О векторных лагранжианах для электромагнитного и спинорного полей

В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ, В.М. СИМУЛИК

Vector Lagrange functions have been constructed and analyzed for the electromagnetic fields $\vec{E}$, $\vec{H}$ in terms of field strengths, for spinor fields Ψ and for system of interacting fields $(\vec{E}, \vec{H})$ and Ψ. The Noether's theorem has been generalized in the case of vector Lagrangians and the conserved quantities has been found for the electromagnetic and spinor fields.

Построены и проанализированы векторные функции Лагранжа для электромагнитного поля в терминах наряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$ спинорного поля Ψ, а также для системы взаимодействующих полей $(\vec{E}, \vec{H})$ и Ψ. Обобщена теорема Нетер на случай векторных лагранжианов, и вычислены сохраняющиеся величины для электромагнитного и спинорного полей.

Введение

Поиск новых симметрии уравнений Максвелла и законов сохранения для электромагнитного поля по-прежнему может приводить к обнаружению неизвестных ранее свойств и закономерностей [1–3], которыми обладают эти замечательные уравнения. В работах [4–9] эта задача решается в рамках лагранжева подхода на основе различных функций Лагранжа для электромагнитного поля в терминах напряженностей с использованием теоремы Нетер [10, 11] и ее обобщения [12, 13] на случай нелиевских (негеометрических) симметрий, многочисленные примеры которых приведены в [1–3].

Известны многие попытки [14–18] построения лагранжева подхода для электромагнитного поля в терминах напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$ электрического и магнитного полей без привлечения потенциалов A^μ в качестве вариационных переменных. Для поля напряженностей $(\vec{E}, \vec{H})$ вариационный принцип сформулирован в [14] в форме Гамильтона. В [15] выписана без какого-либо анализа простейшая функция Лагранжа, дающая часть из уравнений Максвелла. Необходимые уточнения функции Лагранжа, предложенной в [15], и анализ сохраняющихся величин на ее основе выполнены в [4, 5]. Такая функция Лагранжа, однако, оказалась нулевой компонентой 4-вектора группы Пуанкаре. В [7] этот лагранжиан обобщен до 4-вектора и на этой основе построен скалярный лагранжиан, однако, явно зависящий от координаты $x \in R_x$. Скалярные лагранжианы подробно обсуждены в [8, 9].

Анализ преложенных в [6, 16] формулировок L-подхода для уравнений Максвелла в форме Майораны–Оппенгеймера (диракоподобной форме) показывает, что построенным в [6, 16] функциям Лагранжа присущи те же трудности, что и лагранжианам [4, 5, 15] (заметим, что лагранжиан в [16] неоправданно объявлен

Препринт № 87.54, Киев, Институт математики АН УССР, 1987, 39 с.

скаляром). Варианты скалярных функций Лагранжа предложены в [17] с помощью привлечения электрического и магнитного токов в качестве вариационных переменных. Однако уравнения Эйлера–Лагранжа (ЭЛ) для лагранжианов в [17] дают только уравнения Максвелла с токами, тогда как нетеровские токи в [17] сохраняются только для уравнений Максвелла, свободных от электрических и магнитных токов, а такие уравнения не получаются как уравнения ЭЛ для лагранжианов в [17][1].

Использование векторного лагранжиана в качестве альтернативы к скалярному предложено в [18], где, однако, построена только псевдовекторная относительно полной группы Пуанкаре функция Лагранжа, а взаимодействие со спинорным полем, удовлетворяющим уравнению Дирака, ввести не удалось.

Цель настоящей работы — построение и детальный анализ векторных (относительно собственной и полной группы Пуанкаре) функций Лагранжа для свободных и системы взаимодействующих электромагнитного $(\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного Ψ полей, анализ симметрийных свойств этой модели и отыскание сохраняющихся величин на основе обобщения теоремы Нетер на случай векторных лагранжианов.

В разделе 2 анализируются симметрийные свойства уравнений Максвелла для электромагнитного поля в терминах напряженностей и уравнений для потенциалов. Проиллюстрировано наличие у уравнений Максвелла таких симметрий, которыми уравнения для потенциалов, в принципе, обладать не могут. Попутно отмечено, что в пространстве Ψ_0 решений уравнений Максвелла реализуются два различных представления конформной группы $C(1,3)$ — кинематическое и динамическое.

В разделе 3 обращается внимание на то, что не существует скалярной функции Лагранжа (в терминах напряженностей), для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями Максвелла. Поэтому уравнения Максвелла переписаны в эквивалентной форме, а именно, в виде равенства нулю тензора 3-го ранга. Уравнения Максвелла в тензорной форме могут бытъ получены в качестве уравнений ЭЛ, но для векторных функций Лагранжа.

В разделе 4 рассмотрена функция Лагранжа в терминах тензора напряженностей электромагнитного поля, которая является вектором относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре $P(1,3)$. Обобщена теорема Нетер о законах сохранения на случай векторных лагранжианов, найден явный вид сохраняющихся токов, порождаемых произвольным преобразованием инвариантности свободных уравнений Максвелла.

В разделе 5 построена векторная, относительно полной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, функция Лагранжа для поля $(\vec{E}, \vec{H})$. Проанализированы ее преимущества над $P(1,3)$-векторной функцией Лагранжа.

В разделе 6 рассмотрены два варианта векторных уравнений для спинорного поля (эквивалентных уравнению Дирака) и предложен векторный подход для этого поля. Построена векторная функция Лагранжа для системы минимально и локально взаимодействующих электромагнигного $(\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного Ψ полей.

В разделе 7 приведены выводы и коментарии к основным полученным в настоящей работе результатам.

[1]Полагая, например, в функции Лагранжа (2.6) из [17] $j^l = 0$ получаем лагранжиан $\mathcal{L}_1 = -(1/2)F_{\mu\nu,\alpha}F^{\mu\nu,\alpha}$, для которого лагранжева производная по $F^{\rho\sigma}$ дает уравнения $\Box F^{\rho\sigma} = 0$, которые не аквивалеитны свободным уравнениям Максвелла.

2. Симметрийные свойства уравнений для электромагнитного поля в терминах напряженностей и потенциалов

Уравнения Максвелла

$$\partial_0\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{j}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \rho, \qquad \partial_0\vec{H} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \tag{1}$$

для напряженнстей $\vec{E} = (E^i)$, $\vec{H} = (H^i)$ электромагнитного поля (в гауссовой системе единиц, в которой $\varepsilon_0 = \mu_0 = c = 1$) в терминах тензора напряженностей

$$F \equiv (F^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{H}): \quad F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk}H^k, \quad F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu} \tag{2}$$

в обозначениях

$$Q^\mu \equiv F^{\mu\nu}_{\ ,\nu} = \partial_\nu F^{\mu\nu}(x), \quad R^\mu \equiv \varepsilon F^{\mu\nu}_{\ ,\nu}, \quad \varepsilon F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{3}$$

$$j \equiv (j^\mu), \quad j^0 = \rho, \quad \vec{j} = (j^i), \quad \mu = 0,1,2,3 \equiv \overline{0,3}, \quad i = \overline{1,3}, \tag{4}$$

принимают вид

$$Q^\mu - j^\mu = 0, \qquad R^\mu = 0. \tag{5}$$

Системы уравнений (1) и (5) эквивалентны, поскольку $Q = (Q^\mu)$ и $R = (R^\mu)$:

$$Q^0 = \mathrm{div}\,\vec{E}, \qquad Q^i = (-\partial_0\vec{E} + \mathrm{rot}\,\vec{H})^i \equiv -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk}\partial_j H^k, \tag{6}$$

$$R^0 = \mathrm{div}\,\vec{H}, \qquad R^i = (-\partial_0\vec{H} - \mathrm{rot}\,\vec{E})^i \equiv -\partial_0 H^i - \varepsilon^{ijk}\partial_j E^k. \tag{7}$$

Уравнения Максвелла в форме (5) имеют ковариантный вид, а именно, два вектора $\tilde{Q} = (Q^\mu - j^\mu)$, $R = (R^\mu)$ относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре $P(1,3)$ равны нулю. Поэтому естественной и логичной является задача построения релятивистики инвариантного лагранжева подхода (L-подхода) именно в терминах тензора напряженностей F (2) электромагнитного поля, а не в терминах вектора-потенциала $A = (A^\mu)$. Это актуально хотя бы потому, что описание электромагнитного поля в терминах тензора напряженностей F (2) и описание этого поля в терминах вектора-потенциала $A = (A^\mu)$, удовлетворяющего системе уравнений

$$\partial_\mu\partial^\nu A_\nu - \Box A_\mu = j_\mu, \qquad \Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu, \tag{8}$$

— неэквивалентные описания во многих аспектах. Действительно, стандартная замена переменных

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{9}$$

переводит уравнения (5) в уравнения (9); однако для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}^A = -\frac{1}{4}(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu})(A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}) + A_\mu j^\mu, \tag{10}$$

приводящей к уравнениям (8), преобразование $A \to F$ (9) не является преобразованием форм-инвариантности даже для свободного электромагнитного поля, поскольку функция (10) (с $j = 0$) после замены (9), т.е. функция

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4 = \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\right)/2, \tag{11}$$

расматриваемая как функция тензора F (2) (а не комбинаций (9) производных $A_{\mu,\nu}$), приводит к бессодержательным уравнениям ЭЛ:

$$\delta\mathcal{L}/\delta F^{\rho\sigma} = -F_{\rho\sigma}/2 = 0. \tag{12}$$

Далее, с теоретико-групповой точки зрения F и A — это существенно разные объекты: $F = (F^{\mu\nu})$ (2) есть (антисимметричный) тензор 2-го ранга, тогда как $A = (A^\mu)$ есть тензор 1-го ранга относительно группы Лоренца. На языке неприводимых представлений собственной ортохронной группы Лоренца $O(1,3)$ это означает, что поле $A = (A^\mu)$ преобразуется по представлению $D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ группы $O(1,3)$, тогда как поле $F = (F^{\mu\nu})$ (2) преобразуется по представлению $D(1,0)\oplus D(0,1)$ этой группы. Более того, множества $\Psi_0 = \{F\}$ и $\Psi_0' = \{A\}$ решений уравнений (5) и (6) инвариантно относительно существенно различных представлений группы симметрии безмассовых уравнений — конформной группы $C(1,3)\supset P(1,3)$.

