Как расширить симетрию дифференциальных уравнений?

В.И. ФУЩИЧ

Предложен простой способ расширения симметрии дифференциальных уравнений.

1. Лиевский критерий инвариантности. Рассмотрим в четырехмерном пространстве $R(1,3)$ систему нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных

$$L(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \dots, \underset{n}{u}) = 0, \tag{1}$$

где вектор $u \equiv (u_1, u_1, \dots, u_n)$, $x \in R(1,3)$, $\underset{1}{u} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$, $\underset{k}{u}$, $k = \overline{1,r}$ — совокупность всевозможных производных r-го порядка.

Согласно Ли уравнение (1) инвариантно относительно оператора

$$Q = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k(x,u)\frac{\partial}{\partial u_k}, \tag{2}$$

если виполняется следующее условие:

$$\tilde{Q}L = \lambda_0(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{k}{u})L \qquad \text{или} \qquad \tilde{Q}L\Big|_{L=0} = 0, \tag{3}$$

где $\tilde{Q}$ — соответствующее число раз продолженный оператор Q, λ_0 — произвольная дифференциальная функция (более подробно см., например, [1–3]). Условие (3) назовем лиевским критерием инвариантности уравнения (1). Более общее определение инвариантности введено в [4, 5], которое дало возможность обнаружить новые симметрии уравнений Максвелла, Дирака, Ламе [6].

Хорошо известно, что если уравнение обладает нетривиальной симметрией, то это свойство существенно для явного построения широких классов точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Многие ДУЧП обладают довольно узкой группой инвариантности. Поэтому весьма существенно указать конструктивные способы расширения симметрии уравнений.

В настоящее время интенсивно развиваются два направления решения этой проблемы. Одно из них состоит в разработке новых методов исследования симметрийных свойств ДУЧП (см. библиографию в [6]), позволяющих обнаружить как локальные, так и нелокальные симметрии. Другое направление наметилось в работах [3, 6–10], где изучается симметрия не всех решений ДУ, а только некоторых подмножеств решений. В неявном виде, как теперь стало ясно, эта идея заложена, в частности, в методе разделений переменных и, конечно, использовалось без привлечения теоретико-алгебраических методов многими исследователями прошлого века. Ниже именно это второе направление будет обсуждаться.

Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1987, С. 4–16.

На конкретных примерах будет указан способ расширения симметрии ДУЧП. Как будет видно из дальнейшего, он очевидным образом обобщается и на другие ДУ.

2. Уравнение Максвелла. Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \vec{H}, \qquad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, \vec{E}, \tag{4}$$

$\vec{E}$, $\vec{H}$ — векторы напряженностей электромагнитного поля.

Операторы, порождающие преобразования Лоренца, имеют вид

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \qquad P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{5}$$

$S_{0a} = iS_a$ — 6×6-матрицы, реализующие соответствующее представление алгебры Ли группы $SU(2)$ [6].

Записав матрицы S_a через E_k, H_l и $\frac{\partial}{\partial E_k}$, $\frac{\partial}{\partial H_l}$ и представив (4) в виде (1) [6]

$$L\Psi = 0, \qquad L = \frac{\partial}{\partial t} - i\sigma_2 S_a P_a, \tag{6}$$

можно убедиться, что

$$\tilde{J}_{0a} L \neq \lambda_a L \qquad \text{или} \qquad \tilde{J}_{0a} L\Big|_L \neq 0, \quad a = 1, 2, 3. \tag{7}$$

В (6) вектор-столбец $\Psi = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)$. Для уравнения (4) $\tilde{J}_{0a} = J_{0a}$. Условие (7) означает, что система (4) неинвариантна относительно операторов $\{J_{0a}\}$, а следовательно, уравнение (2) не инвариантно относительно группы Лоренца $O(1,3)$. Действие операторов $\{J_{0a}\}$ на L можно записать в виде

$$\tilde{Q} L = \lambda_0(x, u, u_1, \ldots, u_r) L + \lambda_1(x, u, u_1, \ldots, u_r) L_1, \qquad \lambda_1 \neq 0, \tag{8}$$

где $\tilde{Q}$ — любой из операторов $\{\tilde{J}_{01}, \tilde{J}_{02}, \tilde{J}_{03}\}$. Отсюда видно, что если на множество решений наложить дополнительное условие

$$L_1(x, u, u_1, \ldots, u_r) = 0, \tag{9}$$

то система (4) будет инвариантна относительно операторов $\{J_{0a}\}$. Для системы (4) эти дополнительные условия имеют вид

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\, \vec{H} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, уравнения (4) в совокупности с дополнительными условиями (10) инвариантны относительно алгебры Ли $AO(1,3)$ группы $O(1,3)$. Обобщая понятие инвариантности, введенное в [6–10] и приведенные только что рассуждения, Н.И. Серов и автор ввели понятие условной инвариантности ДУ.

