О редукции и точных решениях нелинейного уравнения Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

Ansätze are constructed which reduce the Poincaré-invariant equation for the spinor field $\Psi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ to a system of partial differential equations for the four-component function $\varphi(\omega)$ depending on three invariant variables $\omega=\{\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x)\}$. Multiparameter families of exact solutions of the nonlinear Dirac equation with the mass term are found. The $P(1,3)$-nonequivalent Ansätze for a vector field are constructed.

Построены анзацы, с помощью которых пуанкаре-инвариантные уравнения для спинорного поля $\Psi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ сводятся к системе дифференциальных уравнений для четырехкомпонентной функции $\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ зависящей от трех инвариантных переменных. Найдены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака. Построены $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы для векторного поля.

Введение

Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака для массивного поля

$$\left[i\gamma\partial - m - \lambda(\bar\Psi\Psi)^k\right]\Psi = 0, \tag{1}$$

где $\Psi=\Psi(x_0,x_1,x_2,x_3)$ — 4-компонентный спинор; $\gamma\partial\equiv\gamma^\nu\partial_\nu=\gamma_0\partial_0+\gamma_1\partial_1+\gamma_2\partial_2+\gamma_3\partial_3$, $\partial_\nu\equiv\partial/\partial x_\nu$, $\nu=0,\dots,3$; γ_ν — матрицы Дирака 4×4; m, k, λ — произвольные действительные параметры.

О применении уравнений типа (1) к проблемам квантовой теории поля см. [1].

Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (1) является группа Пуанкаре $P(1,3)$, генераторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} &P_0=\partial_0, \qquad P_a=-\partial_a, \quad a=1,2,3, \qquad J_{\mu\nu}=M_{\mu\nu}+S_{\mu\nu},\\ &M_{\mu\nu}\equiv x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad S_{\mu\nu}\equiv -\tfrac14(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \tag{2}$$

Операторы (2), как известно (см., например, [2]), образуют алгебру Пуанкаре $AP(1,3)$:

$$\begin{aligned} &[P_\mu,P_\nu]=0, \qquad [P_\sigma,J_{\mu\nu}]=g_{\sigma\mu}P_\nu-g_{\sigma\nu}P_\mu,\\ &[J_{\mu\nu},J_{\rho\sigma}]=g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma}-g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

В случае, когда $m=0$, $k=\frac13$ ($(\bar\Psi\Psi)^{1/3}$ — нелинейность Гюрши), уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)\supset P(1,3)$. С помощью конформной симметрии уравнения (1) (при $m=0$, $k=\frac13$) в [3, 4] построен широкий класс точных решений нелинейного уравнения Дирака. Более сложные нелинейные конформно-инвариантные уравнения Дирака рассмотрены в [5]. Исследованию пуанкаре-инвариантных и масштабно-инвариантных решений уравнения (1) (при $m=0$ и произвольном k) посвящены работы [4, 6].

Теор. и матем. физика, 1987, **72**, № 1, С. 35–44.

В настоящей работе на основе идей и методов Ли в явном виде построены анзацы для отыскания решений произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения для поля со спином $\frac{1}{2}$. Найдены пуанкаре-инвариантные многопараметрические семейства решений уравнения (1) для $m \neq 0$ и произвольного k.

Решения уравнения (1), следуя [7] , ищем в виде

$$\Psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{3}$$

где $\varphi(\omega)$ — 4-компонентная функция, зависящая от трех новых переменных $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$. Спинор $\Psi(x)$ в исходном уравнении (1) зависит от четырех переменных $x = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, следовательно, анзац (3) редуцирует (сводит) систему (1) к системе с меньшим числом независимых переменных. Матрица $A(x)$ и новые переменные $\omega(x)$ находятся из условий [3, 4]

$$Q_1 A(x) = 0, \qquad Q_1 \equiv a^\mu P_\mu + C^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$Q_2 \omega(x) = 0, \qquad Q_2 \equiv a^\mu P_\mu + C^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \tag{5}$$

где a^μ, $C^{\mu\nu} = -C^{\nu\mu}$ — произвольные параметры.

В том частном случае, когда $\varphi(\omega)$ зависит только от одной переменной, уравнение (1) с помощью анзаца (3) редуцируется к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Решая систему ОДУ, найдем семейства частных решений уравнения (1). Для реализации этого алгоритма необходимо построить в явном виде матрицы $A(x)$ и переменные $\omega(x)$.