В этой связи укажем (см., например, [1, 2, 12]), что через матричные генераторы $S_{\mu\nu}$ группы $O(1,3)$, удовлетворяющие соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}, \tag{13}$$

и через генераторы $C(1,3)$ — преобразований в пространстве-времени

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mathfrak{M}_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \quad d = x^\mu\partial_\mu, \quad K_\mu = 2x_\mu d - x^2\partial_\mu, \tag{14}$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial_\mu, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \tag{15а}$$

$$[\mathfrak{M}_{\mu\nu}, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}\mathfrak{M}_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\mathfrak{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}\mathfrak{M}_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\mathfrak{M}_{\mu\rho}, \tag{15б}$$

$$[\partial_\mu, d] = \partial_\mu, \quad [\partial_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}d - \mathfrak{M}_{\mu\nu}), \quad [\mathfrak{M}_{\mu\nu}, d] = 0, \tag{15в}$$

$$[K_\mu, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}K_\sigma - g_{\mu\sigma}K_\rho, \quad [d, K_\mu] = K_\mu, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \tag{15г}$$

генераторы произвольного представления группы $C(1,3)$ (т.е. в любом множестве Ψ многокомпонентных функций над R_x) выражаются как

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad j_{\mu\nu} = \mathfrak{M}_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}, \quad \hat{d} = d - \tau = x^\mu\partial_\mu - \tau, \tag{16а}$$

$$\hat{K}_\mu = 2x_\mu\hat{d} - x^2\partial_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu = K_\mu - 2S_{\mu\nu}x^\nu - 2\tau x_\mu, \tag{16б}$$

где τ — любая матрица, коммутирующая с $S_{\mu\nu}$ (степенью конформности мы называем матрицу τ).

Принципиальное различие описания электромагнитного поля в терминах тензора F (2) или вектора A с теоретико-групповой точки зрения состоит в том, что множество $\Psi_0 = \{F\}$ решений уравнений Максвелла (5) инвариантно относительно алгебры $AC(1,3)$ (16) со степенью конформности $\tau = -2$ и с матрицами $S_{\mu\nu}$, задаваемыми равенствами

$$(S_{\mu\nu}F)_{\rho\sigma} \equiv S_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}, \tag{17}$$

тогда как множество $\Psi_0' = \{A\}$ решений уравнения (8) инвариантно относительно алгебры $AC(1,3)$ (16) со степенью конформности $\tau = -1$ и с матрицами $S_{\mu\nu}$, задаваемыми равенствами

$$(S_{\mu\nu}A)_\rho \equiv S_{\mu\nu}A_\rho = A_\mu g_{\nu\rho} - A_\nu g_{\mu\rho}. \tag{18}$$

Кстати, утверждение о том, что $F(2)$ преобразуется по представлению $D(1,0) \oplus D(0,1)$ группы $O(1,3)$, а $A = (A^\mu)$ — по представлению $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ этой группы, следует именно из явного вида (17) и (18) генераторов $S_{\mu\nu}$ представлений группы $O(1,3)$ в множествах $\Psi_0 = \{F\}$ и $\Psi_0' = \{A\}$.

Замечание 1. Пусть $A = (A^\mu)$ трактуется как вектор не только относительно группы Пуанкаре $P(1,3) \supset O(1,3)$, но и относительно группы $C(1,3) \supset P(1,3)$, т.е. постулируется, что при $C(1,3)$-преобразованиях

$$x \to x' = \Phi(x,\alpha) \overset{i}{=} \left(1 + a^\mu p_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathfrak{M}_{\mu\nu} + \varkappa d + b^\mu K_\mu\right) x \tag{19}$$

в пространстве-времени R_x набор $A = (A^\mu)$ четырех функций над R_x преобразуется по правилу

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \frac{\partial\Phi^\mu(x,\alpha)}{\partial x^\nu} A^\nu(x)\Big|_{x\to\Phi^{-1}(x',\alpha)} \tag{20}$$

(символ “i” в (19) обозначает “инфинитезимально”, а $\Phi^{-1}(x,\alpha)$ в (20) есть преобразование в R_x, обратное к $\Phi(x,\alpha)$;

$$\alpha \equiv (a,\omega,\varkappa,b), \quad a \equiv (a^\mu), \quad \omega \equiv (\omega^{\mu\nu}), \quad b \equiv (b^\mu), \tag{21}$$

суть вещественные параметры $C(1,3)$-преобразований в R_x). Тогда инфинитезимально преобразование (20) имеет вид

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) \overset{i}{=} \left(1 - a^\xi\partial_\xi - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}j_{\rho\sigma} - \varkappa\hat{d} - b^\rho\hat{K}_\rho\right) A^\mu(x), \tag{22}$$

в котором генераторы задаются формулами (16) с $S_{\mu\nu}$ (18) со степенью конформности $\tau = 1$. Но оператор (16б) с $S_{\mu\nu}$ (18) и $\tau = 1$ не является генератором преобразований инвариантности уравнений (8) (с $j = 0$) для $A = (A^\mu)$ (он является генератором преобразований инвариантности уравнений (8) лишь при $\tau = -1$). Аналогично этому, если $F = (F^{\mu\nu})$ трактовать как (антисимметричный) тензор группы $C(1,3)$, т.е. постулировать, что при $C(1,3)$-преобразованиях (19) тензор F (2) преобразуется по закону

$$F^{\mu\nu}(x) \to F'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial\Phi^\mu(x,\alpha)}{\partial x^\rho}\frac{\partial\Phi^\nu(x,\alpha)}{\partial x^\sigma} F^{\rho\sigma}\Big|_{x=\Phi^{-1}(x',\alpha)}, \tag{23}$$

то для (23) инфинитезимально получаем формулу

$$F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu}(x) \overset{i}{=} \left(1 - a^\rho\partial_\rho - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}j_{\rho\sigma} - \varkappa\hat{d} - b^\rho\hat{K}_\rho\right) F^{\mu\nu}(x), \tag{24}$$

в которой генераторы задаются формулами (16) с $S_{\mu\nu}$ (17) и со степенью конформности $\tau = 2$. Но оператор (16б) с $S_{\mu\nu}$ (17) и $\tau = 2$ не является генератором преобразований инвариантности уравнений Максвелла (5) (с $j = 0$) для $F(2)$ (он является генератором преобразований инвариантности уравнений (5) лишь при $\tau = -2$).

В этой связи преобразование (23) следует интерпретировать как кинематическое $C(1,3)$-преобразование в том смысле, что оно задает правило пересчета значений тензора $F(2)$ в одной и той же (произвольно фиксированной) точке пространства-времени, но в разных системах отсчета, связанных $C(1,3)$-преобразованием (19), в то время как преобразование (24) с $\tau = -2$ (и порождаемое им конечное $C(1,3)$-преобразование) есть динамическое преобразование, т.е. преобразование инвариантности уравнений Максвелла (5) $j = 0$ в одной и той же (произвольно фиксированной) инерциальной системе отсчета. Аналогично трактуется преобразование (20) (инфинитезимально — преобразование (22) с $\tau = 1$) и преобразование (22) с $\tau = -1$. Для подгруппы $P(1,3) \subset C(1,3)$ кинематические и динамические преобразования (20) или (23) как не зависящие от τ, совпадают.

Замечание 2. Стандартная квантовая электродинамика формулируется в терминах потенциалов, на которые налагается также дополнительное условие (калибровка) в той или иной ковариантной форме, например условие Лоренца, т.е. вектор $A = (A^\mu)$ считается удовлетворяющим не системе уравнений (8), а системе

$$\Box A_\mu = j_\mu, \qquad \partial A \equiv \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{25}$$

Однако система (25) $j = 0$, в отличие от системы (8) с $j = 0$, вообще $C(1,3)$-неинвариантна, хотя условие Лоренца $\partial A = 0$ инвариантно относительно преобразований (22) с $\tau = -3$, но уравнение Даламбера $\Box A = 0$, вообще говоря, не инвариантно относительно преобразований (22) ни при каком τ (более точно: оператор (16б) не является генератором преобразований инвариантности уравнения $\Box A = 0$ ни при каком τ)[2]. Кроме того, уравнения (8) или (25) для потенциалов но позволяют описать давно установленую [19–21] симметрию свободного поля, задаваемую преобразованием дуальности (названным в [2] преобразованием Хевисайда–Ламора–Райнича) и как следсвие — установленную и [4, 5] 32-мерную алгебру инвариантности и соответствующую ей группу. В этом смысле можно говорить о потере симметрийных свойств при переходе от описания електромагнитного поля в терминах тензора $F(2)$ к описанию этого поля в терминах потенциала $A = (A^\mu)$.

3. Тензорная форма уравнений Максвелла

Общепринято требовать, чтобы функция Лагранжа для того или иного поля (или системы полей) была скаляром (псевдоскаляром) относительно группы Лоренца (или более широкой группы преобразований). И формулировка квантовой электродинамики именно в терминах потенциалов связана, видимо, с тем, что в терминах тензора напряженностей $F(2)$ не существует скалярной функции Лагранжа, для которой уравнения Эйлера–Лагранжа (ЭЛ) совпадали бы непосредственно с уравнениями Максвелла (5). Справедливость зтого утверждения очевидна уже из того, что лагранжева производная от скаляра по тензору 2-го ранга есть тензор 2-го ранга, тогда как уравнения (5) имеют вид равенства нулю двух векторов $\tilde{Q} = (Q^\mu - j^\mu)$ и $R = (R^\mu)$ (3). Поэтому при построении

[2]Интересно отметить, что не существует $C(1,3)$-инвариантного подмножества решений системы уравнений (25). Действительно, равенство $\Box \hat{K}_\rho A_\mu = 0$ выполняется вместе с $\Box A_\mu = 0$ только при условиях $\partial A = 0$ и $2\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$, а последнее эквивалентно условию $A(x) = \text{const}$.

L-подхода для электромагнитного поля напряженностей $F(2)$ естественно отказаться от стандартного требования (псевдо)скалярности функции Лагранжа и рассмотреть возможность построения L-подхода, использующего в качестве функции Лагранжа нескалярные ковarианты. Ковариантом минимальной размерности, для которого уравнения ЭЛ эквивалентны уравнениям Максвелла (5), оказывается (см. раздел 4) вектор $\mathcal{L}_\mu$ относительно собственной ортохронной группы Пуанкаре $P(1,3)$ (псевдовектор относительно полной группы Пуанкаре $P(1,3)$, включающей отражения); при использовании переменной $\bar{F}$, дуально сопряженной к $F(2)$, в качестве независимой лагранжевой переменной таким ковариантом оказывается (см. раздел 5) вектор $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ относительно полной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, и эта возможность является предпочтительной (в дальнейшем краткими терминами P-ковариант или $\tilde{P}$-ковариант будем при необходимости различать ковarианты относительно групп $P(1,3)$ или $\tilde{P}(1,3)$).