Определение. *Систему уравнений (1) назовем условно инвариантной, если она инвариантна относительно оператора Q при дополнительном условии (9) и*

$$\tilde{Q} L_1 = \lambda_2(x, u, u_1, \ldots, u_k) L + \lambda_3(x, u, u_1, \ldots, u_k) L_1, \tag{11}$$

λ_1, λ_2 — произвольные дифференцируемые функции.

В данном определении, конечно, предполагается, что система (1), (9) совместна. Очевидно, что не всякое дополнительное условие (уравнение) расширяет симметрию исходного уравнения. Поэтому важно научиться строить такие дополнительные условия, чтобы симметрия всей системы была шире, чем симметрия исходного уравнения (1).

3. Условная инвариантность систем гиперболического и параболического типов. Система гиперболических уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} &\Box\vec{E}=\vec{0}, \qquad \vec{E}=\{E_1,E_2,E_3\}, \qquad \Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta,\\ &\Box\vec{H}=\vec{0}, \qquad \vec{H}=\{H_1,H_2,H_3\} \end{aligned} \tag{12}$$

инвариантна относительно конформных операторов

$$K_\mu=2x_\mu D-x_\nu x^\nu P_\mu+2x^\nu S_{\mu\nu}, \qquad D=x_\mu P^\mu+2i, \tag{13}$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие представление алгебры $AO(1,3)$.

Однако, система (12) условно инвариантна относительно операторов (13). В этом случае дополнительное условие (9) является системой уравнений Максвелла (4), (10). Подробное доказательство этого факта дано в [6].

Рассмотрим систему линейных уравнений параболического типа

$$\begin{aligned} &L\Psi=0, \qquad L=p_0-\frac{p_ap_a}{2m},\\ &p_0=i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_a=-i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a=1,2,3. \end{aligned} \tag{14}$$

$\Psi=\{\Psi_1,\Psi_2,\dots,\Psi_n\}$ — вектор-функция, m — параметр.

Уравнения (14) условно инвариантны относительно операторов из расширенной алгебры Галилея $AG(1,3)$

$$\begin{aligned} &G_a=tp_a-mx_a+q_a,\\ &A=tD-t^2p_0+\frac{1}{2}m\vec{x}^{\,2}-\vec{q}\vec{x}, \qquad D=2rp_0-\vec{x}\vec{p}+q_0, \end{aligned} \tag{15}$$

если на решения Ψ положить дополнительные условия

$$\begin{aligned} &L_3\Psi=0, \qquad L_4\Psi=0,\\ &L_3=q_0-\frac{3}{2}i-\frac{\vec{q}\vec{p}}{m}, \qquad L_4=q_1^2+q_2^2+q_3^2. \end{aligned} \tag{16}$$

В (15), (16) матрицы q_0, $\vec{q}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[q_a,q_b]=0, \qquad [q_0,q_a]=iq_a.$$

В [7] доказано, что уравнения (16) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы система (14) была инвариантна относительно операторов (15).

4. Расширение симметрии уравнения Даламбера. Хорошо известно, что максимальной (в смысле С. Ли) локальной группой инвариантности линейного волнового уравнения

$$\Box u(x)=0, \qquad x=(x_0,x_1,\dots,x_n), \tag{17}$$

является конформная группа $C(1,n)$. В [11] доказано, что если на решения $u(x)$ наложить условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0, \tag{18}$$

то переопределенная система (17), (18) инварианта относительно бесконечномерной алгебры с операторами

$$\begin{gathered} Q = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \\ \xi^\mu = c_{00}x_\mu + c_{\mu\nu}(u)x^\nu + d_\mu(u), \qquad \eta(x,u) = \eta(u), \end{gathered} \tag{19}$$

где $c_{00}(u)$, $c_{\mu\nu}(u)$, $\eta(u)$ — произвольные гладкие функции от зависимой переменной $u(x)$.

