ldots,F_s$ — неприводимые подалгебры ортогональных алгебр $AO(k_2-m-2),\ldots,AO(n+3-k_{s-1})$ соответственно. Фактор Леви алгебры F_1 является прямым слагаемым алгебры F.

Если $\rho_i(X,X)$ имеет сигнатуру $(1,m_i)$ $(i = 1,2)$, то по теореме Витта будем предполагать, что $W_1 = \langle Q_1, Q_3, \ldots, Q_{m_1+2}\rangle$, $W_2 = \langle Q_2, Q_{m_1+3}, \ldots, Q_{m_1+m_2+2}\rangle$, $W_3 = \langle Q_{m_1+m_2+3}, \ldots, Q_{k_3}\rangle$, …, $W_s = \langle Q_{k_{s-1}+1}, \ldots, Q_{n+3}\rangle$. В этом случае $F_1 = AO(1,m_1)$, $F_2 = AO(1,m_2)$, $F_1 \dot{+} F_2$ — прямое слагаемое алгебры F, причем, если $F_1 \dot{+} F_2 \neq F_1 \oplus F_2$, то $m_1 = m_2$ и $F_1 \dot{+} F_2$ — диагональ в $F_1 \oplus F_2$.

Определение. *Пусть W — подпространство пространства $R_{2,n+1}$. Нормализатором W в $AO(2,n+1)$ называется множество* $\mathrm{Nor}\, W = \{X \in AO(2,n+1) | (\forall\, Y \in W)\ (XY \in W)\}$.

Легко видеть, что $\mathrm{Nor}\, W$ является подалгеброй Ли алгебры $AO(2,n+1)$. Непосредственными вычислениями устанавливаем справедливость следующего предложения.

Предложение 2.1. *Нормализатор одномерного изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_{n+3}\rangle$ совпадает с алгеброй*

$$A\tilde{P}(1,n) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n\rangle \Subset (AO(1,n) \oplus \langle D\rangle),$$

а нормализатор двумерного изотропного пространства $\langle Q_1 + Q_{n+3}, Q_2 + Q_{n+2}\rangle$ совпадает с алгеброй

$$AOpt(1,n) = \langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \Subset (AO(n-1) \oplus \langle C, S, T, Z\rangle),$$

где $AO(1,n) = \langle J_{\alpha\beta} | \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1\rangle$, $AO(n-1) = \langle J_{ab} | a, b = 1, \ldots, n-1\rangle$, $M = P_0 + P_n$, $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$, $C = J_{0n} - D$, $Z = J_{0n} - D$, $S = \frac{1}{2}(K_0 + K_n)$, $T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n)$.

Алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ называется расширенной алгеброй Пуанкаре, а алгебра $AOpt(1,n)$ — оптической алгеброй пространства $R_{1,n}$. Последнее название связано с тем, что $AOpt(1,n)$ является нормализатором в $AC(1,n)$ изотропного подпространства $\langle P_0 + P_n\rangle$ пространства $R_{1,n}$, порожденного изотропным или световым вектором $P_0 + P_n$.

Предложение 2.2. *Если n — четное число и $n > 2$, то алгебра $AO(2,n+1)$ не имеет собственных неприводимых подалгебр. Алгебра $AO(2,3)$ обладает одной собственной неприводимой подалгеброй*

$$\langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45}\rangle.$$

Если n — нечетное число и $n > 1$, то алгебра $AO(2, n+1)$ имеет одну максимальную (собственную) неприводимую подалгебру, совпадающую с $ASU(1,(n+1)/2) \oplus \langle Z\rangle$. Максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2, n+1)$ исчерпываются относительно $O(2, n+1)$-сопряженности такими алгебрами:

1) $A\tilde{P}(1, n)$; 2) $AOpt(1, n)$;

3) $AO_1(1, k) \oplus AO_2(1, n-k)$, где $AO_1(1, k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 1, 3, \ldots, k+2\rangle$, $AO_2(1, n+1-k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = 2, k+3, \ldots, n+3\rangle$ $(k = 2, \ldots, [n+1/2];\ n \geq 3)$;

4) $AO(2, k) \oplus AO(n-k)$, где $AO(n-k) = \langle \Omega_{ab} | a, b = k+3, \ldots, n+3\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Пусть F — подалгебра алгебры $AO(2, n+1)$, W — вырожденное подпространство пространства $R_{2,n+1}$, инвариантное относительно F. Пространство W содержит F-инвариантное изотропное подпространство, сопряженное $\langle Q_1 + Q_{n+3}\rangle$ или $\langle Q_1 + Q_{n+3}, Q_2 + Q_{n+2}\rangle$. На основании предложения 2.1 алгебра F $O(2, n)$-сопряжена подалгебре одной из алгебр: $A\tilde{P}(1, n)$, $AOpt(1, n)$.

Остальные случаи рассмотрены при исследовании вполне приводимых подалгебр алгебры $AO(2, n+1)$. Предложение доказано.

3. О подалгебрах расширенной алгебры Пуанкаре

В работах [6, 8] получен ряx общих результатов о подалгебрах алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, рассматриваемых с точностью до $\tilde{P}(1, n)$-сопряженности, а также проведена классификация всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1, 4)$ относительно $\tilde{P}(1, 4)$-сопряженности. В этом параграфе мы переформулируем те предложения о подалгебрах алгебры $A\tilde{P}(1, n)$, где замена $\tilde{P}(1, n)$-сопряженности на $C(1, n)$-сопряженность дает некоторое упрощение перечня рассматриваемых подалгебр.

Пусть $h = \exp \frac{\pi}{4}(K_0 + P_0 + K_n - P_n)$. Тогда $hG_a h^{-1} = P_a$, $hP_a h^{-1} = -G_a$, $hJ_{0n} h^{-1} = -D$, $hDh^{-1} = -J_{0n}$, $hMh^{-1} = M$.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $\langle X_1, \ldots, X_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с генераторами $X_1, \ldots, X_s$;

$$
\begin{aligned}
& V[k, l] = \langle G_k, \ldots, G_l\rangle \quad (k \leq l), \quad W[k, l] = \langle P_k, \ldots, P_l\rangle \quad (k \leq l); \\
& \mathfrak{M}[r, t] = \langle M, P_r, \ldots, P_t, G_r, \ldots, G_t\rangle \quad (r \leq t); \\
& AH(0) = O, \quad AH(2d) = AH(2d+1) = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2d-1,2d}\rangle \quad (d \geq 1); \\
& K \dot{+} L \ \text{ — подпрямая сумма алгебр } K \text{ и } L; \\
& \Delta[r, t] = \langle G_r + \alpha_r P_r, \ldots, G_t + \alpha_t P_t, M\rangle,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $r \leq t$, $0 < \alpha_r \leq \cdots \leq \alpha_t = 1$.

Теорема 3.1. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1, n)$ исчерпываются относительно $C(1, n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$
\begin{aligned}
& W[0, n];\ \Delta[1, s] \oplus W[s+1, n-1] \ (s = 1, \ldots, n-2); \\
& \Delta[1, s] \oplus V[s+1, t] \oplus W[t+1, n-1] \ (s = 1, \ldots, n-3;\ 2t \leq n-1+s); \\
& \langle G_1 + 2T, M\rangle \oplus W[2, n-1];\ \langle M + 2T\rangle \oplus AH(n) \ (n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)); \\
& AH(n-2) \oplus \langle G_{n-1} + 2T, M\rangle \ (n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)); \\
& AH(2d) \oplus \langle T\rangle \oplus W[2d+1, n] \ (d = 1, \ldots, [n-1/2]); \\
& AH(2d) \oplus \Delta[2d+1, s] \oplus W[s+1, n-1] \ (d = 1, \ldots, [n-3/2]);
\end{aligned}
$$

$AH(2d) \oplus \Delta[2d+1, s] \oplus V[s+1, t] \oplus W[t+1, n-1]$ $(2t \leq n-1+s;$
$d = 1, \dots, [n-4/2]);$
$AH(2d) \oplus V[2d+1, s] \oplus W[s+1, n-1]$ $(2s \leq n-1+2d;$
$d = 1, \dots, [n-3/2]);$
$AH(2d) \oplus \langle G_{2d+1} + 2T, M \rangle \oplus W[2d+2, n-1]$ $(d = 1, \dots, [n-3/2]);$
$AH(n-1) \oplus \langle J_{0n}, D \rangle$; $AH(n-1) \oplus \langle M, J_{0n} + D \rangle$;
$AH(2d) \oplus \langle J_{0n} \rangle \oplus W[2d+1, n-1]$ $(d = 0, 1, \dots, [n-2/2])$.