Лагранжева производная от вектора $\mathcal{L}_\mu$ по тензору 2-го ранга $F(2)$ есть тензор 3-го ранга. Поэтому для построения L-подхода, основанного на концепции векторной функции Лагранжа, необходимо пореписать уравнения Максвелла в виде равенства нулю тензора 3-го ранга.

Теорема 1. *При любых $ab \neq 0 \neq a'b'$ система уравнений*

$$T_{\mu\rho\sigma} \equiv a[g_{\mu\rho}(Q_\sigma - j_\sigma) - g_{\mu\sigma}(Q_\rho - j_\rho)] + b\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^\nu = 0, \quad \mu,\nu,\rho,\sigma = \overline{0,3}, \tag{26}$$

а также система уравнений

$$T'_{\mu\rho\sigma} \equiv a'(g_{\mu\rho}R_\sigma - g_{\mu\sigma}R_\rho) + b'\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(Q^\nu - j^\nu) = 0, \tag{27}$$

эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (5).

Доказательство. Если расписать тензора $T_{\mu\rho\sigma}$ и $T'_{\mu\rho\sigma}$ по компонентам, то легко убедиться, что из всех уравнений (26) или (27) независимы только 8 уравнений, причем уравнения $T_{0\rho\sigma} = 0$ (или $T'_{0\rho\sigma} = 0$) дают лишь первое и третье уравнения в системе (1), а уравнения $T_{i\rho\sigma} = 0$ (или $T'_{i\rho\sigma} = 0$) содержат всю систему уравнений (1) (т.е. все уравнения (5)).

Система уравнений (26) имеет вид равенства нулю тензора 3-го ранга относительно группы $\tilde{P}(1,3)$, тогда как система уравнений (27) имеет вид равенства нулю псевдотензора 3-го ранга этой группы. В этом смысле система (26) имеет преимущество над системой (27). При необходимости подчеркнуть указанное различие систем (26) и (27), систему (26) кратко называем $\tilde{P}$-системой, а систему (27) — $\tilde{P}$–псевдосистемой.

4. P-векторная функция Лагранжа

Наиболее общий вид P-векторной функции Лагранжа $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^\mu)$, которая может быть построена из тензоров $F(2)$, Q, R, $\mathcal{E}(3)$ и $j(4)$ и для которой уравнения ЭЛ могут привести к уравнениям первого порядка для $F(2)$, с точностью до 4-дивергентных слагаемых таков:

$$\mathcal{L}_\mu = F_{\mu\alpha}(a_1 Q^\alpha + a_2 R^\alpha + q_1 j^\alpha) + \varepsilon F_{\mu\alpha}(a_3 Q^\alpha + a_4 R^\alpha + q_2 j^\alpha). \tag{28}$$

Производные Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial F^{\rho\sigma}} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}}, \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{29}$$

от функций (28) имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}}=(a_1-a_4)(g_{\mu\rho}Q_\sigma-g_{\mu\sigma}Q_\rho-F_{\mu\rho,\sigma}-F_{\sigma\mu,\rho})+\\&\quad+a_2[2(g_{\mu\rho}R_\sigma-g_{\mu\sigma}R_\rho)+\varepsilon F_{\rho\sigma,\mu}]-a_3[2(\varepsilon F_{\mu\rho,\sigma}+\varepsilon F_{\sigma\mu,\rho}+\varepsilon F_{\rho\sigma,\mu}]-\\&\quad-q_1(g_{\mu\rho}j_\sigma-g_{\mu\sigma}j_\rho)-q_2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}j^\nu.\end{aligned}\tag{30}$$

Из сравнения (30) с (26) и (27) с учетом тождества

$$-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Q^\nu=\varepsilon F_{\mu\rho,\sigma}+\varepsilon F_{\rho\sigma,\mu}+\varepsilon F_{\sigma\mu,\rho}\tag{31}$$

видно, что лагранжева производная (30) может совпадать только с тензором $T'_{\mu\rho\sigma}$ в (27) и требование такого совпадения с необходимостью приводит к следующим условиям на коэффициенты в T' (27) и $\mathcal{L}^\mu$ (28):

$$a'=-b'=2a_2=-2a_3=-q_2,\qquad a_1-a_4=q_1=0.\tag{32}$$

При этих условиях функция Лагранжа (28) принимает вид

$$\mathcal{L}^\mu=\mathcal{L}^\mu(F,F_{,\nu})\equiv a_1(F^{\mu\nu}Q_\nu+\varepsilon F^{\mu\nu}R_\nu)+a_2[F^{\mu\nu}R_\nu-\varepsilon F^{\mu\nu}(Q_\nu-j_\nu)],\tag{33}$$

а ее уравнения ЭЛ —

$$\frac{\delta\mathfrak{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}}=T'_{\mu\rho\sigma}\equiv 2a_2[g_{\mu\rho}R_\sigma-g_{\mu\sigma}R_\rho-\varepsilon_{\mu\rho\sigma\nu}(Q^\nu-j^\nu)]=0.\tag{34}$$

Воспользовавшись обозначениями (3) и тождеством

$$\varepsilon F^{\mu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\beta}^{\ \ ,\beta}=\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta,\mu}-F_{\alpha\beta}F^{\mu\beta,\alpha},\tag{35}$$

распишем функцию (33) в более наглядном виде

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^\mu=\mathcal{L}^\mu(F^{\alpha\beta},F^{\alpha\beta}_{,\nu})\equiv a_1\left(F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^{\ \ ,\beta}+\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta,\mu}-F_{\alpha\beta}F^{\mu\beta,\alpha}\right)+\\&\quad+a_2(F^{\mu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\beta}^{\ \ ,\beta}-\varepsilon F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}^{\ \ ,\beta}+\varepsilon F^{\mu\alpha}j_\alpha).\end{aligned}\tag{36}$$

Приведенное рассмотрение убеждает, что в L-подходе, базирующемся на концепции векторной функции Лагранжа (в векторном L-подходе), используются четыре функции $\mathcal{L}^\mu:R^{30}\to R^1$ (33), порождающие четыре действия $W^\mu:\Psi\to R^1$, задаваемые формулами

$$W^\mu(F)\equiv\int d^4x\,\mathcal{L}^\mu(F(x),\partial_\nu F(x)),\qquad F\in\Psi,\quad \mu=\overline{0,3}\tag{37}$$

(в качестве области Ψ определения действия (37) без ограничения общности рассмотрения можно выбрать, например, множество шестерок $F(2)$ дважды непрерывно-диффереацируемых функций $F^{\mu\nu}$ над R_x). Следовательно, принцип наименьшего действия в векторном L-подходе формулируется иначе, чем в L-подходе, базирующемся на скалярной функции Лагранжа. А именно, в применении к электромагнитному полю $F(2)$ принцип наименьшего действия в векторном L-подходе переформулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пересечение $\Psi = \cap\Psi_0^\mu$ множеств Ψ_0^μ экстремалей четырех действий (37), задаваемых P-векторной функцией Лагранжа (33), совпадает с множеством решений уравнений Максвелла (1).*

Доказательство. Справедливость этой теоремы следует из вычисленного выше явного вида (34) уравнений ЭЛ для (33) и из теорамы 1 эквивалентности системы T'-уравнений (27) уравнениям Максвелла (5), т.е. (1). Теорема доказана.

Итак, принцип наименьшего действия, сформулированный в форме теоремы 2 на основе P-векторной функции Лагранжа $\mathcal{L}^\mu$ (33) в терминах тензора напряженностей F (2) и тензора скоростей $F_{,\mu}$ как вариационных переменных, может дать только одну из двух систем (26), (27), эквивалентных исходной системе уравнений Максвелла (5), а именно, $\tilde{P}$-псевдосистему (27). Причем этот принцип устраняет произвол в константах a', b' в системе (27), после чего без ограничения общности можно положить $a' = -b' = 1$. Из доказательства теоремы 2 видно, что справедливо также утверждение.

Следствие. *Из тензоров $F^{\mu\nu}(2)$, $F^{\mu\nu}_{,\alpha}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ нельзя построить P-векторной функции Лагранжа, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с $\tilde{P}$-системой (26).*

Рассмотрим теперь вопрос о том, как вычисляются законы сохранения в векторном L-подходе.

Теорема 3. *Пусть*

$$\hat{q}:\ F(x) \to F'(x) = \hat{q}F(x) \tag{38}$$

— произвольное преобразование инвариантности уравнений Максвелла (5) с $j = 0$. Тогда тензор тока $\tilde{\Theta}^\mu_\nu$, построенный на основе $\mathcal{L}^\mu$ (31) по формуле

$$\hat{q} \to \tilde{\Theta}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}}\hat{q}F^{\rho\sigma}, \tag{39}$$

симметричен и его дивергенция исчезает для любого решения уравнений (5) с $j = 0$:

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \tilde{\Theta}^{\mu\nu}, \qquad \partial_\mu\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \partial_\nu\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0. \tag{40}$$

Доказательство. Для функции Лагранжа $\mathcal{L}^\mu$ (33) находим

$$\frac{\partial\mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}} = g^{\mu\alpha}(a_1F_{\alpha\beta} + a_2\varepsilon F_{\alpha\beta})\Delta^{\beta\nu}_{\rho\sigma} + (a_2F^{\mu\alpha} + a_1\varepsilon F^{\mu\alpha})\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}g^{\beta\nu}, \tag{41}$$

где

$$\Delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \equiv \delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho. \tag{42}$$

С учетом тождеств

$$\Delta^{\beta\nu}_{\rho\sigma}F'^{\rho\sigma} = 2F'^{\beta\nu}, \qquad \varepsilon F^{\mu\alpha}\varepsilon F'_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}F'^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\delta^\mu_\beta F^{\rho\sigma}F'_{\rho\sigma} \tag{43}$$

для тока (39) получаем формулу

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = a_1\Theta^{\mu\nu} + a_2\Theta'^{\mu\nu}, \tag{44}$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}(F_{\alpha\beta}F'^{\beta\nu} + F'_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}, \tag{45}$$

$$\Theta'^{\mu\nu} = (F_{\alpha\beta}\varepsilon F'^{\beta\mu} - \varepsilon F_{\alpha\beta}F'^{\beta\mu})g^{\alpha\nu}. \tag{46}$$

С учетом тождества

$$-\varepsilon F_{\alpha\beta}F'^{\beta\mu} = F^{\mu\beta}\varepsilon F'_{\beta\alpha} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\rho\sigma}\varepsilon F'_{\rho\sigma} \tag{47}$$

для (46) получаем также представление

$$\Theta'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(F_{\alpha\beta}\varepsilon F'^{\beta\nu} + \varepsilon F'_{\alpha\beta}F^{\beta\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}\varepsilon F'_{\alpha\beta}. \tag{48}$$

Отсюда видно, что

$$\Theta'^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}(\hat{q} \to \varepsilon\hat{q}), \qquad \Theta^{\mu\nu} = \Theta'^{\mu\nu}(\hat{q} \to -\varepsilon\hat{q}). \tag{49}$$

Из представлений (45), (48) наглядно видна симметричность тензоров Θ, Θ', а вследствие (44) — симметричность тензора $\tilde{\Theta}$ (39). Воспользовавшись антисимметричностью тензоров $F^{\mu\nu}$ и $F'^{\mu\nu}$ и уравнениями Максвелла (5) с $j = 0$, непосредственно убеждаемся, что $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu\Theta'^{\mu\nu} = 0$; это завершает доказательство равенств (40).