В разделе 1, воспользовавшись результатами Патеры, Винтернитца, Цассенхауза [8] по классификации $P(1,3)$-неэквивалентных подалгебр алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$, в явном виде мы получили $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы (3). В разделе 2 приведены редуцированные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) для функции $\varphi(\omega)$, полученные в результате подстановки анзацев из раздела 1. Для этих редуцированных систем ДУЧП или ОДУ найдены некоторые точные решения, из которых затем построены $P(1,3)$-неразмножаемые семейства решений уравнения (1). В разделе 3 построены явно ковариантные $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы для векторного поля.

1. $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы для спинорного поля

Описание анзацев (3) для спинорного поля с алгеброй инвариантности (2) сводится к решению системы (4), которая представляет собой систему шестнадцати ДУЧП первого порядка для матричных элементов матрицы $A(x)$. Не вдаваясь в подробности этих довольно громоздких вычислений, приведем здесь ее решение в виде табл. 1, где приведены $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы для спинорного поля ($\alpha \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$). При составлении этой таблицы мы воспользовались результатом [8] о том, что алгебра Пуанкаре $AP(1,3)$ имеет только 13 одномерных неэквивалентных подалгебр. В соответствии с этим существуют 13 пуанкаре-неэквивалентных анзацев вида (3). Инвариантные переменные $\omega(x)$ для этих анзацев построены в [9].

На одном конкретном примере продемонстрируем, как находить явный вид анзацев (3). Возьмем в качестве Q_1 оператор № 4 из табл. 1, т.е. $Q_1 = J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2$. Уравнения (4), (5) в этом случае принимают вид

$$\left(x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\right) A(x) = 0, \qquad (x_1\partial_2 - x_2\partial_1)\omega(x) = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно системе Лагранжа–Эйлера

$$\frac{dx_0}{0} = \frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_2}{0},$$

для которой легко выписать первые интегралы $x_1^2 + x_2^2$, x_0, x_3. Следовательно, в качестве инвариантных переменных $\omega(x)$ можно выбрать $x_1^2 + x_2^2 = \omega_1$, $x_0 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$.

Матрицу $A(x)$ ищем в виде $A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 f(x)\right\}$, $f(x)$ — некоторая скалярная функция; тогда

$$\left(x_1\partial_2 - x_1\partial_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 f(x)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2\left[(x_1\partial_2 - x_2\partial_1 - 1)f(x)\right]\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 f(x)\right\} = 0,$$

т.е.

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} = f.$$

Интегрируя это последнее уравнение, получаем $f(x) = -\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, и таким образом, матрица $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right\}.$$

Совершенно аналогично проводятся вычисления и для других случаев.

Все анзацы, выписанные в табл. 1, представляют собой полный набор $P(1,3)$-неэквивалентных анзацев для спинорного поля. Они не переводимы друг в друга с помощью операции группового размножения решений. Отметим также, что из спинорного поля можно легко построить поля для других спинов, например скалярное $\Phi = \bar\Psi\Psi$, векторное $A_\mu = \bar\Psi\gamma_\mu\Psi$, тензорное $F_{\mu\nu} = \bar\Psi\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ и т.д., поэтому анзацы для спинорного поля представляют особый интерес.

2. Редукция уравнения (1) и точные решения

Подставим анзацы из табл. 1 в уравнение (1). После довольно громоздких вычислений получим следующие уравнения для $\varphi(\omega)$ ($F \equiv \lambda(\bar\varphi\varphi)^{1/3} + m$):

$$\gamma_1\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \tag{6.1}$$

$$\gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \tag{6.2}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \tag{6.3}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\varphi\right) + \gamma_0\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} + iF\varphi = 0, \tag{6.4}$$

