О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ

Мемуар Н.М. Крылова и Н.Н.Боголюбова [1] открыл широкую перспективу для конструктивного исследования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В 1955 г. вышла в свет основополагающая монография Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [2], в которой развиты и математически обоснованы асимптотические методы решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщению и применению асимптотических методов к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП) посвящена работа Ю.А. Митропольского и Б.И. Мосеенкова [3]. Идеи и методы, развитые в указанных работах, играют первостепенную роль в современной нелинейной математической физике.

В настоящей статье приведены некоторые результаты по изучению симметрийных свойств и построению семейств частных решений многомерных нелинейных волновых уравнений.

В дальнейшем будем следовать такой схеме [4, 5]: выделим из множества волновых ДУЧП такие, которые обладают высокой симметрией, а затем построим их решения (аналитическими или приближенными методами). Нас будут интересовать не отдельные решения того или иного уравнения, а семейство (класс, многообразие) его решений.

Линейные и нелинейные ДУЧП с нетривиальной симметрией обладают важным свойством: если известно хотя бы одно их частное решение, то с помощью групповых преобразований можно построить целое семейство точных решений. Именно этим свойством нелинейных уравнений будем пользоваться в дальнейшем.

1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &u_0 = F(x, u, \underset{1}{u}), \qquad x \in R(1,n), \qquad x = (x_0, \dots, x_n), \qquad u \equiv u(x), \\ &u_0 = \partial u/\partial x_0, \qquad \underset{1}{u} = (\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

где F — произвольная гладкая функция. Обозначим символом $\tilde{P}(1,n)$ расширенную группу Пуанкаре — группу вращений и сдвигов в $R(1,n)$, дополненную группой масштабных преобразований; $A\tilde{P}(1,n)$ — алгебра Ли группы $\tilde{P}(1,n)$.

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ с базисными элементами*

$$\begin{aligned} &p_A = ig_{AB}\partial/\partial x_B, \quad J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A, \quad A, B = \overline{0, n+1}, \\ &D = x_A p_A = x_0 p_0 - x_a p_a - u p_{n+1}, \quad p_{n+1} = -i\partial/\partial u, \ x_{n+1} = u, \ a = \overline{1, n} \end{aligned} \tag{2}$$

Укр. мат. журн., 1987, **39**, № 1, С. 116–123.

только в том случае, когда

$$F(x, u, \underset{1}{u}) = \pm(u_i u_i + 1)^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_i u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы [6] сводится к решению сильно переопределенной системы ДУЧП для функции $F(x, u, \underset{1}{u})$. Решением этой системы являются функции (3).

Следствие 1. *Уравнение Гамильтона*

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = m^2, \qquad m^2 = 1, \tag{4}$$

инвариантно относительно алгебры $A\tilde{P}(1, n+1)$.

2. Рассмотрим волновое уравнение второго порядка

$$\Box u + F(x, u) = 0, \qquad \Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial x_1^2 - \cdots - \partial^2/\partial x_n^2. \tag{5}$$

Теорема 2. *Уравнение (5) инвариантно относительно алгебры* $A\tilde{P}(1, n)$ *только в таких двух случаях:*

$$F(x, u) = F_1(u) = \lambda_1 u^r, \qquad r \neq 1, \tag{6}$$

$$F(x, u) = F_2(u) = \lambda_2 \exp u, \tag{7}$$

где λ_1, λ_2, r *— произвольные константы.*

Доказательство теоремы см. в [7]. Приведенные теоремы показывают, что естественным критерием отбора (выделения) довольно узкого класса нелинейных ДУЧП из всего множества уравнений является принцип инвариантности (симметрии) [4–7].

Замечание 1. Уравнение (5) с нелинейностью (7) в двумерном пространстве $R(1, 1)$ инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры алгебру $A\tilde{P}(1, 2)$. Эта симметрия дала возможность построить общее решение уравнения (5), (7) [4, 5, 7]

$$u(x_0, x_1) = \ln\left\{\frac{-8f_1'(x_0 + x_1)f_2'(x_0 - x_1)}{\lambda_2[f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1)]^2}\right\}, \tag{8}$$

где λ_1, f_2 — произвольные гладкие функции, f' — производная по соответствующему аргументу.