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение теоремы Нетер [10, 11] о законах сохранения на случай векторных лагранжианов, поскольку утверждение этой теоремы (формулы (39), (40)) оказывается справедливым для произвольного уравнения, допускающего векторную функцию Лагранжа такую, что $\mathcal{L}^\mu = 0$ на множестве Ψ_0 решений этого уравнения. Такое обобщение оказалось возможным, поскольку условия стандартной теоремы Нетер [10, 11] (детальную формулировку этих условий см. в [12, 13]) являются на самом деле только достаточными, но не необходимыми, как отмечено в [12, 13]. Проиллюстрируем здесь это утверждение на конкретном примере.

Часть преобразований инвариантности уравнений Максвелла являются одновременно преобразованиями инвариантности множеств экстремалей (т.е. уравнений ЭЛ) каждой из четырех функций Лагранжа $\mathcal{L}^\mu$ (33) в отдельности. Для таких преобразований инвариантности ЗС следуют из стандартной теоремы Нетер [10, 11]. Например, оператор ∂_ρ пространственно-временных трансляций является генератором преобразования инвариантности уравнений ЭЛ для каждой из четырех функций $\mathcal{L}^\mu$ (33).

Имеется, однако, множество преобразований инвариантности уравнений Максвелла (5), которые не являются преобразованиями инвариантности уравнений ЭЛ для некоторых из лагранжианов $\mathcal{L}^\mu$ (33), но, тем не менее, как следует из теоремы 2, ток $\Theta^{\mu\nu}$, вычисленный по формуле (39), сохраняется. Примером такого преобразования является содержащееся в группе Пуанкаре преобразование пространственно временных, т.е. чисто лоренцевых вращений, порождаемое генератором $\hat{j}_{0k}$, выписанным ниже. Действительно, для нулевой компоненты $\mathcal{L}^0$ вектора $\mathcal{L}^\mu$ (33) (с $j = 0$) уравнения ЭЛ получаются в виде только части уравнений Максвелла:

$$Q_k = R_k = 0 \iff \partial_0\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{H}, \quad \partial_0\vec{H} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}. \tag{50}$$

А эти уравнения сами по себе (т.е. без привлечения остальных уравнений в (1)) не инвариантны относительно чисто лоренцевых вращений.

Приведем здесь доказательство этого утверждения, используя следующую форму уравнений Максвелла (1) (см. [2]):

$$\hat{L}_1\varphi = 0, \qquad \hat{L}_2\varphi = 0, \tag{51}$$

где

$$\hat{L}_1 \equiv \begin{pmatrix} \partial_0 & -\vec{S}\vec{\partial} \\ \vec{S}\vec{\partial} & \partial_0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{L}_2 \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{div} & 0 \\ 0 & \mathrm{div} \end{pmatrix}, \qquad \varphi \equiv \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Так что в (52) оператор $\vec{S}\vec{\partial} \equiv \mathrm{rot}$, а обозначение div в (52) есть следующая 3×3-матрица:

$$\mathrm{div} \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

В этих обозначениях генератор $\hat{j}_{0k}$ чисто лоренцевых вращений имеет вид

$$\hat{j}_{0k} = x_0\partial_k - x_k\partial_0 - S_{0k}, \tag{55}$$

где

$$S_{0k} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -S_k \\ S_k & 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Непосредтсвенным вычислением коммутаторов легко убедиться, что

$$[\hat{L}_1, \hat{j}_{0k}]\varphi = \hat{L}_1\varphi + \hat{L}_2\varphi. \tag{57}$$

Отсюда видно, что уравнения ЭЛ (50) для функции $\mathcal{L}^0$ в (33), которые в терминах φ (52) имеют вид $\hat{L}_1\varphi = 0$, действительно не инвариантны относительно преобразований, порождаемых генератором j_{0k} (55). Тем не менее, как утверждает теорема 3, ток (39) $\tilde{\Theta}^{\mu\nu}(\hat{q} = j_{0k}) \equiv \tilde{\Theta}^{\mu\nu}_{0k}$, соответствующий генератору $\hat{J}_{0k}$ (55), сохраняется, $\partial_\mu\tilde{\Theta}^{\mu\nu}_{0k} = 0$.

Сделаем ряд замечаний о сохраняющихся токах (39), окончательно имеющих вид

$$\hat{q} \to \tilde{\Theta}^{\mu\nu}(\hat{q}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}^\mu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\nu}}\hat{q}\hat{F}^{\rho\sigma} = (a_1\Theta + a_2\Theta')^{\mu\nu} \equiv a_1\Theta^{\mu\nu}(\hat{q}) + a_1\Theta^{\mu\nu}(\varepsilon\hat{q}), \tag{58}$$

где токи Θ и Θ' даны формулами (45) и (48) соответственно.

В формуле (58) токи Θ и Θ' при a_1 и a_2 сохраняются в отдельности, и вследствие (49) совокупность всех независимых ЗС, порождаемая некоторым множеством $\{\hat{q}\}$ преобразований инвариантности свободных уравнений Максвелла по формуле (58), совпадает с совокупностью всех независимых ЗС, порождаемой удвоенным набором преобразований инвариантности $\{\hat{q}, \varepsilon\hat{q}\}$ по формуле (45) или (48). Таким образом, с точки зрения анализа независимых ЗС формула (58) содержит излишнюю информацию. Можно, конечно, положить $a_1 = 0$ в $\mathcal{L}^\mu$ (33) и, следовательно, в (58), и, как видно из (34), это не повлияет на уравнения ЭЛ для $\mathcal{L}^\mu$ (именно такая "укороченная" функция Лагралжа предложена в [18]). Однако сопоставление "оператор симметрии — закон сохранения" по формуле (58) с $a_1 = 0$, т.е. по формуле (48), являются неестественным, если иметь в виду группу Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$. Действительно, $\tilde{P}$-тензорному генератору $\hat{q}$ формула (48) ставит в соответствие $\tilde{P}$-псевдотензорный ток $\Theta'^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}(\varepsilon\hat{q})$ и наоборот. Например, для вектора ∂_ρ трансляций формула (48) дает $\tilde{P}$-псевдотензор Липкина (Zilch) [22]:

$$\partial_\rho \to \Theta'^{\mu\nu}(\hat{q} = \partial_\rho) = Z^{\mu\nu}_\rho \equiv (-F^{\mu\nu}\varepsilon F_{\alpha\beta,\rho} + \varepsilon F^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta,\rho})g^{\beta\nu}. \tag{59}$$

Результат (59) — следствие того, что функция Лагранжа $\mathcal{L}^\mu$ (33) с $a_1 = 0$ есть $\tilde{P}$-псевдотензор. Естественное соответствие "$\tilde{P}$-ковариант $\hat{q}$ — $\tilde{P}$-ковариант Θ" можно получить по формуле (58), если положить $a_2 = 0$. Функция $\mathcal{L}^\mu$ (33) с $a_2 = 0$ является $\tilde{P}$-вектором, но она не дает уравнений Максвелла или им эквивалентных. А соответствие (58) при $a_1a_2 \neq 0$ вообще не $\tilde{P}$-ковариантно, поскольку функция $\mathcal{L}^\mu$ (33) с $a_1a_2 \neq 0$ не является $\tilde{P}$-ковариантом. Требование же $\tilde{P}$-векторности функции Лагранжа $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$ (эквивалентное требованию $a_2 = 0$ в (33)) превращает в тождества ее уравнения ЭЛ.

Детальный анализ сохраняющихся токов (45), (48) или (58) для генераторов $\hat{q}$ различных конкретных алгебр приводится в следующем разделе. Здесь укажем на другие недостатки P-векторной функции Лагранжа $\mathcal{L}^\mu$ (33). Эта функция неоправданно выделяет одну из двух полностью эквивалентных и релятивистски ковариантных систем (26), (27): как видно из теоремы 2 и ее следствия, P-векторная функция Лагранжа $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$ может привести лишь к $\tilde{P}$-псевдосистеме (27), причем только $\tilde{P}$-псевдовекторное слагаемое в $\mathcal{L}^\mu$ (33) вносит вклад в уравнения ЭЛ, тогда как в выражение (58) для ЗС вносит вклад и $\tilde{P}$-векторное слагаемое в (31). И, как ясно из доказательства теоремы 2, вообще не существует $\tilde{P}$-векторной функции $\mathcal{L}^\mu = \mathcal{L}^\mu(F, F_{,\nu})$, которая могла бы привести к уравнениям Максвелла или им эквивалентным. Наконец, как видно из (33), лагранжиан взаимодействия в этой модели является $\tilde{P}$-псевдовектором:

$$\mathcal{L}^{I\mu} = a_2\varepsilon F^{\mu\nu}j_\nu, \qquad \mathcal{L}^{I0} = a_2\vec{j}\cdot\vec{H}, \qquad \mathcal{L}^{Ii} = a_2(\vec{j}\times\vec{E} - \rho\vec{H})^i. \tag{60}$$

Физическая неудовлетворительность такого взаимодействия ясна уже из того, что плотность электрического заряда $\rho = j^0$ в (60) оказывается здесь связанной не с напряженностью электрического поля $\vec{E}$, а с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$.