Теорема 3.1 вытекает из следствия 1 из теоремы 4.2 и следствия 1 из теоремы 5.1 [8].

Теорема 3.2. *Пусть* $n \geq 3$, $t = 1, \dots, [n-1/2]$; $s = 1, \dots, [n-2/2]$; $\alpha_1 = 1$, $0 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_t \leq 1$; $X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \dots + \alpha_t J_{2t-1,2t}$. *Одномерные подалгебры алгебры* $A\tilde{P}(1,n)$ *исчерпываются относительно* $C(1,n)$*-сопряженности следующими алгебрами:*

$\langle P_0 \rangle$; $\langle M \rangle$; $\langle P_1 \rangle$; $\langle G_1 + P_2 \rangle$; $\langle G_1 + 2T \rangle$; $\langle X_t \rangle$; $\langle X_t + P_0 \rangle$; $\langle X_t + M \rangle$;
$\langle X_t + P_{2t+1} \rangle$; $\langle X_s + G_{2s+1} + 2T \rangle$; $\langle X_r + G_{2r+1} + P_{2r+2} \rangle$ $(r = 1, \dots, [n-3/2])$;
$\langle J_{0n} \rangle$; $\langle D + \alpha J_{0n} \rangle$ $(0 < \alpha \leq 1)$; $\langle J_{0n} + P_1 \rangle$; $\langle D + J_{0n} + M \rangle$;
$\langle X_t + \alpha D + \beta J_{0n} \rangle$ $(\alpha > 0, \alpha \geq \beta \geq 0)$; $\langle X_t + \alpha(D + J_{0n} + M) \rangle$;
$\langle X_s + P_{2s+1} + \alpha J_{0n} \rangle$ $(\alpha > 0)$; $\langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1,n} + \gamma D \rangle$;
$\langle J_{12} + \beta_1 J_{34} + \dots + \beta_{n/2-1} J_{n-1,n} + 2T \rangle$,

где $n \equiv 0 \pmod 2$, $\gamma \geq 0$, $0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{n/2-1} \leq 1$.

Теорема 3.2 доказывается на основании следствия 2 из теоремы 4.2 и следствия 2 из теоремы 5.1 [8].

Пусть $\tilde{F}_0$ — такая подалгера алгебры $U \Supset F$, что ее проекция на F совпадает с F_0. Запись $\tilde{F}_0 + U_j$ означает, что $U_j \subset U$, $[F_0, U_j] \subset U_j$ и $\tilde{F}_0 \cap U \subset U_j$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\tilde{F}_0 + U_1, \dots, \tilde{F}_0 + U_s$, то употребляем обозначение $\tilde{F}_0 : U_1, \dots, U_s$. Пусть $(i_1, \dots, i_q) = \langle P_{i_1}, \dots, P_{i_q} \rangle$; $(awb) = \langle P_a + wP_b \rangle$ $(w > 0)$; $(04) = \langle M \rangle$.

Теорема 3.3 *Расщепляемые подалгебры алгебры* $AP(1,4)$ *исчерпываются относительно* $C(1,4)$*-сопряженности такими алгебрами:*

O, (0), (4), (04), (0,4), (04,1), (1,4), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12} \rangle$: O, (0), (4), (1,2), (3,4), (0,4), (04,3), (0,1,2), (04,1,2), (1,2,4), (0,3,4), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12} + J_{34} \rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12} + cJ_{34} \rangle$: O, (0), (1,2), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4) $(0 < c < 1)$;

$\langle J_{04} \rangle$: O, (04), (1), (0,4), (04,1), (1,2), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12} + cJ_{04} \rangle$: O, (3), (04), (1,2), (0,4), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (1,2,3), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c > 0)$;

$\langle G_3 \rangle$: (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3 - J_{12} \rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}, J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{04}, J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{12}\rangle$: (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2\rangle$: (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{04},\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$: O, (0), (4), (04), (0,4), (1,2,3), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$: O, (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$: (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle G_1, G_2, G_3\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$: O, (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$: O, (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(4)$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$AO(1,3)$: O, (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(1,4)$: O, (0,1,2,3,4);

Теорема 3.3 доказывается на основания теоремы 4.1 [6].

Теорема 3.4. *Нерасщепляемыв подалгебры алгебры $AP(1,4)$, не сопряженные расщепляемым подалгебрам этой алгебры, исчерпываются относительно $C(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12}+P_0\rangle$: O, (04), (4), (04,3), (1,2), (3,4), (04,1,2), (1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4);

$\langle J_{12}+P_3\rangle$: O, (04), (0), (4), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4);

$\langle J_{12}+P_0+P_3\rangle$: O, (4), (1,2), (1,2,4);

$\langle J_{12}+J_{34}+P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}+M\rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(0<c<1)$;

$\langle J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (0,4);

$\langle J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (0,1,4);

$\langle J_{04}+P_3\rangle$: (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4);

$\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4) $(c>0)$;

$\langle G_3+P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);

$\langle G_3+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);

$\langle G_3+2T\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle G_3-J_{12}+2T\rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{12}+P_0, J_{34}+\delta P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4) $(\delta\geq 0)$;

$\langle J_{12}, J_{34}+M, P_1, P_2\rangle$;

$\langle J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$: O, (04), (0,4), (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4) $(\delta\geq 0)$;

$\langle J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4);

$\langle J_{12}+M, G_3+\delta T\rangle$ $(\delta=0,2)$; $\langle J_{12}, G_3+2T\rangle$; $\langle J_{12}+\delta P_3, G_3+2T, M\rangle$ $(\delta\geq 0)$;

$\langle J_{12}+M, G_3+\delta T, P_1, P_2\rangle$ $(\delta=0,2)$; $\langle J_{12}, G_3+2T, P_1, P_2\rangle$;

$\langle J_{12}+\delta T, G_3+2T, M, P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12}+2T, G_3, M, P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\delta P_3, G_3+2T, M, P_1, P_2\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12}+\delta T, G_3+2T, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$;

$\langle J_{12}+2T, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$;

$\langle G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$;

$\langle G_1+P_2+\gamma P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\mu>0,\ \gamma>0\ \vee\ \gamma=0,\ \delta\geq 0)$;

$\langle G_1+P_2+\gamma P_3, G_2-P_1, M\rangle$ $(\gamma\geq 0)$; $\langle G_1+\alpha P_3, G_2+P_2+\beta P_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle G_1+P_2, G_2-P_1+\mu P_2, M, P_3\rangle$ $(\mu\geq 0)$; $\langle G_1, G_2+P_2, M, P_3\rangle$;

$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\ \vee\ \alpha=0,\ \beta\geq 0)$;

$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1\rangle$;

$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+2T, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\ \vee\ \alpha=0,\ \beta\geq 0)$;

$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, M, P_1, P_2\rangle$;

$\langle G_1+2T, G_2+\beta P_3, M, P_1, P_2\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle G_1+P_2, G_2, M, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_1+P_2, G_2+\alpha T, M, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$; $\langle G_1, G_2+2T, M, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_1, G_2+P_3, M, P_1+wP_3, P_2\rangle$ $(w>0)$;

$\langle G_1+2T, G_2+\alpha P_3, M, P_1+wP_3, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ w>0)$;

$\langle G_1+P_3, G_2, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$; $\langle G_1+2T, G_2, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle G_3, J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2);

$\langle G_3, J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);

$\langle G_3, J_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1), (04,1,2);

