Об одном обобщении метода разделения переменных для линейных систем дифференциальных уравнений

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Показано, что процедура построения решений в разделенных переменных тесно связана с исследованием совместности некоторой переопределенной системы дифференциальных уравнений.

1. Метод разделения переменных является одним иа наиболее аффектавных классических методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Его тесная связь с теоретико-групповыми свойствами уравнений была понята совсем независимо [1, 2]. Она состоит в том, что решение в разделенных переменных и параметры разделения являются соответственно собственной функцией и собственными значениями некоторого набора операторов $\{\Sigma_i\}$ симметрии рассматриваемого уравнения. Иначе говоря, справедпивы равенства

$$L\psi \equiv \{a_\mu(x)\partial_{x_\mu} + a(x)\}\psi(x) = 0, \quad \mu = \overline{0, n-1}, \tag{1}$$

$$\Sigma_i\psi = \lambda_i\psi, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{2}$$

где a_μ, a — переменные $(m\times m)$-матрицы, $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\lambda_i = \text{const}$, Σ_i — дифференциальные операторы, образующие $(n-1)$-мерную абелеву алгебру Ли симметрии уравнения (1), т.е. они удовлетворяют условиям

$$[\Sigma_i, \Sigma_j] = \Sigma_i\Sigma_j - \Sigma_j\Sigma_i = 0, \tag{3}$$

$$[L, \Sigma_i]\psi\Big|_{L\psi=0} = 0. \tag{4}$$

Поэтому решения уравнения (1), удовлетворявшие условиям (2), естественно называть решениями в разделенных переменных.

Система дифференциальных уравнений (1), (2) является переопределенной и условия (3), (4) обеспечивают ее совместность. Наше основное наблюдение состоит в том, что требования (3), (4) можно значительно ослабить и тем самым обобщить классическое определение разделения переменных.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Система уравнений*

$$\begin{aligned} &L\psi = 0, \\ &Q_i\psi \equiv \{b_i^\mu(x)\partial_{x_\mu} + b_i(x)\}\psi(x) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1987, С. 17–22.

где b_i^μ, b_i — переменные матрицы $(m \times m)$, совместна, если

$$
\begin{aligned}
&[Q_i, L] = B_i^k Q_k + B_i L,\\
&[Q_i, Q_j] = R_{ij}^k Q_k + R_{ij} L, \quad i, j, k = \overline{1, m}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В случае, когда

$$
\operatorname{rank}\begin{pmatrix}
a^0(x) & a^1(x) & \cdots & a^{n-1}(x)\\
b_1^0(x) & b_1^1(x) & \cdots & b_1^{n-1}(x)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
b_{n-1}^0(x) & b_{n-1}^1(x) & \cdots & b_{n-1}^{n-1}(x)
\end{pmatrix} = m \times n
\tag{7}
$$

условия (6) являются необходимыми и достаточными.

В (6) B_i^k, B_i, R_{ij}^k, R_{ij} — некоторые дифференциальные операторы первого порядка с матричными коэффициентами.

Доказательство. Проведем доказательство в предположении, что условие (7) выполнено.

Если в (4) $b_i^\mu(x) = \delta_i^\mu \delta_i(x)$, где δ_i^μ — символ Кронекера, то система (5) может быть записана в виде

$$
\partial_{x_\mu} \psi = A_\mu(x) \psi,
\tag{8}
$$

причем $A_0 = -a_0^{-1}(a_i A_i + a)$.

Хорошо известно (см., например, [3]), что необходимые и достаточные условия совместности системы диффервнциальных уравнений (8) таковы:

$$
[\partial_{x_\mu} - A_\mu, \partial_{x_\nu} - A_\nu] = \partial_{x_\nu} A_\mu - \partial_{x_\mu} A_\nu + [A_\mu, A_\nu] = 0.
\tag{9}
$$

Следовательно, для системы (8) утверждения теоремы справедливы. Идея доказательства состоит в том, что система (5) может быть получена из (8) последовательным применением преобразований эквивалентности

$$
\begin{aligned}
&L \to L,\\
&Q_i \to Q_i' = \begin{cases} Q_i, & i \neq k,\\ W_i Q_i, & i = k,\end{cases}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $W_i = W_i(x)$ — невырожденные переменные матрицы $(m \times m)$.