Замечание 2. Все решения двумерного уравнения (5), (7) имеют непертурбационный характер (решения (8) имеют сингулярность в точке $\lambda_2 = 0$), поэтому к уравнению неприменимы методы малого параметра. Для волнового уравнения со степенной нелинейностью (6) такой результат не обнаружен. Более того, многие частные решения уравнения (5), (6) аналитичны по λ_1 [4, 7].

Замечание 3. При $r = (n+3)/(n+1)$ уравнение (5), (6) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n) \supset A\tilde{P}(1, n)$ [8].

3. Выясним, какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность. Принято считать, что нелинейные процессы теплопроводности и диффузии описываются нелинейными ДУЧП вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{C(u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\} + F(u), \qquad x_0 \equiv t, \quad k = \overline{1,3}. \tag{9}$$

В случае, когда $F(u) = 0$, $C(u) = \mathrm{const}$, уравнение (9), как показал еще С. Ли, инвариантно относительно группы Галилея. Групповой анализ нелинейного уравнения (9) (при $F(u) = 0$) осуществил Л.В. Овсянников [9]. В [5] обращено внимание на следующее свойство уравнений (9): ни одно нелинейное уравнение из класса (9) не инвариантно относительно преобразований Галилея, т.е. для уравнений (9) ($F(u) \neq 0$, $C(u) \neq \mathrm{const}$) не выполняется принцип относительности Галилея. Поэтому для построения математической модели нелинейных процессов теплопроводности и диффузии необходимо решить следующую задачу [5]: описать эволюционные уравнения

$$u_0 + F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \qquad u_0 = \partial u/\partial x_0, \quad x_0 \equiv t \tag{10}$$

инвариантные относительно группы Галилея $G(1,n)$ и ее расширений. Если число простоанственных переменных $n \leq 3$, то галилеевски-инвариантные уравнения полностью описывает следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение (10) инвариантно относительно группы Галилея только в таких случаях:*

1) при $n = 1$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_1(v_1), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11}; \tag{11}$$

2) при $n = 2$

$$\begin{gathered} F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \qquad v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{12}, \\ v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22}; \end{gathered} \tag{12}$$

3) при $n = 3$

$$\begin{gathered} F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \qquad v_1 = \Delta u, \\ v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \qquad v_3 = \det \|u_{ij}\|, \end{gathered} \tag{13}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 *— произвольные гладкие функции.*

Доказательство теоремы 3 получено Серовой М.М. и автором [5]. Если алгебру $AG(1,n)$ дополнить операторами, которые порождают масштабные и проективные преобразования, то функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 конкретизируются, т.е. класс допустимых галилеевски-инвариантных уравнений (10) сильно сужается. Например, в двумерном случае [5] $F = \lambda u_i u_i + \alpha_1(v_1 - 4v_2)^{1/2}$, $i = 1, 2$.

Таким образом, ДУЧП второго порядка, описывающие нелинейные пространственные процессы теплопроводности и диффузии, имеют вид (10), (13). Далее, на примере волнового уравнения (5), (6) покажем, как строить некоторые классы точных решений нелинейных ДУЧП.

4. Для построения частных решений ДУЧП используем анзац

$$u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{14}$$

предложенный в [4]. С помощью этого анзаца построены широкие классы точных решений многих нелинейных уравнений математической физики. В (14) $\varphi(\omega)$ — функция, подлежащая определению, зависит от инвариантных переменных $\omega(x) = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Явный вид функций $f(x)$, $g(x)$ определяется из условия "разделения" переменных, т.е. из требования, чтобы в уравнение для $\varphi(\omega)$ не входили явно переменные $(x_0, \ldots, x_n)$. Инвариантные переменные $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ являются первыми интегралами соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа [4, 7]. По алгебре инвариантности ДУЧП строится уравнение Эйлера–Лагранжа. Число неэквивалентных анзацев зависит от размерности алгебры инвариантности уравнения.