Итак, уравнение Даламбера условно инвариантно относительно бесконечномерной алгебры (19). Такое существенное расширение симметрии волнового уравнения приводит к уникальному свойству нелинейной системы (17), (18): если u_1 — решение (18), (19), то и произвольная гладкая функция от этого решения $\Phi(u_1) = u_2$ является решением (17), (18).

5. Условная инвариантность уравнения четвертого порядка. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \Delta\right)u = 0. \tag{20}$$

Применяя метод Ли к уравнению (20), можно показать, что оно неинвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1,3)$. Уравнение (20) является дифференциальным следствием уравнения теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \Delta\right)u = 0, \qquad u \equiv u(x), \tag{21}$$

которое, как известно, инвариантно относительно преобразований Галилея. Причина сужения симметрии уравнения (20), по сравнению с уравнением (21), связана с тем, что множество решений уравнения (20) шире, чем множество решений уравнения (21). Однако, если на $u(x)$ наложить дополнительное условие в виде уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \qquad a = 1,2,3, \tag{22}$$

то система (21), (22) будет инвариантна относительно галилеевских операторов вида

$$G_a = up_a - \frac{1}{2}x_a p_0.$$

Отметим, что эти операторы порождают необычные преобразования Галилея.

Итак, уравнение (20) условно инвариантно относительно алгебры Галилея. Более подробно этот вопрос изучен в [12].

6. Расширение симметрии нелинейного уравнения теплопроводности. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right\} = 0, \qquad c(u) \neq \text{const}, \tag{23}$$

не инвариантно относительно преобразований Галилея, а следовательно, для него не выполняется принцип относительности Галилея [9], т.е. уравнение (23) неинвариантно относительно операторов

$$G_a = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + \mu(u)x_a\frac{\partial}{\partial u}, \qquad a = 1,2,3, \tag{24}$$

где $\mu(u)$ — произвольная гладкая функция от $u(x)$.

Чтобы расширить симметрию нелинейного уравнения теплопроводности до группы Галилея, достаточно дополнить (24) уравнением типа Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{1}{2\mu(u)}\frac{\partial u}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_a} = 0, \tag{25}$$

причем

$$\mu(u) = \frac{u}{2c(u)}. \tag{26}$$

Аналогичным способом можно расширить симметрию уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = C(x, u, \underset{1}{u})\Delta u, \tag{27}$$

которое широко применяется в нелинейной акустике, в теории нелинейных волн.

Более подробно эти результаты будут обсуждаться и опубликованы в работе Н.И. Серова и автора.

7. О некоторых нерешенных задачах. В этом пункте укажем несколько задач, которые представляются автору важными для развития и применения теоретико-алгебраических методов.

1. Описать дифференциальные уравнения (дополнительные условия) первого и второго порядка

$$F_1(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, a_{\mu\nu}, F_0), \qquad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{28}$$

которые расширяют симметрию уравнения

$$a_{\mu\nu}(x, u, \underset{1}{u})\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + F_0(x, u, \underset{1}{u}) = 0 \tag{29}$$

до групп: $O(1,3)$, $P(1,3)$, $C(1,3)$, $P(1,4)$, $C(1,4)$. F_0, F_1, $a_{\mu\nu}$ — гладкие функции. Рассмотреть отдельно случай двумерных уравнений $\{x = (x_0, x_1)\}$ и описать все уравнения (28), (29), инвариантные относительно бесконечномерной алгебры с оператором

$$Q = \{f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1)\}\frac{\partial}{\partial x_0} + \{f(x_0 + x_1) - g(x_0 - x_1)\}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

где f и g — произвольные функции.

2. Исследовать групповые свойства и построить решения следующих уравнений:

$$\begin{gathered}\Box u + F_0(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \qquad (K_\mu u)(K^\mu u) = \lambda, \\ K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + \lambda_1, \qquad D = \frac{1}{2}(x_\alpha p^\alpha + p^\alpha x_\alpha) + \lambda_2;\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\Box u + F_0(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \\ (J_{\mu\nu} u)(J^{\mu\nu} u) = \lambda_3, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,\end{gathered} \tag{31}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные константы. Рассмотреть волновое уравнение (30) с дополнительным условием: $D^2 u(x) = \lambda$.