$\langle G_3, J_{04}+P_1+\alpha P_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(\alpha>0,\ w>0)$;

$\langle G_3, J_{04}+P_1+\alpha P_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$; $\langle G_3, J_{04}+P_2+\alpha P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(c>0)$;

$\langle G_3, J_{04}+P_3, J_{12}+\delta P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(\delta\geq 0)$;

$\langle G_3, J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2);

$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}+\alpha P_3, M\rangle$ $(\alpha=0,1)$;

$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}, M, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+2T, M, P_1, P_2\rangle$;

$\langle G_1, G_2, J_{12}+P_3, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{12}+2T, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_1\rangle$: (04), (04,3), (04,1$w$3), (04,1$w$3,2);

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_2\rangle$: (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3);

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (0,1,2,4);

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_1+\alpha P_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(\alpha>0,\ w>0)$;

$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_1+\alpha P_3, M\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{04}+P_2+\alpha P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4) $(c>0)$;

$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1, G_3+\beta P_1+\delta P_3, M\rangle$ $(\beta>0\ \vee\ \beta=0,\ \delta\neq 0)$;

$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\gamma P_3, G_3+\beta P_1+\gamma P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\delta-\beta^2\mu\neq 0,$ $\mu>0,\ \beta>0\ \vee\ \beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2, G_2+P_3, G_3-P_2, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2+P_3, G_3-P_2+\mu P_3, M, P_1\rangle$ $(\mu>0,\ \beta>0\ \vee\ \beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2, G_3+P_3, M, P_1\rangle$ $(\beta>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle G_1+\alpha P_3, G_2, G_3+2T, M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1+2T, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}-G_3, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}-G_3+2T, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}+P_0\rangle$: O, (1,2,3,4);
$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3, J_{12}+\alpha P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4) $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3+\alpha P_3, J_{12}+\delta P_3, M\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \delta=0,1)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, J_{12}, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3+2T, J_{12}+\alpha P_3, M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha=0,1)$;
$\langle G_1, G_2, G_3+2T, J_{12}+\alpha T, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha=0,1)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+2T, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+P_1, M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+P_2, M, P_1\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(c>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+P_3, J_{12}+\alpha P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, J_{12}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2).

Доказательство теоремы 3.4 проводим на основании теоремы 4.3 [6].

Теорема 3.5. *Расщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AP(1,4)$, исчерпываются относительно $C(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0), (0,4), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (0,1,2,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4) $(0<c<1)$;

$\langle J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (04), (1), (0,4), (04,1), (1,2), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (3), (04), (1,2), (0,4), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (1,2,3), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle G_3\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3-J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}, J_{34}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}, J_{34}+\alpha D\rangle$: (1,2), (0,1,2) $(\alpha>0)$;

$\langle J_{04}, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \oplus \langle D\rangle$: (0), (4), (0,4), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle \oplus \langle D\rangle$: O, (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle \oplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle G_1, G_2, G_3+D, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$; $\langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle \ni (\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle)$;

$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{12}-J_{34}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$(\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}\rangle \dotplus \langle D\rangle) \in \langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$;

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4) $(c>0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: O, (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(4) \oplus \langle D\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$AO(1,3) \oplus \langle D\rangle$: O, (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle \dotplus \langle D\rangle$: (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(1,4) \oplus \langle D\rangle$: O, (0,1,2,3,4).

Доказательство теоремы 3.5 проводится на основании теоремы 4.1 [6]. Отметим, что перечень подалгебр алгебры $AO(1,4)\oplus\langle D\rangle$ приведен в лемме 6.1 [8]. Дальнейшее упрощение этого перечня проводим при помощи автоморфизма $\exp\frac{\pi}{4}(K_0+P_0+K_n-P_n)$.

Теорема 3.6. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AP(1,4)$, исчерпываются относительно $C(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{04}-D+2T\rangle$: O, (1), (04), (1,2), (04,1), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T)\rangle$: O, (04), (3), (04,3), (1,2), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3) $(c>0)$;

$\langle J_{04}+D+M, J_{12}+\alpha M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3) $(\alpha\geq 0)$;

$\langle J_{04}+D, J_{12}+M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04}-D+2T, J_{12}+\alpha T\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) $(\alpha\geq 0)$;

$\langle J_{04}-D, J_{12}+2T\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$: (04), (04,1), (04,1$w$3), (04,3), (04,1$w$3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$: O, (1), (1,2);

$\langle J_{04}-D, G_3+P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);
$\langle J_{04}-D, G_3+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);
$\langle J_{04}-D+2T, G_3+\alpha P_1, M, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{04}-D+2T, G_3+\alpha P_2, M, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{04}-D+2T, G_3\rangle$: (04,3), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle J_{04}+D+M, G_3\rangle$: (1), (1,2);
$\langle J_{12}+c(J_{04}-2D), G_3+2T\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) $(c>0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-2D), G_3+2T\rangle$: O, (1,2) $(c>0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-2D+2T), G_3\rangle$: (04,3), (04,1,2,3) $(c>0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}+D+M), G_3, P_1, P_2\rangle$ $(c>0)$;
$\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);
$\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_3+2T\rangle$: O, (1,2);
$\langle J_{12}+\alpha T, J_{04}-D+2T, G_3\rangle$: (04,3), (04,1,2,3) $(\alpha\geq 0)$;
$\langle J_{12}+2T, J_{04}-D, G_3\rangle$: (04,3), (04,1,2,3);
$\langle J_{12}+\alpha M, J_{04}+D+M, G_3, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0)$;
$\langle J_{12}+M, J_{04}+D, G_3, P_1, P_2\rangle$;
$\langle J_{04}-2D, G_1, G_2+2T\rangle$: (04,1), (04,1,2), (04,1,2w3), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; $\langle J_{04}-D, G_1, G_2+P_2, P_3\rangle$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\lambda P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\mu>0,\ \lambda>0\ \vee\ \lambda=0,\ \delta\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\lambda P_3, G_2-P_1, M\rangle$ $(\lambda\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\alpha P_3, G_2+P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2, G_2-P_1+\mu P_2, P_3, M\rangle$ $(\mu\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1, G_2+P_2, M, P_3\rangle$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\ \vee\ \alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2, M, P_1\rangle$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\beta P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle J_{04}-D, G_1+P_2, G_2, M, P_1, P_3\rangle$;
$\langle J_{04}-D, G_1, G_2+P_3, M, P_1+wP_3, P_2\rangle$ $(w>0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$;
$\langle J_{04}-D+2T, G_1+\beta P_3, G_2, M, P_1, P_2\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D+2T, G_1, G_2, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-D), G_1+P_2, G_2-P_1\rangle$: (04), (04,3) $(c>0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T), G_1, G_2, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(c>0,\ s=0,1)$;
$\langle J_{12}+2T, J_{04}-D, G_1, G_2, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle J_{12}+\delta T, J_{04}-D+2T, G_1, G_2, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(\delta\geq 0,\ s=0,1)$;
$\langle J_{12}, J_{04}-D, G_1+P_2, G_2-P_1, M, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle J_{04}-2D, G_1, G_2, G_3+2T, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\gamma P_3, G_3+\beta P_1+\gamma P_2+\delta P_3, M\rangle$ $(\mu>0,$ $\beta>0\ \vee\ \beta=0,\ \gamma\geq 0,\ \delta-\beta^2\mu\neq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1, G_3+\beta P_1+\delta P_3, M\rangle$ $(\beta\geq 0,\ \delta\neq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\beta P_2, G_2+P_3, G_3-P_2, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2+P_3, G_3-P_2+\mu P_3, M, P_1\rangle$ $(\mu>0,\ \beta>0\ \vee\ \beta=0,$ $\gamma\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2, G_3+P_3, M, P_1\rangle$ $(\beta>0\ \vee\ \beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle J_{04}-D, G_1+P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2\rangle$; $\langle J_{04}-D+2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+c(J_{04}-2D), G_1, G_2, G_3+2T, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(c>0,\ s=0,1)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-D), G_1+P_2, G_2-P_1, G_3+\beta P_3, M\rangle$ $(c>0,\ \beta\neq 0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-D), G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, M, P_3\rangle$ $(c>0)$;
$\langle J_{12}+c(J_{04}-D+2T), G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(c>0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}J_{23}, J_{04}-D+2T\rangle$: O, (04), (1,2,3), (04,1,2,3);
$\langle J_{12}, J_{04}-2D, G_1, G_2, G_3+2T, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle J_{12}+2T, J_{04}-D, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta T, J_{04}-D+2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{04}-D, G_1+P_2, G_2-P_1, G_3+\beta P_3, M\rangle$ $(\beta\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{04}-D, G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, M, P_3\rangle$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-D+2T, G_1, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Доказательство теоремы 3.6 проводится на основании теоремы 6.2 [8].