Формула (14), конечно, не исчерпывает все возможные анзацы для данного уравнения. Так, широкий класс частных решений уравнений Гамильтона (4), Монжа–Ампера [10, 11] можно найти в неявном виде, используя анзац [4, 5]

$$W(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{15}$$

где $W(u)$ — произвольная гладкая функция от u, $\omega = \omega(x, u)$.

Рассмотрим волновое уравнение (5) с нелинейностью (6) в пространстве $R(1,3)$. Если реализовать приведенный алгоритм для уравнения (5), (6), то один из возможных анзацев (14) имеет следующий явный вид:

$$\begin{gathered} u(x) = \left[(cx)^2 + (dx)^2\right]^{2/(1-r)} \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad r \neq 1, \quad \omega_1 = \frac{ax}{bx}, \\ \omega_3 = \left[(cx)^2 + (dx)^2\right] ((ax)\cdot(bx))^{-1}, \quad \omega_2 = \ln\left[(cx)^2 + (dx)^2\right] + 2\theta \operatorname{arctg} \frac{cx}{dx}, \\ a^2 = -b^2 = -c^2 = -d^2 = 1, \quad ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0, \\ a^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2, \quad ab = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ ax \neq 0, \quad bx \neq 0, \quad dx \neq 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Анзац (16) редуцирует уравнение (5), (6) к ДУЧП с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered} \left(1+\omega_1^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} - 4\left(1+\theta^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} + \omega_3^2 \left[\omega_3\left(\omega_1^{-1} - \omega_1\right) - 4\right] \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_3^2} - \\ -2\omega_3^2\left(1+\omega_1^2\right) \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1\partial\omega_3} - \omega_3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2\partial\omega_3} - 2\omega_3\omega_1^2 \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} + 4k\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} - \\ -k^2\varphi + \lambda_1\varphi^2 = 0, \qquad k = 2/(r-1). \end{gathered} \tag{17}$$

Найти частные решения уравнения (17) трудно, поэтому нужно редуцировать его к уравнению с двумя независимыми переменными, а затем полученное ДУЧП редуцировать к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). Переход к ОДУ можно осуществить и непосредственно из уравнения (17), если предположить, например, что φ зависит только от одной переменной ω_1. В ряде случаев нелинейные ОДУ удается решить аналитически [4–7] или построить приближенные решения с помощью метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [12]. Заметим, что некоторые редуцированные уравнения обладают значительно высшей симметрией, чем исходное уравнение. Этот факт свидетельствует о новых возможностях для конструктивного построения широких классов решений.

Приведем два многопараметрических семейства точных решений уравнения Даламбера (5) с нелинейностью (6), полученных по указанной схеме

$$u = \left[(a_\nu x^\nu)^2 + b_\nu x^\nu \cdot c_\nu x^\nu\right]^{1/(1-r)}, \tag{18}$$

где параметры a, b, c удовлетворяют условиям

$$a_\nu b^\nu = a_\nu c^\nu = b_\nu b^\nu = c_\nu c^\nu = 0, \quad \nu = \overline{0, n-1},$$
$$2a_\nu a^\nu = b_\nu b^\nu = \lambda_1 (r-1)^2 (r-3)^{-1}, \quad r \neq 3, \quad r \neq 1;$$

$$u = \left[\Phi(a_\nu x^\nu) + b_\nu x^\nu\right]^{2/(1-r)}, \tag{19}$$

причем $a_\nu a^\nu = a_\nu b^\nu = 0$, $b_\nu b^\nu = -\frac{1}{2}\lambda_1(1-r)^2(1+r)^{-1}$, $r \neq -1$, Φ — произвольная гладкая функция.

Формула (19) задает решение уравнения (5), (6) через произвольную функцию Φ, поэтому ее можно использовать для изучения соответствующей начальной или граничной задачи.