Таблица 1

№	Алгебра	Инвариантные переменные $\omega=\{\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x)\}$	Анзацы
1	P_0	$x_1,\ x_2,\ x_3$	$\Psi(x)=\varphi(\omega)$
2	P_3	$x_0,\ x_1,\ x_2$	$\Psi(x)=\varphi(\omega)$
3	P_0+P_1	$x_0+x_1,\ x_2,\ x_3$	$\Psi(x)=\varphi(\omega)$
4	J_{12}	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ x_0,\ x_3$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac12\gamma_1\gamma_2\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
5	J_{03}	$\left(x_0^2-x_3^2\right)^{1/2},\ x_1,\ x_2$	$\Psi(x)=\exp\{\frac12\gamma_0\gamma_3\times$ $\times\ln(x_0+x_3)\}\varphi(\omega)$
6	$J_{02}+J_{12}$	$x_0+x_1,$ $\left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1/2},\ x_3$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)}\times$ $\times\gamma_2(\gamma_0+\gamma_1)\}\varphi(\omega)$
7	$\alpha J_{23}-J_{01}$	$\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2},\ \alpha\ln(x_0+x_1)+$ $+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3},\ \left(x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$	$\Psi(x)=\exp\{\frac12\gamma_0\gamma_1\ln(x_0+x_1)-$ $-\frac12\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\}\varphi(\omega)$
8	$J_{23}-\frac{\varepsilon}{2}(P_0+P_1)$	$x_0+x_1,\ \varepsilon(x_0-x_1)+$ $+\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3},\ \left(x_2^2+x_3^3\right)^{1/2}$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac12\gamma_2\gamma_3\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3}\}\varphi(\omega)$
9	$J_{12}+\alpha P_0$	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},$ $x_0+\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ x_3$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac12\gamma_1\gamma_2\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
10	$J_{12}-\alpha P_3$	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},$ $x_3+\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2},\ x_0$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac12\gamma_1\gamma_2\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\}\varphi(\omega)$
11	$J_{01}-\alpha P_2$	$\left(x_0^2-x_1^2\right)^{1/2},$ $x_2+\alpha\ln(x_0+x_1),\ x_3$	$\Psi(x)=\exp\{\frac12\gamma_0\gamma_1\times$ $\times\ln(x_0+x_1)\}\varphi(\omega)$
12	$J_{02}+J_{12}+$ $+P_0-P_1$	$x_0-x_1+(x_0+x_1)x_2+$ $+\frac16(x_0+x_1)^3,$ $x_2+\frac14(x_0+x_1)^3,\ x_3$	$\Psi(x)=\exp\{\frac14(x_0+x_1)\times$ $\times\gamma_2(\gamma_0+\gamma_1)\}\varphi(\omega)$
13	$J_{02}+J_{12}-\varepsilon P_3$	$x_0+x_1,\ \left(x_0^2-x_1^2-x_2^2\right)^{1,2},$ $x_2+\varepsilon(x_0+x_1)x_3,$	$\Psi(x)=\exp\{-\frac{x_2}{2(x_0+x_1)}\times$ $\times\gamma_2(\gamma_0+\gamma_1)\}\varphi(\omega)$

$$\frac12(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+\frac12\left[(\gamma_0+\gamma_3)\omega_1+\frac{1}{\omega_1}(\gamma_0-\gamma_3)\right]\varphi_{\omega_1}+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+\gamma_2\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{6.5}$$

$$\begin{gathered}(\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\\ +\left[(\gamma_0+\gamma_1)\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}-\gamma_1\frac{\omega_1}{\omega_2}\right]\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0,\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered}\frac12(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+\frac12\left[(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1+\frac{1}{\omega_1}(\gamma_0-\gamma_1)\right]\varphi_{\omega_1}+\\ +\left[\alpha(\gamma_0+\gamma_1)+\frac{1}{\omega_3}\gamma_2\right]\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi+\varphi_{\omega_3}\right)+iF\varphi=0,\end{gathered} \tag{6.7}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\varphi_{\omega_1}+\left[\varepsilon(\gamma_0-\gamma_1)+\frac{1}{\omega_3}\gamma_2\right]\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi+\varphi_{\omega_3}\right)+iF\varphi=0, \tag{6.8}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\gamma_1+\gamma_0\right)\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{6.9}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\gamma_1+\gamma_3\right)\varphi_{\omega_2}+\gamma_0\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+\frac{1}{2}\left[(\gamma_0+\gamma_1)\omega_1+(\gamma_0-\gamma_1)\frac{1}{\omega_1}\right]\varphi_{\omega_1}+\\&\qquad+\left[\gamma_2+\alpha(\gamma_0+\gamma_1)\right]\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0,\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$[\gamma_0-\gamma_1+(\gamma_0+\gamma_1)\omega_2]\varphi_{\omega_1}+\gamma_2\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}&(\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left[(\gamma_0+\gamma_1)\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}-\gamma_1\frac{\omega_1}{\omega_2}\right]\varphi_{\omega_2}+\\&\qquad+\left[(\gamma_0+\gamma_1)\frac{\omega_3}{\omega_1}+\gamma_2+\varepsilon\omega_1\gamma_3\right]\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь $\varphi_{\omega_a}\equiv\partial\varphi/\partial\omega_a$, $a=1,2,3$; каждое из уравнений (6.1)–(6.13) получено с помощью анзаца соответствующего номера из табл. 1.