5. $\tilde{P}$-векторная функция Лагранжа

Оказывается возможным устранить все указанные выше недостатки векторного L-подхода и построить L-подход на базе $\tilde{P}$-векторной функции Лагранжа в терминах напряженностей, если помимо лагранжевых переменных F, $F_{,\mu}$, ввести в качестве независимых лагранжевых переменных дуально сопряженные к ним переменные $\bar{F}$, $\bar{F}_{,\mu}$. Общий вид $\tilde{P}$-векторной функции Лагранжа

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu(F, F_{,\nu}, \bar{F}, \bar{F}_{,\nu}), \qquad \mathcal{L}_\mu :\ R^{60} \to R^1,$$

с точностью до 4-дивергентных слагаемых таков:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mu = a_1 F_{\mu\nu} Q^\nu + a_2 F_{\mu\nu}\bar{R}^\nu + a_3 \varepsilon F_{\mu\nu} R^\nu + a_4 \varepsilon F_{\mu\nu}\bar{Q}^\nu + a_5 \bar{F}_{\mu\nu}\bar{Q}^\nu + \\ + a_6 \bar{F}_{\mu\nu} R^\nu + a_7 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu}\bar{R}^\nu + a_8 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu} Q^\nu + (q_1 F_{\mu\nu} + q_2 \varepsilon \bar{F}_{\mu\nu}) j^\nu.\end{aligned} \tag{61}$$

Здесь, помимо обозначений (3), использованы также обозначения

$$\bar{Q}^\mu \equiv \bar{F}^{\mu\nu}_{,\nu}, \qquad \bar{R}^\mu \equiv \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu}_{,\nu}, \qquad \varepsilon \bar{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{F}^{\rho\sigma}. \tag{62}$$

Лагранжевы производные от функции (61) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = (a_1 - a_2 - a_3 - a_6)(g_{\mu\rho} Q_\sigma - g_{\mu\sigma} Q_\rho) + (a_4 - a_6) F_{\rho\sigma,\mu} + \\ + (-a_1 + a_3 + a_4 + a_8)(F_{\mu\rho,\sigma} + F_{\sigma\mu,\rho}) + q_1 (g_{\mu\rho} j_\sigma - g_{\mu\sigma} j_\rho),\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \bar{F}^{\rho\sigma}} = (a_2 + a_5 + a_6 - a_7)(g_{\mu\rho} R_\sigma - g_{\mu\sigma} R_\rho) + (a_2 - a_8)\varepsilon F_{\rho\sigma,\mu} - \\ - (a_4 + a_5 - a_7 + a_8)(\varepsilon F_{\mu\rho,\sigma} + \varepsilon F_{\sigma\mu,\rho}) + q_2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\nu,\end{aligned} \tag{64}$$

Из сравнения (63) и (64) с (26) и (27) с учетом тождеств (31) и

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} R^\sigma = F_{(\mu\nu,\rho)} \equiv F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} \tag{65}$$

видно, что уравнения ЭЛ для $\mathcal{L}_\mu$ (61) дают обе системы уравнений (26) и (27) при следующих условиях на коэффициенты:

$$\begin{aligned} & a_1 - a_2 - a_3 - a_6 = -q_1 = a \neq 0, \quad a_4 - a_6 = -a_1 + a_3 + a_4 + a_8 = b \neq 0, \\ & a_2 + a_5 + a_6 - a_7 = a' \neq 0, \quad -a_2 + a_8 = a_4 + a_5 - a_7 + a_8 = -q_2 = b' \neq 0,\end{aligned} \tag{66}$$

которые эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} & a_8 - a_2 = a = -b' = -q_1 \equiv q \neq 0, \qquad a_6 - a_4 = a' = -b \neq 0, \\ & a_1 - a_3 - a_6 - a_8 = a_2 + a_4 + a_5 - a_7 = 0.\end{aligned} \tag{67}$$

Таким образом, здесь доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пересечение* $\Psi_0 = \bigcap\limits_\mu \Psi_0^\mu$ *множеств* Ψ_0^μ *экстремалей четырех действий*

$$\begin{aligned} & W^\mu(F, \bar{F}) = \int d^3x\, \mathcal{L}^\mu(F(x), \bar{F}(x), \partial_\nu F(x), \partial_\nu \bar{F}(x)), \\ & F, \bar{F} \in \Psi, \quad \mu = \overline{0,3},\end{aligned} \tag{68}$$

задаваемых функцией Лагранжа $\mathcal{L}_\mu$ *(61), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (67), совпадает с множеством решений уравнений Максвелла (1).*

Интересно отметить, что, в отличие от функции Лагранжа $\mathcal{L}_\mu$ (33), $\tilde{P}$-векторная функция Лагранжа $\mathcal{L}_\mu$ (61), построение которой стало возможным лишь благодаря привлечению дуально сопряженной переменной $\bar{F}$ в качестве независимой лагранжевой переменной, не выделяет какую-либо из эквивалентных систем (26), (27), в том числе и при наличии взаимодействия с током:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta F^{\rho\sigma}} = T_{\mu\rho\sigma} = 0, \qquad \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta \bar{F}^{\rho\sigma}} = T'_{\mu\rho\sigma} = 0. \tag{69}$$

Кроме того, как видно из (26), (27) и (69), сформулированный теоремой 4 принцип наименьшего действия, основанный на $\mathcal{L}_\mu$ (61), не требует никаких ограничений на отношения a/b или a'/b, и это естественно, поскольку каждая из систем уравнений ЭЛ (69) эквивалентна системе уравнений Максвелла (1) при любых значениях отношений $a/b \neq 0$, $a'/b \neq 0$.

Формула для токов Θ^μ_ν, соответствующих генераторам $\hat{q}$, при наличии переменной $\bar{F}$ приобретает вид

$$\hat{q} \to \Theta^\mu_\nu \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\mu}} F'^{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}^{\rho\sigma}_{,\mu}} \bar{F}'^{\rho\sigma}\right), \tag{70}$$

где $F' \equiv \hat{q}F$, $\bar{F}' \equiv \overline{\hat{q}F} = \varepsilon\hat{q}F$. Для $\mathcal{L}_\mu$ (61) получаем (при $j = 0$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial F^{\rho\sigma}_{,\mu}} = (a_1 - a_8)F_{\nu\alpha}\Delta^{\alpha\mu}_{\rho\sigma} + (a_3 + a_6)\varepsilon F_{\nu\alpha}\mathcal{E}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma}, \tag{71а}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\nu}{\partial \bar{F}^{\rho\sigma}_{,\mu}} = (a_2 - a_7)F_{\nu\alpha}\mathcal{E}^{\alpha\mu}_{\rho\sigma} + (a_4 + a_5)\varepsilon F_{\nu\alpha}\Delta^{\alpha\mu}_{\rho\sigma}. \tag{71б}$$

Подстановка (71) в (70) дает

$$\Theta^\mu_\nu = (a_1 - a_2 + a_7 - a_8)F_{\nu\alpha}F'^{\alpha\mu} + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6)\varepsilon F_{\nu\alpha}\varepsilon F'^{\alpha\mu}. \tag{72}$$

С учетом предпоследнего равенства в (67) и тождества

$$\varepsilon F_{\nu\alpha}\varepsilon F'^{\alpha\mu} = F^{\mu\alpha}F'_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta} \tag{73}$$

для тока (70) окончательно получаем

$$\hat{q} \to \Theta^\mu_\nu = A(F^{\mu\alpha}F'_{\alpha\nu} + F'^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}), \tag{74}$$

где

$$A \equiv a_1 - a_2 + a_7 - a_8 = a_3 + a_4 + a_5 + a_6. \tag{75}$$

Итак, ток (70) для лагранжиана (61) задается формулой (70), т.е. совпадает со слагаемым при a_1 в формуле (44) для тока, порождаемого лагранжианом (33). Это означает, что $\tilde{P}$-векторный лагранжиан $\mathcal{L}_\mu$ (61), в отличие от P-векторного лагранжиана $\mathcal{L}_\mu$ (33), приводит к правильной тензорной структуре сохраняющихся токов для любых преобразований инвариантности в том смысле, что тензорным (псевдотензорным) генераторам $\hat{q}$ формула (74) ставит в соответствие тензорные (псевдотензорные) сохраняющиеся токи. Заметим, что тензор $\Theta^{\mu\nu}$ (74) симметричен, поэтому его дивергенция исчезает относительно любого из индексов: $\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = \partial_\nu\Theta^{\mu\nu} = 0$.

Функция (61) обладает и тем преимуществом по сравнению с функцией (33), что все ее слагаемые вносят вклад как в уравнения ЭЛ (69), так и в законы сохранения (70).

Приведем анализ сохраняющихся токов (74) для генераторов $\hat{q} = (\partial, \hat{j}, \hat{d}, \hat{K})$ конформной алгебры $C(1,3)$ инвариантности свободных уравнений Максвелла (1) (т.е. с $j = 0$), напомнив, что генераторы $\hat{q} \in C(1,3)$ в терминах тензора напряженностей F (2) имеют вид (16) с $\tau = -2$ и $S_{\mu\nu}$ (17). Положив $A = 1$, находим, что генераторы ∂_ρ по формуле (74) дают тривиальный ток:

$$\partial_\rho \to \Theta^{\mu\nu}(\hat{q} = \partial_\rho) = (\partial_\rho)^{\mu\nu} \equiv \partial_\rho T^{\mu\nu}. \tag{76}$$

Здесь появляется стандартный тензор энергии-импульса для поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$:

$$T^\mu_\nu = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \qquad T^0_\mu = \mathcal{P}_\mu, \tag{77}$$

$$\mathcal{P}_0 \equiv \frac{1}{2} \left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2 \right), \qquad \mathcal{P}_j \equiv (\vec{E} \times \vec{H})_j. \tag{78}$$

Для анализа интегральных сохраняющихся величин

$$\bar{\Theta}^\mu = \int d^3x \; \Theta^{0\mu}(x) = \mathrm{const}, \qquad \Theta^{0\mu}(x) = \Theta^{0\mu}(\hat{q}) \equiv (\hat{q})^{0\mu}, \tag{79}$$

достаточно привести плотности $\Theta^{0\mu}$, опуская слагаемые с пространственными производными, не вносящие вклад в интеграл $\bar{\Theta}^\mu$ (79). Из формулы (74) получаем для плотностей $\Theta^{0\mu}$, соответствующих остальным генераторам алгебры $C(1,3)$:

$$\hat{j}_{\rho\sigma} \to J^{0\mu}_{\rho\sigma} = \delta^\mu_\rho \mathcal{P}_\sigma - \delta^\mu_\sigma \mathcal{P}_\rho, \qquad \hat{d} \to D^{0\mu} = \mathcal{P}^\mu, \tag{80}$$

$$\hat{K}_\rho \to \mathcal{K}^{0\mu}_\rho = 2(\delta^\mu_\rho \mathcal{D} + J_{\rho\sigma} g^{\sigma\mu}), \tag{81}$$

где

$$\mathcal{D} \equiv x^\mu \mathcal{P}_\mu, \qquad J_{\rho\sigma} \equiv x_\rho \mathcal{P}_\sigma - x_\sigma \mathcal{P}_\rho. \tag{82}$$