Эффективная реализация анзаца (14) для нелинейных систем ДУЧП типа Дирака и Максвелла–Дирака осуществлена в работах [13, 14].

5. Приведем несколько простых приемов, позволяющих строить семейство частных решений нелинейных пуанкаре-инвариантных ДУЧП. Ради конкретности рассмотрим уравнение Даламбера (5) с кубической нелинейностью. Перейдем от ДУЧП к ОДУ посредством вычеркивания слагаемых $\partial^2 u/\partial x_1^2$, $\partial^2 u/\partial x_2^2$, $\partial^2 u/\partial x_3^2$ в уравнении (5). Тогда получим

$$\partial^2 u/\partial x_0^2 + \lambda F(u) = 0, \qquad F(u) = u^3. \tag{20}$$

Уравнение (20) имеет, помимо хорошо известных решений в классе эллиптических функций, простое частное решение

$$u_1(x) = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, x_0^{-1}, \qquad \lambda \neq 0. \tag{21}$$

Воспользовавшись преобразованиями из группы Лоренца $x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu$, размножим решения (21) до решений, зависящих от всех переменных (x_0, x_1, x_2, x_3):

$$u_2 = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}(a_\mu x^\mu)^{-1}, \qquad a_\mu a^\mu = 1. \tag{22}$$

Использовав конформные преобразования

$$x'_\mu = \sigma^{-1}\left(x_\mu + c_\mu x^2\right), \quad u'(x') = \sigma u(x), \quad \sigma = 1 + 2c_\nu x^\nu + c^2 x^2, \tag{23}$$

расширим решения (22) до семипараметрического семейства решений $u_3 = \sigma^{-1}u_2$ $(x_\mu \to x'_\mu)$. Очевидно, что уравнению (5) можно сопоставить, например, ОДУ вида $\partial^2 u/\partial x_1^2 + \lambda F(u) = 0$, $F(u) = u^3$. В этом случае получим такие семейства решений конформно-инвариантного уравнения (5):

$$\tilde{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}(a_\alpha x^\alpha)^{-1}, \qquad a_\alpha a^\alpha = -1, \tag{24}$$

$$\tilde{u}_3 = \sigma^{-1}\tilde{u}_2(x_\mu \to x'_\mu). \tag{25}$$

Следует отметить, что размножать решения ДУЧП можно не только с помощью преобразований, образующих группу Ли. Например, уравнение

$$\Box u + \lambda(x_\alpha x^\alpha)^{-1}u = 0 \tag{26}$$

не инвариантно относительно конформных преобразований (23), но инвариантно относительно инверсии

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu/x^2, \qquad x^2 \neq 0. \tag{27}$$

Преобразование (27) не образует группу Ли. Если u_1 — решение уравнения (26), то новое решение u_2 строится по формуле

$$u_2 = \frac{1}{x^2}u_1\left(x_\mu \to \frac{x_\mu}{x^2}\right). \tag{28}$$

Формулу (28) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Кельвина для уравнения Лапласа на линейные и нелинейные волновые уравнения. Описанный прием пригоден также и для отыскания частных решений галилеево-инвариантных уравнений (10) [15].

Другой способ построения частных решений ДУЧП состоит в замене многомерного уравнения (5) системой двумерных ДУЧП вида

$$\partial^2u/\partial x_0^2 - \partial^2u/\partial x_1^2 + F(u) = 0, \tag{29}$$

$$\partial^2u/\partial x_2^2 + \partial^2u/\partial x_3^2 = 0. \tag{30}$$

Двумерную систему (29), (30) легче решить, чем исходное многомерное уравнение (5). Построив частные решения системы, размножим их до неразмножаемых относительно групп $\tilde{P}(1,3)$ или $C(1,3)$. В случае, когда $F(u) = \lambda\exp u$, все решения уравнения (29) имеют вид (8). Подставив (8) в (30), получим уравнение для определения двух произвольных функций f_1 и f_2. Если $F(u) = \sin u$, уравнение (29) имеет, как хорошо известно, солитонные решения.