Для того чтобы найти некоторые частные решения систем (6.1)–(6.13), совершим в них (там, где это возможно) прямую редукцию к системам ОДУ или к системам ДУЧП с двумя независимыми переменными. Соответственно будем иметь $(F\equiv\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^k+m)$

$$\gamma_1\varphi_{\omega_1}+iF\varphi=0, \tag{7.1}$$

$$\gamma_0\varphi_{\omega_1}+iF\varphi=0, \tag{7.2}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\varphi_{\omega_1}+\gamma_2\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.3}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+iF\varphi=0, \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+\gamma_1\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.5}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\varphi+\frac{1}{2}\left[(\gamma_0+\gamma_3)\omega_1+\frac{1}{\omega_1}(\gamma_0-\gamma_3)\right]\varphi_{\omega_1}+iF\varphi=0, \tag{7.5a}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{7.6}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left[(\gamma_0+\gamma_1)\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}-\gamma_1\frac{\omega_1}{\omega_2}\right]\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.6a}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+\gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi+\varphi_{\omega_3}\right)+iF\varphi=0, \tag{7.7}$$

$$\left[\varepsilon(\gamma_0-\gamma_1)+\frac{1}{\omega_3}\gamma_2\right]\varphi_{\omega_2}+\gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi+\varphi_{\omega_3}\right)+iF\varphi=0, \tag{7.8}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\varphi_{\omega_1}+\gamma_3\left(\frac{1}{2\omega_3}\varphi+\varphi_{\omega_3}\right)+iF\varphi=0, \tag{7.8a}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\gamma_1+\gamma_0\right)\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.9}$$

$$\gamma_2\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left(\frac{\alpha}{\omega_1}\gamma_1+\gamma_3\right)\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.10}$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\varphi+[\gamma_2+\alpha(\gamma_0+\gamma_1)]\,\varphi_{\omega_2}+iF\varphi=0, \tag{7.11}$$

$$\gamma_3\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0, \tag{7.12}$$

$$(\gamma_0+\gamma_1)\left(\varphi_{\omega_1}+\frac{1}{2\omega_1}\varphi\right)+\left[(\gamma_0+\gamma_1)\frac{\omega_3}{\omega_1}+\gamma_2+\varepsilon\omega_1\gamma_3\right]\varphi_{\omega_3}+iF\varphi=0. \tag{7.13}$$

(каждому уравнению (7.1)–(7.13) отвечает анзац соответствующего номера табл. 1 с $\varphi(\omega)$, зависящей от одной или двух инвариантных перемениых ω).

Выпишем некоторые решения систем (7.1)–(7.13) (χ — постоянный спинор), $f(\omega)$ — произвольная дифференцируемая действительная функция, $\varkappa=\lambda(\bar\chi\chi)^k+m$:

$$\varphi(\omega)=\exp\{i\varkappa\gamma_1\omega_1\}\chi, \tag{8.1}$$

$$\varphi(\omega)=\exp\{-i\varkappa\gamma_0\omega_1\}\chi, \tag{8.2}$$

$$\varphi(\omega)=\exp\{i\varkappa\gamma_2\omega_2\}\exp\{i(\gamma_0+\gamma_1)f(\omega_1)\}\chi, \tag{8.3}$$

$$\varphi(\omega)=(\gamma_0+\gamma_1)\exp\{-i(m\gamma_2\omega_2+f(\omega_1))\}\chi, \tag{8.3a}$$