Как видно, $C(1,3)$-генераторы (16) приводят в соответствии с формулами (74), (79) к сохраняющимся величинам, выраженны через хорошо известную серию основных сохраняющихся величин для электромагнитного поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$, полученную еще Бессель–Хагеном [23] на основе L-подхода для векторного поля $A = (A^\mu)$ потенциалов, а именно следующую серию:

$$\begin{aligned} P_\rho &= \int d^3x \; \mathcal{P}_\rho(x), \qquad J_{\rho\sigma} = \int d^3x \, (x_\rho \mathcal{P}_\sigma(x) - x_\sigma \mathcal{P}_\rho(x)), \\ D &= \int d^3x \; \mathcal{D}(x), \qquad K_\rho = \int d^3x \, (2x_\rho \mathcal{D}(x) - x^2 \mathcal{P}_\rho(x)). \end{aligned} \tag{83}$$

Интересно отметить, что ввиду тождества

$$F^{\mu\nu} \varepsilon F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\alpha F^{\alpha\beta} \varepsilon F_{\alpha\beta} = 0, \tag{84}$$

преобразование дуальности ε дает по формуле (74) тождественный нуль, $\varepsilon \to 0$. Нетривиальные ЗС дают генераторы установленной в [3, 4] алгебры $A_{32} \supset C(1,3)$ инвариантности (свободных) уравнений Максвелла (1), имеющие вид композиции $\hat{q}' = \varepsilon \hat{q}$ $C(1,3)$-генераторов $\hat{q}$ (16) и генератора ε. Интегральные сохраняющиеся величины, вычисленные по формулам (70), (79) для $\varepsilon C(1,3)$-генераторов $\hat{q}' =$

$(\varepsilon\partial, \varepsilon\hat{;}\varepsilon j, \varepsilon\hat{d}, \varepsilon\hat{K})$, выражаются через серию сохраняющихся величин, найденную Линкиным [22] и другими авторами [24–28], не используя лагранжев подход:

$$Z^{\mu}_{\rho} = \int d^3x\ \mathcal{Z}^{\mu}_{\rho}(x), \qquad Z^{\mu}_{\rho\sigma} = \int d^3x\ (x_\rho \mathcal{Z}^{\mu}_{\sigma} - x_\sigma \mathcal{Z}^{\mu}_{\rho}),$$
$$Z^{\mu} = \int d^3x\ x^{\nu} \mathcal{Z}_{\nu}(x), \qquad \overset{c}{Z}{}^{\mu}_{\rho} = \int d^3x\ (2x_\rho x^\sigma \mathcal{Z}_\sigma - x^2 \mathcal{Z}^{\mu}_{\rho}), \tag{85}$$

где плотности $\mathcal{Z}$ сохранящихся величин (85) выражаются через тензор Линкина

$$\mathcal{Z}^{\mu}_{\rho} \equiv Z^{0|\mu}_{\rho}, \qquad Z^{\nu|\mu}_{\rho} = F^{\nu\alpha}\varepsilon F_{\alpha\rho}{}^{;\mu} - \varepsilon F^{\nu\alpha} F_{\alpha\rho}{}^{;\mu}. \tag{86}$$

Сохраняющиеся велиины (85) [22, 26, 27] (см. также [4, 6, 7–9]), тождественно равны нулю для линейно поляризованных волн $F = (\vec{E}, \vec{H})$ и отличны от нуля только для циркулярно поляризованных состояний электромагнитного поля, причем максимум достигается при круговой поляризации поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$. Из-за отмеченного поляризационного характера ЗС (85), которым они существенно отличавтся от ЗС (83), дополнительные к (83) ЗС (85) можно считать второстепенными по сравнению с основными ЗС (83).

6. Векторный L-подход для спинорного поля и взаимодействующих полей

Для введения взаимодействия тензорного электромагнитного поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного поля Ψ прежде всего необходимо переписать стандартное уравнение Дирака в следующей эквивалентной форме [29] (которую назовем уравнением Дирака в векторной форме):

$$\gamma_\mu (i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\Psi(x) \equiv (\hat{p}_\mu - 2i\hat{S}_{\mu\nu} p^\nu - m\gamma_\mu)\Psi(x) = 0, \tag{87}$$

где

$$\hat{p}_\mu \equiv i\partial_\mu, \quad \hat{S}_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - g_{\mu\nu}), \quad \mu = \overline{0,3}, \quad \Psi = (\Psi^\alpha). \tag{88}$$

Разумеется, система 16 уравнений (87) эквивалентна стандартному уравнению Дирака

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \iff (i\gamma_\mu\partial_\mu - m)^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta}(x) = 0 \tag{89}$$

(т.е. системе четырех уравнений для Ψ^α). Более того, уравнение (87) с любым фиксированным $\mu \in \overline{0,4}$ эквивалентно уравнению (89).

С учетом равенств

$$\bar{\gamma}_\mu \equiv \gamma_0\gamma^\dagger_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu, \qquad \bar{S}_{\mu\nu} = \hat{S}_{\mu\nu}, \qquad \bar{p}^\mu = -\hat{p}^\mu, \tag{90}$$

из (87) следует, что уравнение для спинора $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ (сопряженного по Дираку спинора $\bar{\Psi}$) имеет вид

$$\bar{\Psi}(-\overleftarrow{p}_\mu - 2iS_{\mu\nu}\overleftarrow{p}_\nu - m\gamma_\mu) = 0, \qquad \bar{\Psi}\overleftarrow{p}_\mu \equiv i\partial_\mu\bar{\Psi} = i\bar{\Psi}_{,\mu}. \tag{91}$$

Теорема 5. *Не существует функции Лагранжа в терминах независимых лагранжевых переменных Ψ, $\bar{\Psi}$, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями (87), (91).*

Доказательство. Общий вид вектор-функции в переменных Ψ, $\bar\Psi$, $\Psi_{,\mu}$, $\bar\Psi_{,\mu}$, для которой уравнения ЭЛ являются уравнениями 1-го порядки по переменной x, таков:

$$\mathcal{L}_\mu = a_1\bar\Psi\Psi_{,\mu} + a_2\bar\Psi_{,\mu}\Psi + a_3\bar\Psi S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} + a_4\bar\Psi^{,\nu}S_{\mu\nu}\Psi + a_5\bar\Psi\gamma_\mu\Psi. \tag{92}$$

Лагранжевы производные от функции (92) имеют вид

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta\Psi} = (a_2 - a_1)\bar\Psi_{,\mu} + (a_4 - a_3)\bar\Psi^{,\nu}S_{\mu\nu} + a_5\bar\Psi\gamma_\mu, \tag{93}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta\bar\Psi} = (a_1 - a_2)\Psi_{,\mu} + (a_3 - a_4)S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} + a_5\gamma_\mu\Psi. \tag{94}$$

Как видно, требование одновременного выполнания равенств

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Psi} = -i\bar\Psi_{,\mu} + 2\bar\Psi^{,\nu}S_{\mu\nu} - m\bar\Psi\gamma_\mu, \qquad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar\Psi} = i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} - m\gamma_\mu\Psi \tag{95}$$

противоречиво: $a_4 - a_3 = 2 = a_3 - a_4$. Теорема доказана.

Замечание 3. Уравнение (87) с $\mu = 0$ есть хорошо известное уравнение Дирака в форме Шредингера, которое выпишем вместе с эрмитово сопряженным и сопряженным по Дираку уравнением:

$$i\Psi_{,0} = (-i\gamma^0\gamma^k\Psi_{,k} + \gamma^0 m\Psi), \tag{96}$$

$$-i\Psi^\dagger_{,0} = i\Psi^\dagger_{,k}\gamma^0\gamma^k + m\Psi^\dagger, \tag{97}$$

$$-i\bar\Psi_{,0} = -i\bar\Psi_{,k}\gamma^0\gamma^k + m\bar\Psi. \tag{98}$$

Теорема 4 утверждает, в частности, что не существует функции Лагранжа в переменных Ψ, $\bar\Psi$, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнениями (96), (98). В то же время, существует функция Лагранжа в терминах Ψ, $\Psi^\dagger$, для которой уравнения ЭЛ совпадают с уравнениями (96), (97).

Этот пример убеждает, что для построения L-подхода, ассоциированного с уравнением (87) с произвольно фиксированным μ, необходимо использовать сопряжение, отличное от сопряжения по Дираку. Подходящим оказывается следующее сопряжение:

$$\Psi \to \overset{\mu}{\bar\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu = \bar\Psi\gamma^\mu, \qquad (\gamma^0\gamma^\mu)^{-1} = (\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu, \tag{99}$$

которое назовем μ-сопряжением. Учитывай, что

$$\overset{\mu}{\bar\gamma}_\mu \equiv \gamma^0\gamma^\mu\gamma_\mu^\dagger\gamma^0\gamma^\mu = \gamma_\mu, \qquad \overset{\mu}{\bar S}_{\mu\nu} = -\hat S_{\mu\nu}, \qquad \overset{\mu}{\bar p}{}^\nu = -\hat p^\nu, \qquad \mu - ns \tag{100}$$

(символ $\mu - ns$ означает, что в (100) и всюду ниже μ фисировано, по нему суммирование не подразумевается), из (87) находим, что уравнение для μ-сопряженного спинора в (99) имеет вид

$$\overset{\mu}{\bar\Psi}(-\overleftarrow{p}_\mu + 2iS_{\mu\nu}\overleftarrow{p}^\nu - m\gamma_\mu) = 0, \qquad \mu - ns. \tag{101}$$

Важно отметить, что не только при сопряжении по Дираку, но и при μ-сопряжении (99) уравнение (87) переходит в явно ковариантное уравнение.

Общий вид вектор-функции Лагранжа (101) в терминах Ψ, $\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}$, для которой уравнения ЭЛ могут совпадать с уравнениями (87), таков:

$$\mathcal{L}_\mu = a_1\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\Psi_{,\mu} + a_2\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}_{,\mu}\Psi + a_3\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} + a_4\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}^{,\mu}S_{\mu\nu}\Psi + a_5\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\gamma_\mu\Psi, \quad \mu - ns. \tag{102}$$

Для этой функции лагранжевы производные имеют вид

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta\Psi} = (a_2 - a_1)\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}_{,\mu} + (a_4 - a_3)\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}^{,\nu}S_{\mu\nu} + a_5\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\gamma_\mu, \quad \mu - ns, \tag{103}$$

а $\delta\mathcal{L}_\mu/\delta\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}$ совпадает с правой частью (94). Теперь требование одновременного выполнения равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{L}_\mu}{\delta\Psi} = -i\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}_{,\mu} - 2\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}^{,\nu}S_{\mu\nu} - m\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\gamma_\mu,\\
&\frac{\delta\mathcal{L}_\mu}{\delta\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}} = i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} - m\gamma_\mu\Psi, \qquad \mu - ns,
\end{aligned} \tag{104}$$

приводит к условиям

$$a_1 - a_2 = i, \qquad a_3 - a_4 = 2, \qquad a_5 = -m. \tag{105}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Для уравнения (87) векторная функция Лагранжа имеет вид*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mu = \frac{i}{2}&\left(\alpha_1\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\Psi_{,\mu} - \alpha_2\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}_{,\mu}\Psi\right) + \left(\alpha_3\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu} - \alpha_4\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}^{,\nu}S_{\mu\nu}\Psi\right) -\\
&-m\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\gamma_\mu\Psi, \quad \mu - ns,
\end{aligned} \tag{106}$$

где константы α_1, α_2, α_3, α_4 удовлетворяют условиям

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 1. \tag{107}$$

Заметим, что произвол в этих константах влияет на $\mathcal{L}_\mu$ лишь с точностью до 4-дивергенции, поэтому наблюдаемые величины не зависят от этого произвола.