Замечание 4. Неразмножаемые решения уравнений (5)–(7) относительно групп $G(1,3)$, $P(1,3)$ и $C(1,3)$ можно использовать для квантования нелинейных волновых уравнений. Один из возможных путей состоит в следующем: разложить пуанкаре-инвариантное семейство решений уравнения (5) в интеграл Фурье, а затем, как и в случае линейных уравнений, воспользоваться хорошо известными приемами.

6. В предыдущих пунктах для отыскания частных решений существенно использована симметрия ДУЧП. Естественно поставить следующий вопрос: возможна ли редукция многомерного ДУЧП в случае, когда уравнение не обладает симметрией? Для положительного ответа на этот вопрос нужно построить уравнение, которое, например, не инвариантно относительно группы Лоренца $O(1,3)$, но допускает редукцию относительно лоренц-инвариантного анзаца. Такие уравнения построены И.М. Цифрой и автором. Одно из них имеет вид

$$\begin{aligned}\Box u = {} & (\lambda_0/x_0)^2(\partial u/\partial x_0)^2 + (\lambda_1/x_1)^2(\partial u/\partial x_1)^2 + \\ & + (\lambda_2/x_2)^2(\partial u/\partial x_2)^2 + (\lambda_3/x_3)^2(\partial u/\partial x_3)^2,\end{aligned} \tag{31}$$

где $\lambda_0, \ldots, \lambda_3$ — произвольные параметры, $x_\mu \neq 0$. Уравнение (31) не инвариантно относительно преобразований из группы $O(1,3)$, но имеет лоренц-инвариантные решения. Решения (31) ищем с помощью лоренц-инвариантного анзаца

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_\mu x^\mu. \tag{32}$$

Уравнение (31) после подстановки (32) редуцируется к ОДУ

$$4\omega d^2\varphi/d\omega^2 + 8d\varphi/d\omega = 4\lambda^2(d\varphi/d\omega)^2. \tag{33}$$

Частное решение уравнения (33) имеет вид

$$\varphi = -\frac{2}{\sqrt{a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sqrt{a^2}} \qquad \text{при } \lambda^2 = -a^2 < 0,$$

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2}+\omega}{\sqrt{a^2}-\omega}\right| \qquad \text{при } \lambda^2 = -a^2 > 0.$$

Таким образом, уравнение (31), не обладающее лоренц-симметрией, имеет лоренц-инвариантные решения. Этот факт обусловлен тем, что некоторые подмножества в множестве всех решений уравнения (31) имеют более широкую симметрию, чем множество всех решений уравнения (31). В рассматриваемом примере дополнительное условие, выделяющее лоренц-инвариантные решения, имеет вид

$$J_{\mu\nu}u(x) = 0, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu\partial/\partial x_\nu - x_\nu\partial/\partial x_\mu, \quad \mu = \overline{0,3}, \tag{34}$$

$J_{\mu\nu}$ — генератор группы $O(1,3)$. Вместо (34) можно использовать и менее жесткие условия, например $(J_{\mu\nu}u)(J_{\mu\nu}u) = 0$ или $J_{\mu\nu}J^{\mu\nu} = 0$.

Уравнение (31) совместно с дополнительными условиями (34) инвариантно относительно $O(1,3)$, т.е. уравнение (31) на множестве решений линейных уравнений (34) лоренц-инвариантно.

Все изложенное выше относительно конкретного уравнения (31) обобщается и на случай произвольного ДУЧП

$$L(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0. \tag{35}$$

Пусть $\{\hat{Q}_A\}$ — совокупность операторов из алгебры инвариантности уравнения (35) [16], т.е. операторы $\{\hat{Q}_A\}$, $A = \overline{1,N}$, переводят решение в решение. В рассмотренном примере $\{\hat{Q}_A\} = \{J_{\mu\nu}\}$ — набор шести операторов, задающих группу Лоренца. Для построения алгебры инвариантности необходимо использовать обобщенное условие инвариантности

$$\hat{Q}_A L(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})\Big|_{\substack{L=0 \\ \{\hat{Q}_A u\}=0}} = 0, \tag{36}$$