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}\exp\{i\gamma_2 g(\omega_1)\}\chi,$$
$$g(\omega_1)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1-k}(\bar\chi\chi)^k\omega_1^{1-k}+m\omega_1, & k\neq 1,\\ \lambda(\bar\chi\chi)\ln\omega_1+m\omega_1, & k=1,\end{cases} \tag{8.4}$$

$$\varphi(\omega)=\exp\left\{i\gamma_1\left[\varkappa-\frac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\right]\omega_2\right\}\chi, \tag{8.5}$$

$$\varphi(\omega)=(\gamma_0+\gamma_1)\exp\{-i(m\gamma_3\omega_3+f(\omega_1))\}\chi, \tag{8.6}$$

$$\varphi(\omega)=\omega_3^{-1/2}(\gamma_0+\gamma_1)\exp\{-im\gamma_3\omega_3\}\chi, \tag{8.7}$$

$$\varphi(\omega)=\omega_3^{-1/2}\exp\{i\gamma_3 g(\omega_3)\}\exp\{i(\gamma_0+\gamma_1)f(\omega_1)\}\chi,$$
$$g(\omega_3)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1-k}(\bar\chi\chi)^k\omega_3^{1-k}+m\omega_3, & k\neq 1,\\ \lambda(\bar\chi\chi)\ln\omega_3+m\omega_3, & k=1,\end{cases} \tag{8.8}$$

$$\varphi(\omega)=\exp\left\{i\left[\gamma_2+\alpha(\gamma_0+\gamma_1)\right]\left(\varkappa-\frac{i}{2}(\gamma_0+\gamma_1)\right)\omega_2\right\}\chi, \tag{8.11}$$

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\gamma_2 \varkappa \omega_2\}\chi. \tag{8.12}$$

Решения (8.1)–(8.12) инвариантны только относительно подгрупп группы $P(1,3)$. Исходное же уравнение (1) пуанкаре-инвариантно, поэтому применим к (8.1)–(8.12) операцию группового размножения решений [3, 4]. В результате получим следующие многопараметрические семейства решений уравнения (1), имеющие явно ковариантный вид и обладающие свойством $P(1,3)$-неразмножаемости (понятие G-неразмножимых решений введено в работе [10]):

$$
\begin{gathered}
\Psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma a)ay\}\chi,\\
\Psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma d)dy\}\chi,\\
\Psi(x) = \exp\{i\varkappa(\gamma b)by\}\exp\{i(\gamma a+\gamma d)f(ay+dy)\}\chi,\\
\Psi(x) = (\gamma a+\gamma d)\exp\{-i[m(\gamma b)by + f(ay+dy)\}\chi,\\
\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma b)\operatorname{arctg}\frac{ay}{by}\right\}\exp\{i(\gamma b)g(\omega)\}\chi,\\
\omega = \left[(ay)^2+(by)^2\right]^{1/2},\\
\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma c)(\gamma d)\ln(cy+dy)\right\}\exp\left\{(\gamma a)\left[i\varkappa+\frac{1}{2}(\gamma c+\gamma d)ay\right]\right\}\chi,\\
\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{by}{2(ay+dy)}(\gamma b)(\gamma a+\gamma d)\right\}\times\\
\times(\gamma a+\gamma d)\exp\left\{-i[m(\gamma c)cy+f(ay+dy)]\right\}\chi,\\
\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma b)(\gamma c)\operatorname{arctg}\frac{by}{cy}-\frac{1}{2}(\gamma a)(\gamma d)\ln(ay+dy)\right\}\times\\
\times(\gamma a+\gamma d)\exp\left\{-im(\gamma c)\omega\right\}\chi,\qquad \omega = \left[(by)^2+(cy)^2\right]^{1/2},\\
\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma b)(\gamma c)\operatorname{arctg}\frac{by}{cy}\right\}\exp\left\{i(\gamma c)g(\omega)\right\}\times\\
\times\exp\left\{i(\gamma a+\gamma d)f(ay+dy)\right\}\chi,\qquad \omega = \left[(by)^2+(cy)^2\right]^{1/2},\\
\Psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma d)(\gamma a)\ln(ay+dy)\right\}\times\\
\times\exp\left\{i[\gamma b+\alpha(\gamma a+\gamma d)]\left[\varkappa-\frac{1}{2}i(\gamma a+\gamma d)\right](by+\alpha\ln(ay+dy))\right\}\chi,\\
\Psi(x) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(\gamma a+\gamma d)(\gamma b)(ay+dy)\right\}\times\\
\times\exp\left\{i\varkappa(\gamma b)\left(by+\frac{1}{4}(ay+dy)^2\right)\right\}\chi.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

В формулах (9) $\varkappa = \lambda(\bar{\chi}\chi)^k + m$, $y_\mu = x_\mu + \delta_\mu$; δ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, d_μ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a^2 \equiv a_\mu a^\mu = b^2 = c^2 = -d^2 = -1, \qquad ab = bc = da = ac = bd = 0, \tag{10}$$

$f(\omega)$ — произвольная дифференцируемая функция,

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-k}(\bar{\chi}\chi)^k \omega^{1-k} + m\omega, & k \neq 1, \\ \lambda(\bar{\chi}\chi)\ln\omega + m\omega, & k = 1 \end{cases}$$

Замечание. Приведенные нами анзацы, вообще говоря, не исчерпывают всех анзацев, при которых нелинейное уравнение Дирака редуцируется к уравнениям с меньшим числом независимых и зависимых переменных [11].