§ 4. О подалгебрах оптической алгебры

В этом параграфе мы выделим те подалгебры алгебры $AOpt(1,n)$, которые не сопряжены подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Используя общие свойства таких подалгебр, опишем максимальные абелевы и одномерные подалгебры алгебры $AOpt(1,n)$. Затем проведем классификацию относительно $C(1,4)$-сопряженности всех подалгебр алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженных подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

Генераторы алгебры $AOpt(1,n)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{gathered}
[G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab}M,\\
[G_a, M] = [P_a, M] = [J_{ab}, M] = 0, \quad [C, S] = 2S, \quad [C, T] = -2T, \quad [T, S] = C,\\
[Z, C] = 0, \quad [Z, S] = 0, \quad [Z, T] = 0, \quad [Z, M] = -2M, \quad [Z, G_a] = -G_a,\\
[Z, P_a] = -P_a, \quad [C, G_a] = G_a, \quad [C, P_a] = -P_a, \quad [C, M] = 0, \quad [S, G_a] = 0,\\
[S, P_a] = -G_a, \quad [S, M] = 0, \quad [T, G_a] = P_a, \quad [T, P_a] = 0, \quad [T, M] = 0\\
(a, b, c = 1, 2, \ldots, n-1).
\end{gathered}
$$

Значит, $\langle C, S, T\rangle = ASL(2R)$, $\langle C, S, T, Z\rangle = AGL(2,R)$, $AOpt(1,n) = A\widetilde{Sch}(n-1) \supplus \langle Z\rangle$.

Предложение 4.1. *Подалгебры алгебры $AGL(2,R)$ исчерпываются относительно $GL(2,R)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$
\begin{gathered}
O;\ \langle C\rangle;\ \langle T\rangle;\ \langle S+T\rangle;\ \langle Z\rangle;\ \langle C+\lambda Z\rangle\ (\lambda>0);\ \langle T+Z\rangle;\\
\langle S+T+\lambda Z\rangle\ (\lambda>0);\ \langle C, T\rangle;\ \langle C, Z\rangle;\ \langle T, Z\rangle;\ \langle S+T, Z\rangle;\\
\langle C+\lambda Z, T\rangle\ (\lambda\neq 0);\ \langle C, S, T\rangle;\ \langle C, T, Z\rangle;\ \langle C, S, T, Z\rangle.
\end{gathered}
$$

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Предложение 4.1 доказывается методом Ли–Гурса.

В дальнейшем, говоря о подалгебрах алгебры $AGL(2,R)$, мы будем иметь в виду подалгебри, выписанные в предложении 4.1.

Через π, τ обозначим проектирования алгебры $AOpt(1,n)$ на $AO(n-1)\oplus AGL(2,R)$, $AGL(2,R)$ соответственно.

Предложение 4.2. *Пусть L — подалгебра алгебры $AOpt(1,n)$. Если $\tau(L)\subset\langle C, T, Z\rangle$, то L сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n)$.*

Доказательство. Так как

$$C = -J_{0n} - D = \Omega_{1,n+3} - \Omega_{2,n+2},$$
$$T = \frac{1}{2}(P_0 - P_n) = \frac{1}{2}(\Omega_{12} - \Omega_{2,n+3} - \Omega_{1,n+2} + \Omega_{n+2,n+3}),$$
$$Z = J_{0n} - D = \Omega_{1,n+3} + \Omega_{2,n+2}, \quad M = P_0 + P_n,$$

то изотропное пространство $\langle Q_1 + Q_{n+3}\rangle$ является инвариантным относительно алгебры

$$F = \langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \Subset (AO(n-1) \oplus \langle C, T, Z\rangle).$$

Отседа вытекает, что алгебра F, а значит, и любая ее подалгебра, сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Предложение доказано.

Предпожение 4.2 позволяет ограничиться рассмотрением тех подалгебр L алгебры $AOpt(1,n)$, для которых $\tau(L)$ совпадает с одной из алгебр:

$$\langle S+T\rangle,\ \langle S+T+\lambda Z\rangle\ (\lambda > 0),\ \langle S+T, Z\rangle,\ \langle C, S, T\rangle,\ AGL(2,R). \tag{4.1}$$

Если $\tau(L) = \langle S+T\rangle$ или $\tau(L) = \langle C, S, T\rangle$, то $L \subset A\widetilde{Sch}(n-1)$. В этом случае применимы результаты [9]. Дальнейшее упрощение получаемых алгебр достигается применением автоморфизма $\exp(\theta Z)$. Теперь допустим, что $\tau(L)$ — одна из остальных алгебр (4.1). Если в $\overline{\mathfrak{M}}[1, n-1]$ существует одномерный $\pi(L)$-подмодуль, то он аннулируется проекцией алгебры $\pi(L)$ на $AO(n-1) \oplus ASL(2,R)$ [9]. Так как $[Z, M] = -2M$, $[Z, G_a] = -G_a$, $[Z, P_a] = -P_a$, то в силу теоремы 2.1 [9] алгебра $\pi(L)$ являетса вполне приводимой алгеброй линейных преобразований пространства $\mathfrak{M}[1, n-1]$ (см. обозначения (3.1)) и аннулирует в этом пространстве только нулевое подпроотранство. Отсюда на основании предложения 2.1 [8] заключаем, что $\pi(L)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $\mathfrak{M}[1, n-1] \Subset \pi(L)$. Следовательно, $L = W \Subset \pi(L)$, где $W \subset \mathfrak{M}[1, n-1]$. Так как неприводимые $\langle S+T+\lambda Z\rangle$-подмодули модуля $\mathfrak{M}[1, n-1]/\langle M\rangle$ двумерны, а $\langle M\rangle$ и $\langle G_a\rangle$ не изоморфны, как $\langle Z\rangle$-модули, то по лемме 3.1 [8] W содержит свою проекцию на $\langle M\rangle$. Мы не теряем общности, если при описании W будем предполагать, что проекция L на $\langle Z\rangle$ является нулевой. Другими словами, при нахождении инвариантных пространств W можно считать, что речь идет о подалгебрах алгебры Шредингера. Это значит, что снова можно воспользоваться результатами работы [9].

Теорема 4.1. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $AOpt(1,n)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, исчерпываются относительно $C(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$AH(n-1) \oplus \langle S+T, M\rangle, \quad AH(n-1) \oplus \langle S+T, Z\rangle,$$
$$AH(2d) \oplus \langle J(d+1,r) + S + T\rangle \oplus \langle M\rangle \oplus \Pi(d+1,r),$$

где

$$J(d+1,r) = J_{2(d+1)-1,2(d+1)} + \cdots + J_{2r-1,2r},$$
$$\Pi(d+1,r) = \langle G_{2(d+1)-1} + P_{2(d+1)}, \ldots, G_{2r-1} + P_{2r}\rangle$$
$$(d = 0, 1, \ldots, [n-3/2];\ r = d+1, \ldots, [n-1/2]).$$

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Теорема 4.1 доказывается на основании следствия из теоремы 4.1 [9] и предложения 4.2.