Для любой пары Ψ, Ψ' решений уравнения Дирака (т.е. для любого преобразования инвариантности $\Psi \to \Psi' = \hat{q}\Psi$ уравнения (89) или эквивалентного ему уравнения (87)) сохраняющиеся токи, вычисляемые по функции Лагранжа (106) на основе теоремы 3 (формула (39)), имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tau_\mu^\nu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}_\mu}{\partial\Psi_{,\nu}}\Psi' + \overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}'\frac{\partial\mathcal{L}_\mu}{\partial\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}_{,\nu}} &= \frac{i}{2}\left(\alpha_1\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}\Psi' - \alpha_2\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}'\Psi\right)\delta_\mu^\nu +\\
&+\left(\alpha_3\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}S_{\mu\alpha}\Psi' - \alpha_4\overset{\mu}{\bar{\bar{\Psi}}}{}'S_{\mu\alpha}\Psi\right)g^{\alpha\nu}.
\end{aligned} \tag{108}$$

Токи (108) сохраняются только при условиях

$$\alpha_1 = \alpha_3, \qquad \alpha_2 = \alpha_4, \tag{109}$$

при которых функция Лагранжа (106) выглядит как

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\mu = \frac{\alpha_1}{2}\overset{\mu}{\bar{\Psi}}\left(i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu}\right) - \frac{\alpha_2}{2}\left(i\overset{\mu}{\bar{\Psi}}_{,\mu} + 2\overset{\mu}{\bar{\Psi}}{}^{,\nu}S_{\mu\nu}\right)\Psi - m\overset{\mu}{\bar{\Psi}}\gamma_\mu\Psi, \\ &\mu - ns, \qquad (\alpha_1+\alpha_2)/2 = 1, \end{aligned} \tag{110}$$

а токи (108) приобретают следующую форму:

$$\tau_\mu^\nu = \alpha_1\tau_{1\mu}^\nu - \alpha_2\tau_{2\mu}^\nu, \tag{111}$$

где

$$\tau_{1\mu}^\nu = \overset{\mu}{\bar{\Psi}}\left(\frac{i}{2}\delta_\mu^\nu + S_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}\right)\Psi', \qquad \tau_{2\mu}^\nu = \tau_{1\mu}^\nu\Big|_{\Psi\leftrightarrow\Psi'}. \tag{112}$$

Используя уравнение Дирака в векторной форме (87) и построеную для него векторную функцию Лагранжа (110), легко выписать функцию Лагранжа для системы локально взаимодействующих электромагнитного $F = (\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного Ψ полей. Для этого ток $j = (j^\nu)$ в функции Лагранжа (61) (описывающей поле F, взаимодействующее с электрическим током j) следует понимать как ток спинорного поля и записать его через μ-сопряженные спиноры Ψ, $\overset{\mu}{\bar{\Psi}}$ с данным (произвольно фиксированным) $\mu = \overline{0,3}$:

$$j^\nu \equiv e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi = e\overset{\mu}{\bar{\Psi}}\gamma^\mu g^{\mu\mu}\gamma^\nu\Psi, \qquad \mu - ns. \tag{113}$$

Интересно отметить, что векторная функция Лагранжа для системы взаимодействующих полей F и Ψ, образованная сложением функции (110) и функции (61) с током j^ν (113) при условиях (67), не приводит к уравнению Дирака со взаимодействием с полем F, поскольку в физической области, где $\bar{F} = \varepsilon F$,

$$\frac{\delta\mathcal{L}_\mu^I}{\delta\overset{\mu}{\bar{\Psi}}} \equiv \left(q_1F_{\mu\nu} + q_2\bar{F}_{\mu\nu}\right)\gamma^\mu g^{\mu\mu}e\gamma^\nu\Psi = 0, \quad \mu - ns, \tag{114}$$

из-за содержащегося в (67) условия $q_1 = q_2$. Этот результат есть следствие исходного предположения $q_1q_2 \neq 0$. Можно, однако, с самого начала положить в $\mathcal{L}_\mu$ (61) $q_2 = 0$, в качестве уравнения для электромагнитного поля F с током $j \neq 0$ использовать лишь $\tilde{P}$-тензорное уравнение (26), а $\tilde{P}$-псевдотензорное уравнение (27) считать допустимым лишь при $j = 0$, когда теория дуально инвариантна и когда уравнения (26) при замене $F \to \varepsilon F \ \Rightarrow\ Q \to R$, $R \to -Q$ переходят в уравнения (27) (заметим, что при $j \neq 0$ указанная замена не связывает уравнения (26) и (27), что отражает отсутствие дуальной инвариантности теории с $j \neq 0$ и оправдывает выделение в этом случае $\tilde{P}$-системы (26), как основной). При указанных выше условиях векторная функция Лагранжа для системы взаимодействующих электромагнитного $F = (\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного Ψ полей принимает вид

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{L}_\mu^F + \mathcal{L}_\mu^\Psi + \mathcal{L}_\mu^I, \tag{115}$$

где $\mathcal{L}^F_\mu$ дано формулой (61) с $j=0$, $\mathcal{L}^\Psi_\mu$ — формулой (110), а

$$\mathcal{L}^I_\mu = -aF_{\mu\nu}e\overset{\mu}{\bar{\Psi}}\gamma^\mu g^{\mu\mu}\gamma^\nu\Psi, \qquad \mu - ns. \tag{116}$$

С учетом эквивалентности системы (26) исходной системе уравнний Максвелла (5), т.е. (1), полная система уравнений, на основе функции Лагранжа (115), имеет вид

$$Q_\mu - e\Psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\Psi = 0, \qquad R_\mu = 0, \tag{117}$$

$$[-aeF_{\mu\nu}\gamma^\mu g^{\mu\mu}\gamma^\nu + \gamma_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)]\Psi = 0, \qquad \mu - ns. \tag{118}$$

Умножив уравнение (118) на γ^μ слева и просуммировав по μ, получим следующее уравнение для спинорного поля Ψ, взаимодействующего с полем F:

$$\left[-\frac{ea}{4}(F_{0\nu}+F_{1\nu}+F_{2\nu}+F_{3\nu})\gamma^\nu + i\gamma^\nu\partial_\nu - m\right]\Psi = 0, \tag{119}$$

которое в терминах напряженностей $\vec{E}$, $\vec{H}$, имеет вид

$$\begin{gathered}\left\{\frac{ea}{4}\left[\vec{E}\vec{\gamma} - \gamma^0(E^1+E^2+E^3) + (\vec{H}\times\vec{\gamma})^1 + (\vec{H}\times\vec{\gamma})^2 + (\vec{H}\times\vec{\gamma})^3\right] + \right.\\ \left. + i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right\}\Psi = 0.\end{gathered} \tag{120}$$

Построенную теорию легко обобщить на случай вяаимодействия поля $(\vec{E},\vec{H})$ с полем произвольной массы и спина. Для этого вместо уравнения (87) следует использовать другое уравнение Дирака в векторной форме [29], а именно:

$$\gamma_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu - \gamma_4 m)\Psi \equiv (\hat{p}_\mu - 2iS_{\mu\nu}\hat{p}^\nu - 2iS_{\mu4}m)\Psi = 0. \tag{121}$$

Это уравнение, как и уравнение (87), есть результат иного способа "извлечения квадратного корня" из уравнения Клейна–Гордона (ср. замечание 3 в [29]).

Здесь, как и в случае уравнения (87), не существует функции Лагранжа в терминах Ψ, $\bar{\Psi}$, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы с уравнением (121) и сопряженным к нему по Дираку. В терминах же Ψ, $\overset{\mu}{\bar{\Psi}}$ функция Лагранжа для уравнения (121) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_\mu = \frac{\alpha_1}{2}\overset{\mu}{\bar{\Psi}}(i\Psi_{,\mu} + 2S_{\mu\nu}\Psi^{,\nu}) - \frac{\alpha_2}{2}(i\overset{\mu}{\bar{\Psi}}_{,\mu} + 2\overset{\mu}{\bar{\Psi}}{}^{,\nu}S_{\mu\nu})\Psi - 2im\overset{\mu}{\bar{\Psi}}S_{\mu4}\Psi,\\ \mu - ns, \qquad \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 1.\end{gathered} \tag{122}$$

Заметим, что сохраняющийся ток, вычисляемый по формуле (108) с $\mathcal{L}_\mu$ (122), совпадает с током (111), а взаимодействие с электромагнитным полем вводится по аналогии с предыдущим случаем.

Для теории с произвольным спином уравнение, аналогичное (121), имеет вид

$$(\hat{p}_\mu - 2iS_{\mu N}\hat{p}^N)\Psi = 0, \qquad \mu = \overline{0,3}, \quad N = \overline{0,4}, \tag{123}$$

где $\hat{p}^4 = m$, а S_{MN} $(M,N=\overline{0,4})$ являются генераторами подходящих матричных представлиний однородной группы Де Ситтера $O(1,4)$. Для этого уравнения функция Лагранжа и сохраняющиеся токи строятся в полной аналогии с предыдущим случаем, включая и вопрос о введении взаимодействия поля Ψ в (123) с полем $F = (\vec{E}, \vec{H})$.

Наконец, отметим известный еще со времен Дирака факт, что наличие магнитных монополей лишь улучшает красоту и симметрию теории электромагнетизма. Это в полной мере относится и к построенной здесь на основе векторных лагранжианов модели, в которую магнитный монополь естественным образом включается добавлением к функции Лагранжа (115) члена с магнитным током и зарядом. Заметим, что при этом установленная в [4, 5] 32-мерная алгебра инвариантности A_{32}, которая раньше имела место только для свободных уравнений Максвелла, может быть сохранена и при включении взаимодействия, если потребовать дуальной симметрии и для токов, т.е., чтобы при преобразовании $F \to \varepsilon F$ токи преобразовывались как

$$j \to \bar{j}, \qquad \bar{j} \to -j, \tag{124}$$

где $j = (j^\mu)$ — обычный электрический 4-вектор тока, а $\bar{j} = (\bar{j}^\mu)$ — магнитный ток, создаваемый монополем.