Так, например, анзац вида (получен совместно с Р.З. Ждановым)

$$\Psi(x) = \left[f(u) + i\left(\gamma_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) g(u) \right]\chi, \qquad \chi = \text{const},$$

где $u = u(x)$ — скалярная функция, удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \varepsilon, \qquad \Box u = \frac{N}{u}, \qquad N = -2, -1, 0, \ldots, 3, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{11}$$

редуцирует нелинейное уравнение Дирака (1) к системе ОДУ для скалярных функций f и g:

$$\begin{aligned} &\dot{f} = g\left(\lambda\left(f^2 + \varepsilon g^2\right)^k + m\right), \\ &\dot{g} = -f\left(\lambda\left(f^2 + \varepsilon g^2\right)^k + m\right) - \frac{N}{u}g \qquad \left(\dot{f} \equiv \frac{df}{du},\ \dot{g} = \frac{dg}{du}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Обобщая результат Коллинза [12], выпишем общее решение системы (11)

$$u(x) = \begin{cases} \left[(ay)^2 + (by)^2 + (cy)^2\right]^{1/2}, & \varepsilon = -1, \quad N = -2, \\ \left[(ay)^2 + (by)^2\right]^{1/2}, & \varepsilon = -1, \quad N = -1, \\ ay + F(by + dy), & \varepsilon = -1, \quad N = 0, \\ dy, & \varepsilon = 1, \quad N = 0, \\ \left[(dy)^2 - (ay)^2\right]^{1/2}, & \varepsilon = 1, \quad N = 1, \\ \left[(dy)^2 - (ay)^2 - (by)^2\right]^{1/2}, & \varepsilon = 1, \quad N = 2, \\ \sqrt{y^\nu y_\nu}, & \varepsilon = 1, \quad N = 3, \end{cases}$$

где $y_\nu = x_\nu + \delta_\nu$, δ_ν, a_ν, b_ν, c_ν, d_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (10), F — произвольная дифференцируемая функция.

Решения системы (12) будут опубликованы в другой работе.

3. Неэквивалентные анзацы для векторного поля

Как уже упоминалось, зная анзацы для спинорного поля, можно построить по формуле $A_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ анзацы для векторного поля A_μ.