3. Описать системы дополнительных условий (уравнений) первого порядка, расширяющих симметрию уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + C_{lk}(u, \underset{1}{u}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} + F_0(u, \underset{1}{u}) = 0. \tag{32}$$

Рассмотреть в качестве дополнительного условия уравнение первого порядка

$$a_0(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_0} + a_{kl}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_l} + b_k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0.$$

4. Исследовать групповые свойства и построить семейства частных решений нелинейного уравненяя Дирака

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi = F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi \tag{33}$$

совместно с одним из следующих дополнительных условий:

$$a\bar{\Psi}\Psi + b\bar{\Psi}\gamma_4\Psi = 0, \tag{34}$$

$$a(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)^2 + b(\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi)^2 = 0, \tag{35}$$

$$a\frac{\partial(\bar{\Psi}\Psi)}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial(\bar{\Psi}\Psi)}{\partial x^\mu} + b\frac{\partial(\bar{\Psi}\gamma_4\Psi)}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial(\bar{\Psi}\gamma_4\Psi)}{\partial x^\mu} = 0, \tag{36}$$

a, b — произвольные постоянные.

Рассмотреть случаи: $F(\bar{\Psi}\Psi) = m = \text{const}$, $F(\bar{\Psi}\Psi) = 0$, Ψ — четырехкомпонентный спинор.

5. Исследовать симметрию и построить точные решения уравнений

$$\Box\Psi + \left(F(\bar{\Psi}\Psi), \frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)\Psi = 0 \tag{37}$$

с дополнительными условиями

$$a\frac{\partial(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)}{\partial x_\mu} + b\frac{\partial(\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi)}{\partial x_\mu} = 0, \tag{38}$$

$$a(\bar{\Psi}\Psi) + b(\bar{\Psi}\gamma_4\Psi) = 0. \tag{39}$$

6. Провести теоретико-алгебраический анализ системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\mu w^\mu + w^\mu\gamma_\mu)\Psi + F(\bar\Psi\Psi)\Psi = 0,\\
&w_\mu = \{w_0, \vec w\} = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}, \qquad w_0 = \vec p\vec J = p_1J_1 + p_2J_2 + p_3J_3,\\
&J_i = \varepsilon_{ikl}J_{kl}, \qquad \vec w = p_0\vec J - (\vec p\times\vec N), \qquad \vec N = (J_{01}, J_{02}, J_{03}),\\
&J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu),
\end{aligned}
\tag{40}
$$

7. Описать пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные первого и второго для спинора Ψ, предполагая, что ток

$$
j_\mu = a(\bar\Psi\gamma_\mu\Psi) + b(\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi) + c(\bar\Psi p_\mu\Psi) + d(\bar\Psi w_\mu\Psi)
$$

удовлетворяет уравнению непрерывности $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$, a, b, c, d — произвольные константы.

8. Исследовать групповые свойства и построить частные решения систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma_\nu J^{\mu\nu}\Psi + \lambda(\bar\Psi\Psi)^k\Psi = 0,\\
&J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].
\end{aligned}
$$

9. Построить семейства точных решений уравнений второго порядка

$$
\Box\Psi = F\left(\bar\Psi\Psi, \frac{\partial\bar\Psi}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial\Psi}{\partial x_\beta}\right)\Psi
$$

с дополнительным условием

$$
\begin{aligned}
&\bar\Psi\gamma_\mu p^\mu\Psi = a(\bar\Psi\Psi) + b(\bar\Psi\gamma_\mu\Psi)^2 + c(\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi)^2,\\
&(\bar\Psi w_\mu\Psi)(\bar\Psi w^\mu\Psi) = \lambda(\bar\Psi\Psi).
\end{aligned}
$$

Рассмотреть случаи: $F = -m^2$, $F = (\bar\Psi\Psi)^r$, m, r, b, c — произвольные константы.

10. С помощью следующих потенциалов (B_μ, φ):

$$
\begin{aligned}
&F_{\mu\nu} = K_\mu B_\nu - K_\nu B_\mu, \qquad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + \lambda_1,\\
&F_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}\varphi, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad u_i = \varepsilon_{ikl}J_{kl}\varphi,
\end{aligned}
$$

построить семейства точных решений уравнений для электромагнитного поля и для поля Эйлера–Навье–Стокса

$$
\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \lambda\Delta u_i = 0, \qquad i, k, l = 1, 2, 3.
$$

11. Описать анзацы вида

$$
u = f(x)\varphi(\omega) + g(x),
$$

которые редуцируют уравнения второго порядка

$$
a_{\mu\nu}(x, u, \underset{1}{u})\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu} + F(x, u, \underset{1}{u}) = 0
\tag{41}
$$

к обыкновенным ДУ. Важно рассмотреть случаи, когда уравнение (41) не инвариантно ни относительно групп $P(1,3)$, $C(1,3)$, ни относительно подгрупп этих групп. Нетривиальные примеры таких уравнений приведены в [9, 10].