Теорема 4.2. *Пусть* $n \geq 3$*;* $\alpha, \beta \in R$*,* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$*;*

$$X_t = \alpha_1 J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \cdots + \alpha_t J_{2t-1,2t},$$

где $\alpha_1 = 1$*,* $0 < \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_t$ *при* $t \neq 1$*;* $t = 1, \ldots, [n-1/2]$*. Одномерные подалгебры алгебры* $AOpt(1,n)$*, не сопряженные подалгебрам алгебры* $A\tilde{P}(1,n)$*, исчерпываются относительно* $C(1,n)$*-сопряженности такими алгебрами:*

$$\langle S+T\rangle,\ \langle S+T\pm M\rangle,\ \langle X_t+\alpha(S+T)\rangle,\ \langle S+T+\alpha Z\rangle,$$
$$\langle X_t+\alpha(S+T)\pm M\rangle,\ \langle X_t+S+T+G_1+P_2\rangle,\ \langle X_t+\alpha(S+T)+\beta Z\rangle.$$

Теорема 4.2 доказывается на основании следствия 2 из теоремы 4.1 [9] и предложения 4.2.

Теорема 4.3. *Пусть* F *— подалгебра алгебры* $AOpt(1,4)$*, не сопряженная ни одной из подалгебр алгебры* $A\tilde{P}(1,4)$*. Тогда* F $C(1,4)$*-сопряжена одной из следующих алгебр:*

$\langle S+T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,P_1,M\rangle$, $\langle G_1-\lambda^{-1}P_2, G_2+\lambda P_1, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1-\lambda^{-1}P_2, G_2+\lambda P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$ $(0<\lambda\leq 1)$;

$\langle S+T\pm M\rangle$; $\langle S+T+\alpha J_{12}\pm M\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle S+T+\alpha J_{12}\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle S+T+2J_{12}, G_1+P_2+\alpha P_3, G_2-P_1-\alpha G_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle S+T+2J_{12}+\gamma M, G_1+P_2+\sqrt{2}P_3, G_2-P_1-\sqrt{2}G_3\rangle$ $(\gamma=0,\pm1)$;

$\langle S+T+J_{12}\rangle$: $\langle G_1+P_2\rangle$, $\langle G_1+P_2, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$;

$\langle S+T+J_{12}\pm M, G_1+P_2\rangle$;

$\langle S+T+J_{12}+G_1+P_2\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_2-P_1, M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_2-P_1, G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_2-P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_2-P_1, G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$;

$\langle J_{12}, S+T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha M, S+T+\beta M\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0)$;

$AO(3)\oplus\langle S+T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$AO(3)\oplus\langle S+T\pm M\rangle$;

$\langle S+T\rangle \dotplus \langle Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,P_1,M\rangle$, $\langle G_1-\lambda^{-1}P_2, G_2+\lambda P_1, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1-\lambda^{-1}P_2, G_2+\lambda P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$ $(0<\lambda\leq 1)$;

$\langle S+T+\alpha J_{12}\rangle \dotplus \langle Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle S+T+2J_{12}+\lambda Z, G_1+P_2+\alpha P_3, G_2-P_1-\alpha G_3, M\rangle$ $(\alpha>0,\ \lambda>0)$;

$\langle S+T+2J_{12}, Z, G_1+P_2+\alpha P_3, G_2-P_1-\alpha G_3, M\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle S+T+J_{12}\rangle \dotplus \langle Z\rangle$: $\langle G_1+P_2\rangle$, $\langle G_1+P_2, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_1-P_2, G_2+P_1, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_3, P_3, M\rangle$, $\langle G_1+P_2, G_1-P_2, G_2+P_1, G_3, P_3, M\rangle$;

$\langle S+T+J_{12}+G_1+P_2\rangle \dotplus \langle Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_2-P_1,M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1-P_2,G_2+P_1,M\rangle$, $\langle G_2-P_1,G_1-P_2,G_2+P_1,M\rangle$, $\langle G_2-P_1,G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1-P_2,G_2+P_1,G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_2-P_1,G_1-P_2,G_2+P_1,G_3,P_3,M\rangle$;

$\langle J_{12},S+T\rangle \dotplus \langle Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1+P_2,G_2-P_1,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1+P_2,G_2-P_1,G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$AO(3)\oplus(\langle S+T\rangle \dotplus \langle Z\rangle)$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle C,S,T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,P_1,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle J_{12}\rangle\oplus\langle C,S,T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$AO(3)\oplus\langle C,S,T\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle C,S,T,Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,P_1,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$\langle C,S,T\rangle\oplus(\langle J_{12}\rangle \dotplus \langle Z\rangle)$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_3,P_3,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2,M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$;

$AO(3)\oplus\langle C,S,T,Z\rangle$: O, $\langle M\rangle$, $\langle G_1,G_2,G_3,P_1,P_2,P_3,M\rangle$.

Теорема 4.3 доказывается на основания теорем 5.4, 5.5 [9] и предложения 4.2.

Отметим, что встречающиеся в теореме 4.3 подпрямые суммы вида $\langle X\rangle \dotplus \langle Z\rangle$ — это алгебры $\langle X+\lambda Z\rangle$ $(\lambda>0)$, $\langle X,Z\rangle$. Под $\langle J_{12},S+T\rangle \dotplus \langle Z\rangle$ следует понимать одну из алгебр $\langle J_{12}+\lambda Z, S+T+\mu Z\rangle$ $(\lambda^2+\mu^2\neq 0)$, $\langle J_{12},S+T,Z\rangle$, причем, если $\lambda<0$ или $\mu<0$, то проекция F на $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$ совпадает с $\langle G_1+P_2,G_2-P_1\rangle$.

§ 5. Разрешимые подалгебры конформной алгебры

В этом параграфе мы приведем модифицированное изложение результата работы [7] о максимальных разрешимых подалгебрах алгебры $AC(1,n)$, а также проведем классификацию максимальных абелевых и одномерных подалгебр алгебры $AC(1,n)$.

Напомним, что

$$\Omega_{12}=\frac{1}{2}(P_0+K_0),\quad \Omega_{\alpha+2,\beta+2}=J_{\alpha\beta},$$

$$\Omega_{n+2,n+3}=\frac{1}{2}(K_n-P_n)\quad(\alpha,\beta=0,1,\ldots,n),\quad M=P_0+P_n,$$

$$G_a=J_{0a}-J_{an}\quad(a=1,\ldots,n-1),\quad C=-J_{0n}-D,$$

$$Z=J_{0n}-D,\quad S=\frac{1}{2}(K_0+K_n),\quad T=\frac{1}{2}(P_0-P_n),\quad D=-\Omega_{1,n+3}.$$

Теорема 5.1. *Если n — четное число и $n\geq 4$, то алгебра $AC(1,n)$ обладает относительно $C(1,n)$-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:*

$$\langle P_0+K_0,J_{12},J_{34},\ldots,J_{n-1,n}\rangle;$$

$$\langle P_0,P_1,\ldots,P_n,J_{12},J_{34},\ldots,J_{n-1,n},D\rangle;$$

$$\langle M,P_1,\ldots,P_{n-1},G_1,\ldots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\ldots,J_{n-3,n-2},C,T,Z\rangle;$$

$$\langle M,P_1,\ldots,P_{n-1},G_1,\ldots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\ldots,J_{n-3,n-2},S+T,Z\rangle.$$

Их размерности равны соответственно

$$\frac{n+2}{2},\ \frac{3n+4}{2},\ \frac{5n+2}{2},\ \frac{5n}{2}.$$

Если n — нечеткое число и $n \geq 3$, то алгебра $AC(1,n)$ обладает относительно $C(1,n)$-сопряженности тремя максимальными раэрешимыми подалгебрами:

$$\langle P_0 + K_0, P_n - K_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle;$$
$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}, C, T, Z\rangle;$$
$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}, S + T, Z\rangle.$$

Их размерности равны соответственно

$$\frac{n+3}{2}, \ \frac{5n+3}{2}, \ \frac{5n+1}{2}.$$

Во всех случаях записанные алгебры попарно несопряжены.