где $\{\hat{Q}_A u\} = 0$ — совокупность следующих уравнений:

$$\hat{Q}_A u = 0, \quad D\hat{Q}_A u = 0, \quad \ldots, \quad D^n\hat{Q}_A u = 0, \tag{37}$$

D — оператор полного дифференцирования. Если в уравнении (36) не учитывать дополнительные уравнения (37), то обобщенное условие инвариантности совпадает с классическим условием инвариантности С. Ли. Уравнения

$$D\hat{Q}_A u = 0, \qquad D^2\hat{Q}_A u = 0 \tag{38}$$

представляют собой дифференциальные следствия из уравнения $\hat{Q}_A u = 0$. Уравнения (38) можно интерпретировать как дифференциальные связи, наложенные на исходное уравнение (35). Примером ДУЧП со связями может быть система

$$\Box u = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0. \tag{40}$$

В [17] с учетом обобщенного условия инвариантности (36) найдена бесконечномерная алгебра инвариантности системы (39), (40). Использование классического определения инвариантности к системе (39), (40) дает конечномерную алгебру инвариантности. Многочисленные применения обобщенного условия инвариантности к линейным уравнениям математической физики рассмотрены в [18].

В случае, когда операторы $\{\hat{Q}_A\}$ являются дифференциальными операторами первого порядка $\hat{Q}_A = \xi^\mu_A(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^A(x,u)$, $\mu = \overline{0,n}$, первое уравнение из (37) можно использовать для нахождения функций $f(x)$, $g(x)$ в анзаце (14) при редукции ДУЧП к ОДУ, т.е.

$$\hat{Q}_A u = \xi^\mu_A \frac{\partial}{\partial x_\mu}\{f(x)\varphi(\omega) + g(x)\} + \eta\{f(x)\varphi(\omega) + g(x)\} = 0.$$

Замечание 5. Приведем системы дифференциальных уравнений с нелинейными связями, которые могут иметь физические приложения:

$$\Box\Psi = -m^2\Psi, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \left\{\frac{\partial\rho}{\partial x_a}\frac{\partial\rho}{\partial x_a} \pm m^2\right\}^{1/2},$$

$$\rho = \lambda_1\left(\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi\right) + \lambda_2\Psi^\dagger\Psi;$$

$$\Box\Psi = -m^2\Psi, \qquad \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \qquad j_\mu = F_1(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_\mu\Psi + F_2(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi,$$

где Ψ — четырехксмпонентный спинор, $\Psi^\dagger$ — сопряженный спинор, F_1 и F_2 — произвольные гладкие функции.

Замечание 6. Укажем еще один способ решения нелинейных систем уравнений, например, вида

$$u_\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3; \qquad \bar\Psi\gamma_\mu\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} = 0.$$

Дополним эти уравнения линейными волновыми уравнениями

$$\Box u_\mu = 0, \qquad \Box\Psi = 0.$$

Построив широкие классы частных решений линейных уравнений и подставив их в нелинейные, можно найти семейства точных решений исходной нелинейной системы. При этом желательно, чтобы система нелинейного и линейного уравнений имела нетривиальную симметрию и, конечно, была совместна.

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н., Введение в нелинейную механику, Киев, Изд-во АН УССР, 1937, 220 с.

2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Наука, 1955, 450 с.

3. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, Киев, Вища шк., 1976, 589 с.

4. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики, в кн: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в кн: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.

6. Фущич В.И., Серов Н.И., О некоторых точных решениях многомерного нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа, *Докл. АН СССР*, 1984, **278**, № 4, 847–851.

7. Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alemdert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.

8. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.

9. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.

10. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Let. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.

11. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.

12. Шульга М.В., О точных и приближенных решениях одного нелинейного волнового уравнения, в кн: Методы нелинейной механики и их приложения, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 149–155.

13. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrobynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215–217.

14. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 20–30.

15. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 18, 3491–3503.

16. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.

17. Шульга М.В., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.

18. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.