7. Некоторые комментарии и выводы

Перечислим основные свойства построенной здесь лагранжевой модели для электромагнитного поля в терминах напряженностей и системы взаимодействующих электромагнитного и спинорного полей.

Хотя уравнения Максвелла (1) в терминах тензора напряженностей $F = (F^{\mu\nu})$ $= (\vec{E}, \vec{H})$ (2) имеют явно ковариантный вид (5) и в этом смысле ничем не отличается от релятивистских уравнений для любых других ковариантных полей, уравнения (5) не позволяют построить стандартный L-подход, который основывается на скалярной (псевдоскалярной) функции Лагранжа. Более того, не существует функции Лагранжа в форме какого-либо ковариантa, для которой уравнения ЭЛ совпадали бы непосредственно с уравнениями (5), т.е. с исходными уравнениями Максвелла (1).

Можно перейти от уравнений (5) к эквивалентным им тоже явно ковариантным уравнениям — в тензорной форме (26) или псевдотензорной форме (27) — и построить L-подход, основанный на концепции векторной функции Лагранжа. Причем векторный L-подход требует соответствующей переформулировки стандартного принципа наименьшего действия. Такая переформулировка, содержится в теореме 2. Однако система уравнений ЭЛ для P-векторной функции Лагранжа в терминах напряженностей F (и тензора полевых скоростей $F_{,\alpha} \equiv (F^{\mu\nu}_{,\alpha})$) совпадает лишь с $\tilde{P}$-псевдотензорной систeмой (27) и не может приводить к $\tilde{P}$-тензорной системе (26), что связано с $\tilde{P}$-псевдотензорностью слагаемого при a_2 в $\mathcal{L}_\mu$ (33) (полная функция (33), являясь P-вектором, не является $\tilde{P}$-ковариантом). Обе системы (26) и (27) в векторном L-подходе можно получить, если в качестве независимых лагранжевых переменных привлечь также дуально сопряженные переменные $\bar{F}$, $\bar{F}_{,\alpha}$ — в этом случае не существует $\tilde{P}$-векторная функция Лагранжа (61), для которой уравнения ЭЛ (63), (64) совпадают с уравнениями (26), (27).

$\tilde{P}$-векторный лагранжиан (61) имеет еще два преимущества. Во-первых, по формуле (39) (обобщающей стандартную теорему Нетер о ЗС на случай векторного L-подхода) лагранжиан (61) дает естестесвенное соответствие “тензорный (псевдотензорный) генератор $\hat{q}$ преобразования инвариантности уравнений Максвелла —

тензорный (псевдотензорный) ток Θ_μ^ν (70)". Во-вторых, в $\tilde{P}$-векторном L-подходе удается ввести минимальное и локальное $\tilde{P}$-векторное взаимодействие электромагнитного поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$ со спинорным полем. Для этого оказалось необходимым построить нестандартный, а именно, векторный L-подход и для спинорного поля Ψ, причем один из вариантнов последнего, основанный на уравнении Дирака в векторной форме (121), обобщается на случай полей произвольного спина.

В заключение отметим, что векторный L-подход обладает рядом недостатков. Во-первых, соответствие "оператор симметрии — закон сохранения", требующее, чтобы генераторам ∂_μ трансляций в пространстве-времени R_x сопоставлялись именно энергия–импульс P_μ электромагнитного поля, а не что-либо другое, т.е. чтобы сохранение энергии P_0 в (80) было следствием однородности времени, а сохранение импульса $\vec{P}$ в (80) — однородности пространства, оказывается неустранимо нарушенным в рассмотренных выше моделях с (псевдо)векторными лагранжианами. Более того, в L-подходе с (псевдо)векторной функцией Лагранжа "оператор симметрии — закон сохранения" оказывается неоднозначным: одному генератору $\hat{q}$ алгебры инвариантности соответствуют четыре сохраняющиеся величины. В рамках концепции векторного лагранжиана вопрос об однозначности соответствия "оператор симметрии — закон сохранения" нельзя решить на основе теоремы Нетер.

Правда, можно по другому обобщать теорему Нетер на случай векторных лагранжианов, поставив в соответствие генератору $\hat{q}$ не ток $\Theta^{\mu\nu}$ (70), (74), а свертку

$$\hat{q} \to \bar{\Theta}^\mu = x^\nu \Theta_\nu^\mu, \qquad \partial_\mu \bar{\Theta}^\mu = 0, \tag{125}$$

которая сохраняется благодаря свойству симметрии тензора (74), $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$.

Легко убедиться, что если принять обобщение (125) теоремы Нетер, то

$$\partial_\rho \to T_\rho^\mu - \partial_\rho x^\nu T_\nu^\mu, \tag{126}$$

где T_ρ^μ — стандартный тензор энергии–импульса (77), так что при переходе к интегральным сохраняющимся величинам из (126) получаем физически удовлетворительное соответствие $\partial_\rho \to P_\rho$. Другими словами, по формулам (125), (126) получаем, что сохранение энергии–импульса P_ρ электромагвитного поля есть следствие траясляциойной инвариантности теории. Благодаря выполнению условия (126), соответствие "оператор симметрии — закон сохранения", даваемое формулой (125), можно считать физически приемлемым и для всех остальных операторов $\hat{q}$ преобразований инвариантности уравнений Максвелла.

Однако обобщение теоремы Нетер, заданное формулой (125), можно трактовать как существенный и, возможно, мало оправданный отход от стандартных принципов лагранжева подхода. Это замечание подтверждается тем, что результат (126) естественным образом получается и рамках стандартных принципов L-подхода для электромагнитного поля $F = (\vec{E}, \vec{H})$ при использовании скалярных функций Лагранжа для этого поля. Такой подход был предложен нами в [7] (еще до работы Садбери [18]) и основывался на скалярной функции Лагранжа, построенной в виде свертки $\mathcal{L} = \lambda^\mu \mathcal{L}_\mu$, $\lambda^\mu = x^\mu - e^\mu$. Детальное обсуждение такого L-подхода, включая вычисление и анализ сохраняющихся величин — следствий 32-мерной алгебры инвариантности A_{32}, приведено в [8, 9]. Использование $\tilde{P}$-скалярной функции Лагранжа оказалось предпочтительным не только потому, что стандартная теорема Нетер приводит к обычному соответствию "оператор симметрии — закон сохранения", но и потому, что в таком L-подходе естественным образом вводится $\tilde{P}$-скалярное взаимодействие электромагнитного $(\vec{E}, \vec{H})$ и спинорного Ψ полей.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г., О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака, *Физика элементар. частиц и атом. ядра.*, 1983, **14**, вып. 1, 5–57.
2. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
3. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the new invariance algebras and superalgebras of relativistic wave equations, *J. Phys. A.*, 1987, **20**, 537–549.
4. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О лагранжевом подходе для электромагнитного поля в терминах напряженностей и законах сохранения, Препринт 87.13, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 53 с.
5. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Лагранжиан электромагнитного поля в терминах напряженностей и законы сохранения, *Укр. физ. журн.*, 1985, **30**, № 10, 1457–1459.
6. Симулик В.М., Лагагранжев и теоретико-алгебраичиский анализ диракоподобной формы уравнений Максвелла, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 130–133.
7. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Инвариантный лагранжиан в электродинамике без потенциалов, *Вопросы атомной науки и техники. Сер. общ. и ядер. физика*, 1986, вып. 1, 29–30.
8. Кривский И.Ю., Симулик В.М., $P_+^\dagger$-скалярная функция Лагранжа и законы сохранения для электромагнитного поля в терминах напряженностей, Препринт 86.35, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1986, 49 с.
9. Кривский И.Ю., Симулик В.М., Релятивистски инвариантная формулировка лагранжева подхода к электродинамике в терминах напряженностей, Препринт 86.41, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 39 с.
10. Noether E., Invariante variations probleme, Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Cöttingen Math., Phys., Kl., 1918, 235–257 (перевод в сб.: Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, 611–630).
11. Hill E.L., Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics, *Rev. Mod. Phys.*, 1951, **23**, № 3, 253–260.
12. Кривский И.Ю., Симулик В.М., О теореме Нетер для преобразований трех типов, Препринт 85.12, Ин-т ядерных исследований АН УРСР, Киев, 1985, 61 с.
13. Кривский И.Ю., Теорема Нетер о законах сохранения для нелиевских преобразований инвариантности, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 134–139.
14. Anderson N., Arthurs A.M., A variational principle for Maxwell's equations, *Intern. J. Electron*, 1978, **45**, № 3, 333–334.
15. Rosen J., Redundancy and superfluity for electromagnetic fields and potentials, *Amer. J. Phys.*, 1980, **48**, № 12, 1071–1073.
16. Giannetto E.A., Majorana-Oppenheimer formulation of quantum electrodynamics, *Lett. Nuovo Cim.*, 1985, **44**, № 3, 140–144.
17. Gersten A., Conserved currents of the Maxwell's equations with electric and magnetic sourcea, Preprint GERN, TH.4688/87, 14 p.
18. Sudbery A., A vector Lagrangian for the electromagnetic field, *J. Phys. A*, 1986, **19**, № 2, L33–L36.
19. Heaviside O., On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field, *Phil. Trans. Roy. Soc., London (A)*, 1892, **83**, 423–480.
20. Larmor I., Collected papers, London, Clarendon press, 1928, 275 p.
21. Rainich G.Y., Electrodynamics in the general relativity theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–136.
22. Lipkin P.M., Existence of a new conservation law in electromagnetic theory, *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, № 5, 696–700.

23. Bessel-Hagen E., Über die Erhaltungssatze der Electrodynamik, *Math. Ann.*, 1921, **84**, 258–276.

24. Fradkin D.M., Conserved quantities associated with symmetry transformations of relativistic free particle equations of motion, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1022–1026.

25. Kibble T.W.B., Conservation laws for free fields, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 7, 1028–1040.

26. Candlin P.I., Analysis of the new conservation laws in electromagnetic theory, *Nuovo Cim.*, 1965, **37**, № 4, 620–627.

27. O'Connel R.F, Tompkins D.R., Physical interpretation of generalized conservation laws, *Nuovo Cim.*, 1965, **39**, № 1, 391.

28. O'Connel R.F., Tompkins D.R., Generalized solutions for Maxwell's free fields and consequent generalized conservation laws, *J. Math. Phys.*, 1965, **6**, № 12, 1952–1954.

29. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.