Замечание. Если в (6) $R_{ij} \equiv 0$, $B_i^k \equiv 0$, B_i — $(m \times m)$-матрицы, R_{ij}^k — константы, то требование (6) означает, что операторы Q_i образуют $(n-2)$-мерную алгебру Ли инвариантности уранненяя (1). Если же $R_{ij} \equiv 0$, $B_i^k \equiv 0$, то Q_i — нелиевские операторы симметрии уравнения (1) (см. [4]). Наконец, если не все R_{ij}, P_i^k равны нулю, то мы имеем дело с так называемой нарушенной симметрией [5–6].

Следствие. *Пусть операторы Q_i образуют суперaлгебру Ли инвариантности уравнения (1), тогда система (5) совместна.*

Таким образом, для того чтобы строить решения в разделенных переменных систем дифференциальных уравнений в частных производных, необходимо уметь классифицировать алгебраические объекты типа (5), частным случаем которых являются алгебры и супералгебры Ли. К настоящему времени эта задача нами частично решена лишь для алгебр Ли и некоторых простейших супералгебр.

Из доказательства теоремы следует, что при выполнении условия (7) систему (5) можно заменить эквивалентной ей системой дифференциальных уравнений (8). Если известно частное решение уравнений (9), то, подставляя его в систему (8) и находя ее общее решение, получаем решение в разделенных переменных исходной системы дифференциальных уравнений (1). Оказывается, что в ряде случаев с систему (9) решать проще, чем систему (1).

2. Эффективность нашего подхода продемонстрируем на линейном уравнении Дирака

$$(i\gamma_\mu \partial_{x_\mu} - m)\psi(x) = 0, \tag{11}$$

где γ_μ — матрицы Дирака размерности (4×4), $\psi(x)$ — четырехкомпонентный дираковский спинор.

Стандартное определение разделения переменных в уравнении Дирака (в декартовых координатах) таково [7, 8]:

$$\psi(x) = V_0(x_0)V_1(x_1)V_2(x_2)V_3(x_3)\chi, \tag{12}$$

где V_μ — переменные (4×4)-матрицы. Решения вида (12) получаются из (8), если положить $A_i = A_i(x_i)$, $i=\overline{1,3}$. При этом условия (9) примут вид

$$\partial_{x_i} A_0 = [A_i(x_i), A_0], \tag{13}$$

$$[A_i(x_i), A_j(x_j)] = 0, \quad i,j=\overline{1,3}, \tag{14}$$

где $A_0 = -\gamma_0\gamma_k A_k - im\gamma_0$.

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений (13), (14) совместна.*

Чтобы доказать это утверждение, необходимо убедиться в справедливости тождества

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} A_0 = \partial_{x_i}[A_j, A_0] = \partial_{x_j}[A_i, A_0] = \partial_{x_j}\partial_{x_i} A_0.$$

Но

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}[A_j, A_0] &= [A_j, \partial_{x_i} A_0] = [A_j, [A_i, A_0]] = \\ &= [A_i, [A_j, A_0]] = [A_i, \partial_{x_j} A_0] = \partial_{x_j}[A_i, A_0],\end{aligned}$$

что и требовалось.

Предложение 2. *Общее решение системы уравнений (8) имеет вид*

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\} U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\chi, \tag{15}$$

где

$$U_i(x_i) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{\theta_i}^{x_i} A_i(x_i)\cdots\int_{\theta_i}^{x_i}}_{n \text{ раз}} A_i(x_i)\, d^n x_i, \tag{16}$$

$A_i(x_i)$ — произвольные (4×4)-матрицы, удовлетворяющие условиям (13), (14), χ — произвольный постоянный спинор.