12. Исследовать симметрию и построить классы точных решений следующих систем уравнений:

$$D_t\vec{E} = \mathrm{rot}\,\vec{H}, \qquad D_t\vec{H} = -\mathrm{rot}\,\vec{E},$$

$$D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 E_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \lambda_2 H_k \frac{\partial}{\partial x_k};$$

$$D_\nu F_{\mu\nu} = 0, \qquad D_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + F_{\nu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad \mu = \overline{0,3};$$

$$D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0.$$

Рассмотреть случаи, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$; $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$. Приведенные уравнения можно рассматривать как нелинейное обобщение уравнений Максвелла. При этом, конечно, следует добавить к первой системе уравнений условие неразрывности: $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$.

13. Провести подробно теоретико-алгебраический анализ переопределенных уравнений

$$\Box u + F_1(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{42}$$

$$\{b_{\mu\nu}(x,u)J_{\mu\nu} + c_\mu(x,u)P_\mu + d_\mu(x,u)K_\mu + e(x,u)D\}F_2(x,u) = 0, \tag{43}$$

$$\Box u + F_3(x, u, \underset{1}{u}) = 0, \tag{44}$$

$$a_{\mu\nu}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = F_4(x,u), \tag{45}$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad P_\mu = i g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

$$K_\mu = 2x_\mu - x_\nu x^\nu P_\mu, \qquad D = \frac{1}{2}(x_\mu P^\mu + P_\mu x^\mu).$$

Описать функции F_1, F_2, F_3, F_4, $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, c_μ, d_μ, e, при которих уравнения (42)–(45) инвариантны относительньно групп $C(1,3)$, $C(1,4)$, $P(1,3)$, $P(1,4)$ и их подгрупп. Если удастся при некоторых конкретных функциях F_2, $b_{\mu\nu}$, $\ldots$ решить уравнение (43), то это даст нам анзацы для решения нелинейного волнового уравнения (42), которые не могут быть получены с помощью метода С. Ли. В том случае, когда уравнение (42) инвариантно относительно операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$, K_μ, D, а функции $b_{\mu\nu}$, c_μ, d_μ, e являются постоянными, уравнение (43) дает нам лиевские анзацы для нахождения инвариантных решений уравнения (42). Решения уравнения (43) приводят к нелиевским анзацам для волнового уравнения (42). При этом, конечно, необходимо, чтобы система (42), (43) была совместной.

14. Исследовать симметрию и построить первые интегралы для обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = x_\mu F_1(x, \bar{\Psi}\Psi) + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)F_2(x, \dot{x}),$$

$$\gamma_\mu P^\mu \Psi = F_3(\bar{\Psi}\Psi)\Psi.$$

Приведенная система ОДУ описывает движение классической частицы в спинорном поле Ψ . Рассмотреть случай, когда $F_3(\bar\Psi\Psi) = m = \mathrm{const}$.

15. Описать все системы ОДУ вида

$$m(\vec v, \vec E, \vec H)\frac{d\vec v}{dt} = \vec x F_1(x, \vec v, \vec E, \vec H) + \vec v F_2(x, \vec v, vecE, \vec H) + \\ + \vec E F_3(x, \vec v, \vec E, \vec H) + \vec H F_4(x, \vec v, vecE, \vec H), \tag{46}$$

инвариантные относительно групп $P(1,3)$, $G(1,3)$ и их расширений ($C(1,3)$, $P(1,4)$, $C(1,4)$, $G(1,4)$). В (46) $\vec v = \frac{d\vec x}{dt}$, $x = (t, x_1, x_2, x_3)$, $\vec v = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec E$, $\vec H$ — векторы электромагнитного поля.

16. Существуют ли нетривиальные решения для спинорного поля

$$p_\mu p^\mu \Psi + F(\bar\Psi\Psi, \bar\Psi\gamma_\mu p^\mu\Psi)\Psi = 0,$$

для которых

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \lambda\bar\Psi\gamma_\mu\Psi, \qquad F_{\mu\nu} = \lambda_1\bar\Psi[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Psi,$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

или

$$p_\alpha p^\alpha A_\mu + p_\mu(p_\nu A^\nu) = m^2 A_\mu + A_\mu F(\bar\Psi\Psi), \qquad A_\mu = \lambda\bar\Psi\gamma_\mu\Psi,$$

или

$$p_\alpha p^\alpha u = m^2 u + F(u), \qquad u = \lambda(\bar\Psi\Psi),$$

λ, λ_1 — произвольные параметры.