Таблица 2

№	Инвариантные переменные $\omega=\{\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x)\}$	Анзацы
1	ax, bx, cx	$A_\mu(x)=B_\mu(\omega)$
2	dx, ax, bx	$A_\mu(x)=B_\mu(\omega)$
3	$ax+dx$, bx, cx	$A_\mu(x)=B_\mu(\omega)$
4	$[(ax)^2+(bx)^2]^{1/2}$, dx, cx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+(1-\frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma+a_\mu a_\sigma)+ + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu b_\sigma-b_\sigma a_\mu]B^\sigma(\omega)$
5	$[(dx)^2-(cx)^2]^{1/2}$, ax, bx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+\frac{(dx+cx)^2-1}{2(dx+cx)}(d_\mu c_\sigma-c_\mu d_\sigma)- - \frac{(dx+cx-1)^2}{2(dx+cx)}(c_\mu c_\sigma-d_\mu d_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
6	$dx+cx$, $[(dx)^2-(ax)^2-(bx)^2]^{1/2}$, cx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+\frac{bx}{ax+dx}(d_\mu+a_\mu)b_\sigma-b_\mu(a_\sigma+d_\sigma)+ + \frac{1}{2}(\frac{bx}{ax+dx})^2(b_\mu b_\sigma+(a_\mu+d_\mu)\times \times(a_\sigma+d_\sigma))]B^\sigma(\omega)$
7	$[(dx)^2-(ax)^2]^{1/2}$, $\alpha\ln(dx+ax)+\operatorname{arctg}\frac{bx}{cx}$, $[(bx)^2+(cx)^2]^{1/2}$	$A_\mu(x)=\{g_{\mu\sigma}-\frac{(dx+ax-1)^2}{2(dx+ax)}(a_\mu a_\sigma+d_\mu d_\sigma)+ + \frac{(dx+ax)^2-1}{2(dx+ax)}(d_\mu a_\sigma-d_\sigma a_\mu)+(1-\frac{cx}{\omega_3})\times \times(b_\mu b_\sigma+c_\mu c_\sigma)+\frac{bx}{\omega_3}(c_\mu b_\sigma-b_\mu c_\sigma)\}B^\sigma(\omega)$
8	$dx+ax$, $\varepsilon(dx-ax)+ +\operatorname{arctg}\frac{bx}{cx}$, $[(bx)^2+(cx)^2]^{1/2}$	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+(1-\frac{cx}{\omega_3})(b_\mu b_\sigma+c_\mu c_\sigma)+ + \frac{bx}{\omega_3}(c_\mu b_\sigma-b_\mu c_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
9	$[(ax)^2+(bx)^2]^{1/2}$, $dx+\alpha\operatorname{arctg}\frac{ax}{bx}$, cx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+(1-\frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma+a_\mu a_\sigma)+ + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu a_\sigma-b_\sigma a_\mu)]B^\sigma(\omega)$
10	$[(ax)^2+(bx)^2]^{1/2}$, $cx+\alpha\operatorname{arctg}\frac{ax}{bx}$, dx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+(1-\frac{bx}{\omega_1})(b_\mu b_\sigma+a_\mu a_\sigma)+ + \frac{ax}{\omega_1}(b_\mu a_\sigma-b_\sigma a_\mu)]B^\sigma(\omega)$
11	$[(dx)^2-(ax)^2]^{1/2}$, $bx+\alpha\ln(dx+ax)$, cx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+\frac{(dx+ax)^2-1}{2(dx+ax)}(d_\mu a_\sigma-d_\sigma a_\mu)- - \frac{(dx+ax-1)^2}{2(dx_ax)}(a_\mu a_\sigma+d_\mu d_\sigma)]B^\sigma(\omega)$
12	$dx-ax+(dx+ax)bx+ +\frac{1}{6}(dx+ax)^3$, $bx+\frac{1}{4}(dx+ax)^2$, cx	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+\frac{1}{2}(dx+ax)(b_\mu(a_\sigma+d_\sigma)- -(a_\mu+d_\mu)b_\sigma)+\frac{1}{8}(dx+ax)^2\times \times((a_\mu+d_\mu)(a_\sigma+d_\sigma)+b_\mu b_\sigma]B^\sigma(\omega)$
13	$dx+ax$, $[(dx)^2-(ax)^2-(bx)^2]^{1/2}$, $bx+\varepsilon(dx+ax)cx$	$A_\mu(x)=[g_{\mu\sigma}+\frac{bx}{ax+dx}((a_\mu+d+\mu)b_\sigma- -b_\mu(a_\sigma+b_\sigma))+\frac{1}{2}(\frac{bx}{dx+ax})^2\times \times(b_\mu b_\sigma+(a_\mu+d_\mu)(a_\sigma+d_\sigma))]B^\sigma(\omega)$

Примечание. Здесь $\alpha\neq 0$, $\varepsilon=\pm 1$; a_ν, b_ν, c_ν, d_ν — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям (10).

Ниже с помощью результатов раздела 1 построены $P(1,3)$-неэквивалентные явно ковариантные анзацы для векторного поля. Эти анзацы можно использовать для поиска решений уравнений электродинамики, релятивистской гидродинамики, уравнений Янга–Миллса и многих других. $P(1,3)$-неэквивалентные анзацы для векторного поля приведены в табл. 2.

1. Нелинейная квантовая теория поля, Сб. статей под ред. Д.Д. Иваненко, М., ИЛ, 1959.
2. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, К., Наук. думка, 1983.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., *ДАН СССР*, 1983, **269**, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 271–277.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, 189–191.
6. Фущич В.И., Жданов Р.З., в кн. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, К., Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.

7. Фущич В.И., в кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, К., Ин-т математики АН УССР, 1981, 6.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhous H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
10. Фущич В.И., в кн. Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, К., Ин-т математики АН УССР, 1985, 4–19.
11. Фущич В.И., *Укр. матем. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
12. Collins C.B., *Proc. Cambr. Phyl. Soc.*, 1976, **80**, № 1, 165–173.