Доказательство. Пусть L — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2, n+1)$. Если все неприводимые L-инвариантные подпространства пространства $R_{2,n+1}$ невырождены, то $L = \langle \Omega_{12}, \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{n+1,n+2}\rangle$ при четном n и $L = \langle \Omega_{12}, \Omega_{34}, \ldots, \Omega_{n+2,n+3}\rangle$ при нечетном n. Если в $R_{2,n+1}$ существует изотропное L-нвариантное подпространство, то L сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ или алгебры $AOpt(1,n)$.

В [8] установалено, что если n — нечетное число, то алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ обладает относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй

$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}, C, T, Z\rangle, \tag{5.1}$$

а если n — четное число, то алгебра $A\tilde{P}(1,n)$ обладает относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности двумя максимальными разрешимыми подалгебрами

$$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}, D\rangle, \tag{5.2}$$

$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, C, T, Z\rangle. \tag{5.3}$$

Согласно [9], при любом n алгебра $AOpt(1,n)$ имеет относительно $\widetilde{Sch}(n-1)$–сопряженности две максимальные разрешимые подалгебры

$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \supset\!\!\!\!+ \ (AH(n-1) \oplus \langle C, T, Z\rangle), \tag{5.4}$$

$$\langle M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \supset\!\!\!\!+ \ (AH(n-1) \oplus \langle S + T, Z\rangle). \tag{5.5}$$

Алгебры (5.1), (5.3) совпадают с алгеброй (5.4). Алгебра (5.2) не сопряжена ни одной из подалгебр алгебр (5.4), (5.5), поскольку алгебра (5.2) не имеет инвариантных изотропных подпространств в пространстве $R_{1,n}$. Несопряженность алгебр (5.4) и (5.5) вытекает из того, что эти алгебры имеют разные размерности. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $AC(1,n)$ $(n \geq 2)$ исчерпываются относительно $C(1,n)$-сопряженности максимальными абелевыми подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, описанными в теореме 3.1, максимальными абелевыми подалгебрами алгебры $AOpt(1,n)$, не сопряженными подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и описанными в теореме 4,1, а также алгебрами*

$$\langle P_0 + K_0, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle \quad (n \text{ — четное}),$$
$$\langle P_0 + K_0, P_n - K_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle \quad (n \text{ — нечетное}),$$

Справедливость теоремы 5.2 вытекает из теорем 3.1, 4.1, 5.1.

Теорема 5.3. *Одномерные подалгебры алгебры $AC(1,n)$ $(n \geq 3)$ исчерпываются относительно $C(1,n)$-сопряженности одномерными подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, описанными в теореме 3.2, одномерными подалгебрами алгебры $AOpt(1,n)$, несопряженными подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ и описанными в теореме 4.2, а также такими алгебрами:*

$$\langle P_0 + K_0\rangle,\ \langle \alpha(P_0+K_0) + J_{12}\rangle,$$
$$\langle \alpha(P_0+K_0) + J_{12} + \beta_1 J_{34} + \cdots + \beta_s J_{2s+1,2s+2}\rangle$$
$$(\alpha > 0,\ 0 < \beta_1 \leq \cdots \leq \beta_s \leq 1,\ s = 1,\ldots,[n-2/2]),$$
$$\langle \alpha(P_0+K_0) + J_{12} + \gamma_1 J_{34} + \cdots + \gamma_{(n-3)/2} J_{n-2,n-1} + \gamma_{(n-1)/2}(K_n - P_n)\rangle,$$
$$\langle J_{12} + \gamma_1 J_{34} + \cdots + \gamma_{(n-3)/2} J_{n-2,n-1} + \gamma_{(n-1)/2}(K_n - P_n)\rangle,$$

где n — нечетное, $\alpha > 0$, $0 < \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_{(n-1)/2} \leq 1$.

Доказательство теоремы 5.3 проводится на основании теорем 3.2, 4.2, 5.2.

§ 6. Классификация подалгебр алгебры $AC(1,4)$

Множество подалгебр алгебры $AC(1,4) = AO(2,5)$ разобъем на три класса: 1) подалгебры, не имеющие в пространстве $R_{2,5}$ инвариантних изотропных подпространств; 2) подалгебры, имеющие в $R_{2,5}$ инварариантное одномерное изотропное подпространство; 3) подалгебры, имевщие в $R_{2,5}$ инвариантное изотропное подпространство размерности 2 и не имеющие в $R_{2,5}$ инвариантных изотропных подпространств размерности 1,

Перечни подалгебр второго и третьего классов дают теоремы 3.3–3.6, 4.3. Остается описать подалгебры первого класса.

Предложение 6.1. *Подалгебра F алгебры $AO(2,5)$ не имеет в $R_{2,5}$ инвариантных изотропных подпространств тогда и только тогда, когда она сопряжена одной из следующих алгебр:*

1) $AO(2k)$, где $k = 3,4,5$;

2) $ASU(1,2) = \langle \Omega_{12}+\Omega_{34}, \Omega_{12}+\Omega_{56}, \Omega_{13}+\Omega_{24}, \Omega_{15}+\Omega_{26}, \Omega_{35}+\Omega_{46}, \Omega_{14}-\Omega_{23}, \Omega_{16}-\Omega_{25}, \Omega_{36}-\Omega_{45}\rangle$;

3) $ASU(1,2) \oplus \langle \Omega_{12} - \Omega_{34} - \Omega_{56}\rangle$;

4) $K = \langle \Omega_{12} - \Omega_{34} - \Omega_{56}, \Omega_{13}+\Omega_{24}, \Omega_{15}+\Omega_{26}, \Omega_{35}+\Omega_{46}\rangle$;

5) $\Delta = \langle \Omega_{14} + \sqrt{3}\Omega_{13} + \Omega_{25}, -\Omega_{15} + \Omega_{24} - \sqrt{3}\Omega_{23}, \Omega_{12} - 2\Omega_{45}\rangle$;

6) $\Delta \oplus \langle \Omega_{67}\rangle$; $AO(2,3) \oplus \langle \Omega_{67}\rangle$;

7) $AO(2,2) \oplus L$, где $L \subset AO(3) = \langle \Omega_{ab} | a,b = 5,6,7\rangle$;

8) $\langle \Omega_{14}+\Omega_{23}, \Omega_{24}-\Omega_{13}, \Omega_{12}-\Omega_{34}\rangle \oplus \langle \Omega_{12}+\Omega_{34}\rangle \dotplus L$, где $L \subset AO(3)$;

9) $AO(2,1) \oplus L$, где $L \subset AO(4) = \langle \Omega_{ab} | a,b = 4,5,6,7\rangle$;

10) $\langle \Omega_{12}\rangle \oplus L$, где $L \subset AO(5) = \langle \Omega_{ab} | a,b = 3,4,5,6,7\rangle$;

11) $\langle \Omega_{12} + \alpha\Omega_{34} + \beta\Omega_{56}\rangle$, где $\alpha > 0$, $\beta = 0$ или $\beta \geq \alpha$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$;

12) $\langle \Omega_{34} + \alpha\Omega_{12}, \Omega_{56} + \beta\Omega_{12}\rangle$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha \neq 1$ при $\beta = 0$;

13) $\langle \alpha\Omega_{12} + \Omega_{34} - \Omega_{56}\rangle \oplus \langle \Omega_{34}+\Omega_{56}, \Omega_{35}-\Omega_{46}, \Omega_{36}+\Omega_{45}\rangle$, $(\alpha > 0)$;

14) $\langle \Omega_{12} + \alpha\Omega_{67}\rangle \oplus \langle \Omega_{34}, \Omega_{35}, \Omega_{45}\rangle$, где $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$;

15) $\langle \Omega_{13}, \Omega_{14}, \Omega_{34}\rangle \oplus \langle \Omega_{25}, \Omega_{26}, \Omega_{56}\rangle$;

16) $\langle \Omega_{13}+\Omega_{25}, \Omega_{14}+\Omega_{26}, \Omega_{34}+\Omega_{56}\rangle$;

17) $\langle \Omega_{ab} | a,b = 1,3,4\rangle \oplus \langle \Omega_{ab} | a,b = 2,5,6,7\rangle$;

18) $\langle \Omega_{ab} | a,b = 1,3,4\rangle \oplus \langle \Omega_{ab} | a,b = 5,6,7\rangle$.