17. Иссследовать симметрийные свойства и построить решения интегро-дифференциального уравнения для спинора

$$p_0\Psi = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2\right)^{1/2}\Psi + F(\bar\Psi\Psi)\Psi \tag{47}$$

с дополнительными нелинейными условиями:

$$\bar\Psi\gamma_\mu p^\mu\Psi = \lambda\bar\Psi\Psi; \qquad \bar\Psi(1-\gamma_4)\Psi = 0. \tag{48}$$

Рассмотреть отдельно случай: $F = 0$, $\lambda = m$. В этом случае решения линейного уравнения Дирака (с положительной энергией) удовлетворяют уравнению (47) и первому нелинейному условию (48).

18. Исследовать пространства с такими метриками:

$$\left(x_\mu + \lambda_1\frac{\partial u}{\partial x_\mu} + \lambda_2 x_\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\right)\left(x^\mu + \lambda_1\frac{\partial u}{\partial x^\mu} + \lambda_2 x_\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x^\mu}\right) = F_1(x, u),$$

u — скалярная функция,

$$\left\{x_\mu + \lambda_1\bar\Psi\gamma_\mu\Psi + \lambda_2\frac{\partial(\bar\Psi\Psi)}{\partial x_\mu}\right\}\left\{x^\mu + \lambda_1\bar\Psi\gamma^\mu\Psi + \lambda_2\frac{\partial(\bar\Psi\Psi)}{\partial x^\mu}\right\} = F_2(x, \Psi),$$

$$(x_\mu + \lambda_1\gamma_\mu\Psi + \lambda_2 p_\mu\Psi)(x^\mu + \lambda_1\gamma^\mu\Psi + \lambda_2 p^\mu\Psi) = F_3(x, \bar\Psi\Psi).$$

Рассмотреть случаи: $F_1 = \mathrm{const}$, $F_2 = \mathrm{const}$; $F_1 = x^2 \pm u^2$, $F_2 = x^2 \pm (\bar{\Psi}\Psi)$, $F_3 = x^2 \pm (\bar{\Psi}\Psi)$.

19. Исследовать симметрию и построить классы точных решений систем:

$$
\begin{aligned}
&p_\mu p^\mu u_1 = F_1(u_1, u_2),\\
&p_\mu p^\mu u_2 = F_2(u_1, u_2),\\
&(p_\mu u_1)(p^\mu u_2) = \mathrm{const},\\
&p_\mu u_1 p^\mu u_1 = m_1, \qquad p_\mu u_2 p^\mu u_2 = m_2, \qquad p_\mu u_1 p^\mu u_2 = m_3.
\end{aligned}
$$

20. Провести детальный теоретико-алгебраический анализ уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\gamma_\mu w^\mu + w^\mu \gamma_\mu)\Psi = \lambda\Psi, \qquad w_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu J^{\alpha\beta},\\
&\{\gamma_\mu P^\mu + \lambda\gamma_\mu(\bar{\Psi} w^\mu \Psi)\}\Psi = 0,
\end{aligned}
$$

Проанализировать случай, когда Ψ матрица 4×4. Обычно Ψ — столбец из 4 функций.

21. Исследовать симметрию и построить решения дифференциальных неравенств:

$$
\begin{aligned}
&(p_0 u)^2 - (p_a u)(p_a u) > 0;\\
&p_0 u > \left\{(p_1 u)^2 + (p_2 u)^2 + (p_3 u)^2\right\}^{1/2}, \qquad p_0 u > 0.
\end{aligned}
$$

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 278 с.
3. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, New York, Springer Verlag, 1986.
4. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
5. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.
6. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
7. Фущич В.И., Штелень В.М., О линейных и нелинейных системах диффереяциальных уравнениях, инвариантных относительно группы Шредингера, *Теор. и мат. физика*, 1983, **56**, № 3, 387–394.
8. Olver P.J., Rosenan P., The construction of special solutions to partial differential equations, *Phys. Lett. A*, 1986, **114**, № 3, 107–112.
9. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1987, **39**, № 1, 116–123.
10. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.
11. Шульга М.В., Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием, в кн: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 36–38.
12. Чопик В.И., О групповых свойствах линейных уравнений параболического типа с нелинейными дополнительными условиями, в кн: Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1987, 63–66.