Доказательство. Покажем, что формула

$$\psi(x) = \exp\{A_0 x_0\}\varphi(\vec{x}) \tag{17}$$

дает решение системы (8), если

$$\partial_{x_i}\varphi = A_i(x_i)\varphi, \quad i = \overline{1,3}. \tag{18}$$

Действительно, в силу того, что $\partial_{x_0} A_0 \equiv 0$, имеем $\partial_{x_0}\psi = A_0\psi$, кроме того,

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\psi &= \partial_{x_i}\left\{\sum_n \frac{(x_0)^n}{n!} A_0^n\right\}\varphi(\vec{x}) = \\ &= \left\{\sum_n \frac{(x_0)^n}{n!} A_0^n\right\}\partial_{x_i}\varphi + \left\{\sum_n \frac{(x_0)^n}{n!}\partial_{x_i} A_0^n\right\}\varphi.\end{aligned} \tag{19}$$

Так как

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} A_0^n &= \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-1} + A_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_i} A_0^{n-2} + \cdots + A_0^{n-1}\frac{\partial A_0}{\partial x_i} = \\ &= [A_i, A_0] A_0^{n-1} + \cdots + A_0^{n-1}[A_i, A_0] = [A_i, A_0^n],\end{aligned} \tag{20}$$

то, подставляя (19), (20) в (8), получаем

$$\exp\{A_0 x_0\}(\partial_{x_i}\varphi - A_i\varphi) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что общее решение системы уравнений (18) может быть записано в виде

$$\varphi(x) = U_1(x_1)U_2(x_2)U_3(x_3)\chi,$$

где U_i — матрицант i-го уравнения из (18) задается формулой (16). Для этого необходимо воспользоваться тождестдвом

$$\Big[A_i, \underbrace{\int_{\theta_j}^{x_j} A_j(x_j)\cdots\int_{\theta_j}^{x_j}}_{n\ \text{раз}} A_j(x_j)\, d^n x_j\Big] = 0,$$

из которого $[A_i(x_i), U_j(x_j)] = 0$, $i \neq j$.

Особенно простой вид имеют формулы (13)–(16) в том случае, когда матрицы A_i постоянные. Из (13), (14) следует, что они должны удовлетворять следующей нелинейной алгебраической системе матричных уравнений:

$$[A_i, A_j] = 0, \quad [\gamma_0\gamma_k A_k + im\gamma_0, A_i] = 0, \tag{21}$$

при этом решение уравнения (11)

$$\psi(x) = \exp\{-(\gamma_0\gamma_k A_k + im\gamma_0)x_0 + A_j x_j\}\chi. \tag{22}$$

Удается найти общее решение соотношений (21), однако, полученный результат очень громоздкий. Приведем здесь только некоторые частные решения

$$\begin{aligned}&A_1 = -im\gamma_1, \quad A_2 = \theta\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad A_3 = \theta\gamma_1, \\ &A_1 = \theta_1 + \theta_2\gamma_0 + \theta_3\gamma_1\gamma_2 + \theta_4\gamma_3\gamma_4, \quad A_2 = \gamma_2\gamma_1 A_1, \quad A_3 = 0,\end{aligned} \tag{23}$$

$\theta, \theta_1, \ldots, \theta_4$ — прозвольные комплексные константы.

Подставляя (23) в (24), получаем многопараметрические семейства точных решений уравнения Дирака.

Отметим, что операторы $Q_i = \partial_{x_i} - A_i$, образуя алгебру Ли, вообще говоря, не являются операторами симметрии уравнения Дирака, так как

$$[L, Q_i] = [\gamma_0, A_i]\gamma_0 L + \gamma_0[\gamma_0\gamma_k, A_i]Q_k, \quad i = \overline{1,3}.$$

1. Миллер У., Разделение переменных, М., Мир, 1981, 340 с.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н., Точные решения релятивистских волновых уравнений, Новосибирск, Наука, 1982, 142 с.
3. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, М., Изд-во иностр. лит., 1947, 359 с.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
5. Fushchych W.I., Tsifra I.M., On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1987, **20**, № 2, L45–L48.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1987, 214 p.
7. Cook A.H., On separable solutions of Dirac's equation for the electron, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1982, **333**, 247–278.
8. Kalnius E.G., Miller W., Williams G.C., Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1986, **27**, № 8, 1893–1900.