Доказательство. Согласно предложению 2.2 алгебра $AO(2,5)$ не имеет собственных неприводимых подалгебр. Максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2,5)$, не имеющие инвариантных изотропных подпространств, исчерпываются относительно $O(2,5)$-сопряженности такими алгебрами:

α) $AO(2,k)\oplus AO(5-k)$, где $AO(5-k)=\langle \Omega_{ab}|a,b=k+3,\ldots,7\rangle$ $(k=0,1,2,3,4)$;

β) $AO_1(1,2)\oplus AO_2(1,3)$, где $AO_1(1,2)=\langle\Omega_{ab}|a,b=1,3,4\rangle$, $AO_2(1,3)=\langle\Omega_{ab}|$ $a,b=2,5,6,7\rangle$.

Алгебра $AO(2,4)$ имеет такие неприводимые подалгебры: $AO(2,4)$, $ASU(1,2)$, $ASU(1,2)\oplus\langle\Omega_{12}-\Omega_{34}-\Omega_{56}\rangle$, K.

Алгебра Δ является единственной собственной неприводимой подалгеброй алгебры $AO(2,3)$. Как показано в [7], алгебра $AO(2,2)$ содержит только одну собственную неприводимую подалгебру $\langle\Omega_{14}+\Omega_{23},\Omega_{24}-\Omega_{13},\Omega_{12}-\Omega_{34}\rangle\oplus\langle\Omega_{12}+\Omega_{34}\rangle$. Следовательно, в случае α) мы получаем алгебры 1)–14), а в случае β) — алгебры 15)–18). Предложение доказано.

Теорема 6.1. *Подалгебры алгебры $AC(1,4)$ исчерпываются относительно $C(1,4)$-сопряженности подалгебрами алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ (теоремы 3.3–3.6), подалгебрами алгебры $AOpt(1,4)$, не сопряженными подалгебрам алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ (теорема 4.3) и такими алгебрами:*

$AC(1,k)$, где $k=2,3,4$;

$\langle P_0+K_0+2J_{12},P_0+K_0+2J_{34},P_1+K_1+2J_{02},P_3+K_3+2J_{04},J_{13}+J_{24},P_2+K_2-2J_{01},P_4+K_4-2J_{03},J_{14}-J_{23}\rangle\oplus\Gamma$, где $\Gamma=0$ или $\Gamma=\langle P_0+K_0-2J_{12}-2J_{34}\rangle$;

$\langle P_0+K_0-2J_{12}-2J_{34},P_1+K_1+2J_{02},P_3+K_3+2J_{04},J_{13}+J_{24}\rangle$;

$\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03},-P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01},P_0+K_0-4J_{23}\rangle\oplus\Gamma$, где $\Gamma=0$ или $\Gamma=\langle K_4-P_4\rangle$;

$AC(1,2)\oplus\langle J_{34}\rangle$; $AC(1,1)$; $AC(1,1)\oplus\langle J_{23}\rangle$; $AC(1,1)\oplus\langle J_{23},J_{24},J_{34}\rangle$;

$\langle J_{01}-D,K_0-P_0-K_1-P_1,-P_0-K_0+K_1-P_1\rangle\oplus\langle P_0+K_0+K_1-P_1\rangle\oplus L$, где L — одна из алгебр O, $\langle J_{23}\rangle$, $\langle J_{23},J_{24},J_{34}\rangle$;

$\langle J_{01}-D,K_0-P_0-K_1-P_1,-P_0-K_0+K_1-P_1,P_0+K_0+K_1-P_1+\alpha J_{23}\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle P_0,K_0,D\rangle\oplus L$, где L совпадает с одной из алгебр: O, $\langle J_{12}\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$ $(0<\alpha\le 1)$, $\langle J_{12},J_{34}\rangle$, $\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23},J_{12}-J_{34}\rangle$, $AO(4)$;

$\langle P_0+K_0+\alpha J_{12}\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\ne 2)$;

$\langle P_0+K_0+\alpha J_{12}+\beta J_{34}\rangle$ $(0<\alpha\le\beta,\ \alpha\ne 2,\ \beta\ne 2)$;

$\langle J_{12}+\alpha(P_0+K_0),J_{34}+\beta(P_0+K_0)\rangle$ $(\alpha>0,\ \beta\ge 0,\ \alpha\ne\frac{1}{2}$ при $\beta=0)$;

$\langle J_{12}-J_{34}+\alpha(P_0+K_0)\rangle\oplus\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23}\rangle$ $(\alpha>0)$;

$\langle P_0+K_0+\alpha(K_4-P_4)\rangle\oplus\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$ $(\alpha>0,\ \alpha\ne 1)$;

$\langle P_0+K_0\rangle\oplus L$, где L — одна из алгебр O, $\langle J_{12}\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$ $(0<\alpha\le 1)$, $\langle J_{12},J_{34}\rangle$, $AO(3)$, $\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23}\rangle$, $AO(3)\oplus\langle K_4-P_4\rangle$, $\langle 2J_{12}+J_{34},J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}/2(K_4-P_4),J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}/2(K_3-P_3)\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23},J_{12}-J_{34}\rangle$, $AO(4)$, $\langle J_{12},J_{13},J_{14},J_{23},J_{24},J_{34},K_1-P_1,K_2-P_2,K_3-P_3,K_4-P_4\rangle$;

$\langle P_1+K_1,P_2+K_2,J_{12}\rangle\oplus\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$;

$\langle P_1+K_1+2J_{03},P_2+K_2+2J_{04},J_{12}+J_{34}\rangle$;

$\langle P_1+K_1,P_2+K_2,J_{12}\rangle\oplus\langle J_{03},J_{04},J_{34},K_0-P_0,K_3-P_3,K_4-P_4\rangle$;

$\langle P_1+K_1,P_2+K_2,J_{12}\rangle\oplus\langle K_3-P_3,K_4-P_4,J_{34}\rangle$.

Доказательство теоремы опирается на предложение 6.1 и описание подалгебр алгебры $AO(5)$ [5].

Приложение

Уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1$$

инвариантно относительно алгебры $AC(1,4)$ [12]. При нахождении вещественных решений уравнения эйконала посредством симметрийной редукции можно ограничиться подалгебрами алгебры $AC(1,4)$, не содержащими M, T, $M+2T$.

Используя подалгебры коразмерности 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, обладающие ненулевой проекцией на $\langle D\rangle$, мы получаем для них такие системы функционально независимых инвариантов:

1) ux_2^{-1}, $\left(x_0^2-x_1^2\right)x_2^{-2}$;
2) ux_3^{-1}, $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)x_3^{-2}$;
3) $\left(x_0^2-u^2\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$, $2\alpha\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)-\ln\left[(x_0-u)(x_0+u)^{-1}\right]$;
4) $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-u^2\right)x_3^{-2}$, $(1+\alpha)\alpha^{-1}\ln x_3-\ln(x_0-x_2)$;
5) $\left(x_0^2-x_3^2-u^2\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$, $(1+\alpha)\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\ln(x_0-x_3)-2\beta\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)$;
6) $\left(x_0^2-x_1^2-u^2\right)x_2^{-2}$, $\alpha\ln(x_0-x_1)-(1+\alpha)\ln x_2$;
7) $\left(x_1^2+x_2^2+u^2\right)\left(x_0^2-x_3^2\right)^{-1}$, $(1+\alpha)\ln(x_0+x_3)+(1-\alpha)\ln(x_0-x_3)$;
8) $[(x_0-x_1)u-x_2]\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{-1/2}$, x_0-x_1;
9) $\left(\dfrac{\beta x_2}{x_0-x_3+\alpha}+\dfrac{x_1}{x_0-x_3}-u\right)\left(x_0^2-x_1^2-\dfrac{x_0-x_3}{x_0-x_3+\alpha}x_2^2-x_3^2\right)^{-1/2}$, x_0-x_3;
10) $\left(x_0^2-x_3^2-u^2\right)(x_0-x_3)^{-1}+2\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)$, $(x_0-x_3)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$;
11) $\left(x_1^2+u^2\right)x_2^{-2}$, $\left(x_0^2-x_3^2\right)x_2^{-2}$;
12) $\left(x_0^2-x_3^2-u^2\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$, $\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)$;
13) $\left(x_0^2-x_3^2-u^2\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$, $2\ln(x_0-x_3)-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)$;
14) $u^2(x_0-x_1)^{-1}$, $x_0+x_1+\ln(x_0-x_1)$;
15) $u^2(x_0-x_1)^{-1}$, $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)(x_0-x_1)^{-1}+\ln(x_0-x_1)$;
16) $\left(x_1^2+x_2^2+u^2\right)(x_0-x_3)^{-1}$, $x_0+x_3+\ln(x_0-x_3)$;
17) $\left(x_0^2-x_3^2-u^2\right)(x_0-x_3)^{-1}+\ln(x_0-x_3)+2\alpha\operatorname{arctg}\left(x_2x_1^{-1}\right)$, $(x_0-x_3)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$;
18) $u\left[(x_0-x_1)^2-4x_2\right]^{-1}$,
$w=3\ln\left[(x_0-x_1)^2-4x_2\right]-2\ln\left[6(x_0+x_1)-6x_2(x_0-x_1)+(x_0-x_1)^3\right]$;
19) $\left(x_1^2+u^2\right)^{1/2}\left[(x_0-x_1)^2-4x_2\right]^{-1}$, w;
20) $\left(x_3^2+u^2\right)x_0^{-2}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)x_0^{-2}$.

Если w^1, w — основные инварианты подалгебры коразмерности 2 алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, то анзатц $w^1=\varphi(w)$ редуцирует уравнение эйконала к обыкновенному дифференциальному уравнению $F(\dot\varphi,\varphi,w)=0$. Используя найденные системы инвариантов 1)–20), получаем такие редуцированные уравнения:

$$4w\dot\varphi-(\varphi-2w\dot\varphi)^2=1; \tag{1,2}$$

$$(\varphi+\alpha^2\varphi^2)\dot\varphi^2+\varphi^4-\varphi^3=0; \tag{3}$$

$$\gamma^2\dot\varphi^2-4(1-\gamma\varphi)\dot\varphi+4(\varphi^2-\varphi)=0, \quad \gamma=(1+\alpha)\alpha^{-1}; \tag{4}$$

$$[(1+\alpha^2)+\beta^2]\dot\varphi^2+2[(1+\alpha)\varphi-\alpha]\dot\varphi+\varphi^2-\varphi=0; \tag{5}$$

$$(1+\alpha)^2\dot\varphi^2 + 4[\alpha - (1+\alpha)\varphi]\dot\varphi + 4\varphi(\varphi - 1) = 0; \tag{6}$$

$$(1-\alpha^2)\dot\varphi^2 + 2\varphi\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0; \tag{7}$$

$$2\varphi\dot\varphi - w^{-1}\varphi^2 - w^{-1}(1+w^2) = 0; \tag{8}$$

$$2w\varphi\dot\varphi + \varphi^2 - w^{-2} - \beta^2(w+\alpha)^{-2} = 1; \tag{9}$$

$$w^2\dot\varphi^2 + \dot\varphi + 1 = 0; \tag{10}$$

$$(w - w^2)\dot\varphi^2 + 2w\varphi\dot\varphi - \varphi^2 - \varphi = 0; \tag{11}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2 + 2\varphi\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0; \tag{12}$$

$$(1+\alpha^2)\dot\varphi^2 + 2(1-\varphi)\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0; \tag{13}$$

$$\dot\varphi^2 + \varphi\dot\varphi - \varphi = 0; \tag{14–16}$$

$$w^3\dot\varphi^2 + w\dot\varphi + \alpha w - 1 = 0; \tag{17}$$

$$144(e^w - 1)\dot\varphi^2 - 96\varphi\dot\varphi - 16\varphi^2 = 1; \tag{18, 19}$$

$$(\varphi - w\dot\varphi)^2 - w\dot\varphi^2 = \varphi. \tag{20}$$

Редуцированное уравнение мы снабдили номером той системы инвариантов, которой оно соответствует.

Укажем некоторые точные решения уравнения эйконала, полученные из решений редуцированных уравнений (1)–(10).

1) $u = \left(C^2+1\right)(2C)^{-1}\left(x_0^2 - x_1^2\right)^{1/2} + \left(C^2-1\right)(2C)^{-1}x_2,$
$u = \pm\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2};$

2) $u = \left(C^2+1\right)(2C)^{-1}\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2} + \left(C^2-1\right)(2C)^{-1}x_3,$
$u = \pm\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^{1,2};$

3) $u = \pm x_0;$

4) $u = \pm\left\{C(x_0 - x_2) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \delta x_3^2\right\}^{1/2} \quad (\delta = 0, 1);$
$u = \pm\left\{C^2(x_0 - x_2)^2 - 2Cx_3(x_0 - x_2) + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)\right\}^{1/2};$
$u = \pm\left\{x_3^2[1 - C(x_0 - x_2)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right\}^{1/2};$

5) $u = \pm\left(x_0^2 - x_3^2\right)^{1/2};$
$u = \pm\left\{\left(x_1^2 + x_2^2\right)[1 - C(x_0 - x_3)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right\}^{1/2};$
$u = \pm\left\{C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_3^2\right\}^{1/2};$
$u = \pm\left\{C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right\}^{1/2};$

6) $u = \pm\left\{C(x_0 - x_1) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right\}^{1/2};$

$u = \pm\left\{x_2^2[1 - C(x_0 - x_1)]^{-1} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right\}^{1/2};$

7) $u = \pm\left\{C(x_0 + x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right\}^{1/2};$

8) $u = (x_0 - x_1)^{-1}\left\{x_2 + \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2} \times\right.$

$\left.\times\left[(x_0 - x_1)^2 + C(x_0 - x_1) - 1\right]^{1/2}\right\};$

9) $u = \pm\left\{\dfrac{(x_0 - x_3)^3 + (C + \alpha)(x_0 - x_3)^2 + (C\alpha - \beta^2 - 1)(x_0 - x_3) - \alpha}{(x_0 - x_3)^2(x_0 - x_3 + \alpha)}\right\}^{1/2}$

$\times\left(x_0^2 - x_1^2 - \dfrac{x_0 - x_3}{x_0 - x_3 + \alpha} - x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2} + \dfrac{\beta x_2}{x_0 - x_3 + \alpha} + \dfrac{x_1}{x_0 - x_3};$

10) $u = \pm\left\{(x_0 - x_3)(t^{-\sigma} + 2\sigma \operatorname{arctg} t + 2 \operatorname{arctg}\left(x_2 x_1^{-1}\right) + x_0 + x_3 + C)\right\}^{1/2},$

$t = (2(x_0 - x_3))^{-1}\left\{\left[\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 4(x_0 - x_3)^2\right]^{1/2} - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right\}, \ \sigma = \pm 1.$

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
2. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
4. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
5. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, № 1, 67–72.
6. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1, n)$, Препринт № 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 52 с.
7. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.,И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2, n)$, Препринт № 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
8. Barannik L.F., Fushchych W.I., On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincaré group $\tilde{P}(1, n)$, *J. Math. Phys.*, 1987, **28**, № 7, 1445–1458.
9. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., О непрерывных подгруппах обобщенных групп Шредингера, Препринт № 87.16, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 48 с.
10. Chen Su-Shing, On subgroups of the noncompact real exceptional Lie group F_4^*, *Math. Ann.*, 1973, **204**, № 4, 271–284.
11. Тауфик М.С., О полупростых подалгебрах псевдоунитарных алгебр Ли, в сб. Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, Яросл. гос. ун-т, 1980, 86–115.
12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.