Конформно-инвариантное обобщение уравнения Дирака–Гейзенберга и его точные решения

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ, Р.З. ЖДАНОВ

Рассмотрим следующее пуанкаре-инвариантное нелинейное обобщение уравнения Дирака

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu[i\partial_\mu + F_1\bar\psi\gamma_\mu\psi + F_2\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi + F_3(\bar\psi\gamma_\mu\psi)\gamma_4 + F_4(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)\gamma_4]\psi+\\ &\quad +F_5(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\sigma^{\mu\nu}\psi + F_6(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)\gamma_4\sigma^{\mu\nu}\psi = (F_7+F_8\gamma_4)\psi,\end{aligned} \tag{1}$$

где $F_1,\ldots,F_8$ — произвольные функции от $\bar\psi\psi$, $\bar\psi\gamma_4\psi$, $\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$.

В настоящей работе мы выделим из этого множества уравнений такие уравнения, которые инвариантны относительно масштабных преобразований

$$x'_\mu = e^\theta x_\mu, \qquad \psi'(x') = e^{k\theta}\psi(x), \qquad k,\theta = \mathrm{const} \tag{2}$$

и конформных преобразований (см., например, [1–5]):

$$\begin{aligned}&x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \psi'(x') = \sigma(x)(1-\gamma c\gamma x)\psi(x),\\ &\sigma(x) \equiv 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad \nu = 0,1,2,3.\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно масштабных преобразований (2) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}&F_1 = \Phi_1\left[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_2 = \Phi_2\left[(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k},\\ &F_3 = \Phi_3\left[(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_4 = \Phi_4\left[(\bar\psi\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma_4\gamma^\mu\psi)\right]^{-(1+2k)/4k},\\ &F_5 = \Phi_5\left[(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)(\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)\right]^{-(1+2k)/4k}, && F_6 = \Phi_6\left[(\bar\psi\sigma_{\mu\nu}\psi)(\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi)\right]^{-(1+2k)/4k},\\ &F_7 = \Phi_7(\bar\psi\psi)^{-1/2k}, && F_8 = \Phi_8(\bar\psi\psi)^{-1/2k},\end{aligned} \tag{4}$$

а $\Phi_1,\ldots,\Phi_8$ произвольные функции, зависящие от $\bar\psi\psi/\bar\psi\gamma_4\psi$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что преобразования (2) оставляют уравнение (1) инвариантным, если и только если выполняются условия:

$$\begin{aligned}&e^{\theta(2k+1)}F_B(\bar\psi\psi e^{2k\theta}, \bar\psi\gamma_4\psi e^{2k\theta}) = F_B(\bar\psi\psi, \bar\psi\gamma_4\psi), \qquad B = 1,2,\ldots,6,\\ &e^{\theta(k+1)}F_C(\bar\psi\psi e^{2k\theta}, \bar\psi\gamma_4\psi e^{2k\theta}) = F_C(\bar\psi\psi, \bar\psi\gamma_4\psi), \qquad C = 7,8.\end{aligned} \tag{5}$$

Труды третьего международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Юрмала, 22–24 мая 1985 г., Москва, Наука, 1986, Т.1, С. 497–501.

Общее решение этих функциональных соотношений с учетом известных тождеств [5]

$$
\begin{aligned}
&(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 - (\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi) = 0,\\
&(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_4\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi) = 0,\\
&(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - (\bar{\psi}\gamma_4\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_4\gamma^\mu\psi) = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

можно записать в виде (4).

Теорема 2. *Уравнение (1) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$, если и только если функции $F_1,\ldots,F_8$ имеют вид (4) и $k=-3/2$.*

Доказательство. Поскольку конформная группа $C(1,3)$ содержит расширенную группу Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)=\{P(1,3),D\}$ (D — обозначает группу масштабных преобразований (2)), то для доказательства необходимости можно воспользоваться результатом предыдущей теоремы. Далее непосредственной проверкой можно убедиться, что преобразования (3) оставляют инвариантным уравнение (1) с функциями (4) только при $k=-3/2$.

Следствие. Если $F_7=\lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}$, а все остальные F_A равны нулю, то уравнение (1) совпадает с уравнением Дирака–Гюрши [3]:

$$
\left[i\gamma\partial - \lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\right]\psi = 0.
\tag{7}
$$

В том случае, когда $F_4=\lambda[(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi]^{-1/3}$, а все остальные F_B равны нулю, мы получаем конформно-инвариантное уравнение

$$
\left(i\gamma\partial + \lambda\frac{(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu}{[(\bar{\psi}\gamma_\nu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)]^{1/3}}\right)\psi = 0,
\tag{8}
$$

которое можно рассматривать как обобщение нелинейного уравнения Дирака–Гейзенберга [4]:

$$
\left[i\gamma\partial + \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\right]\psi = 0.
\tag{9}
$$

Как известно [4], уравнение (9) неинвариантно относительно конформных преобразований.

Воспользуемся конформной симметрией уравнения (8) для построения его точных решений. Следуя [6,1], решения ищем в виде:

$$
\psi = \varphi(\beta x),\ \ \beta x \equiv \beta^\nu x_\nu,\ \ \beta^\nu = \mathrm{const} \quad \text{— трансляционно-инвариантные,}
\tag{10}
$$

$$
\psi = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}\Phi\left(\frac{\beta x}{x^\alpha x_\alpha}\right) \quad \text{— конформно-инвариантные.}
\tag{11}
$$

Подстановка этих выражений в (8) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
i\gamma\beta\frac{du}{d\omega} + \nu\frac{(\bar{u}\gamma_\mu u)\gamma^\mu u}{[(\bar{u}\gamma_\nu u)(\bar{u}\gamma^\nu u)]^{1/3}} = 0,
\tag{12}
$$

где $u = \left\{\varphi(\omega), \omega = \beta x \text{ или } \Phi(\omega);\ \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}\right\}$, $\nu = \lambda$ для φ, $\nu = -\lambda$ для Φ. В зависимости от ν получаем (χ — постоянный спинор, $\beta_\mu = \frac{\bar\chi\gamma_\mu\chi}{[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)(\chi\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}$):

$$
\begin{aligned}
&\text{(а)}\quad \operatorname{Im}\nu = 0, \quad u = e^{i\nu\omega}\chi,\\
&\text{(б)}\quad \operatorname{Re}\nu = 0, \quad u = \left(c + \tfrac{2}{3}\mu\omega\right)^{-3/2}\chi, \quad \mu = \operatorname{Im}\nu,\\
&\text{(в)}\quad \operatorname{Im}\nu\operatorname{Re}\nu \neq 0, \quad u = (f_1 + if_2)\chi, \quad \nu = \nu_1 + i\nu_2,\\
&\qquad f_1 = \pm\left[(w-2v)^{1/2} + (w+2v)^{1/2}\right],\\
&\qquad f_2 = \mp\left[(w-2v)^{1/2} - (w+2v)^{1/2}\right],\\
&\qquad \int\frac{dv}{\left(c_1 - 2\frac{\nu_2}{\nu_1}v^2\right)^{2/3}} = 2\nu_1\omega + c_2, \quad w = \left(c_1 - 2\frac{\nu_2}{\nu_1}v^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Замечание. Покажем, что конформно-инвариантный анзац (11) можно также получить из трансляционно-инвариантного (10) с помощью процедуры размножения решений. Как показано в [1, 2], формула генерирования решений с помощью конформных преобразований (3) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\psi_{\text{new}}(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma^2(x)}\psi_{\text{old}}(x'), \qquad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)},\\
&\sigma(x) \equiv 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad x^2 \equiv x^\nu x_\nu.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Применяя (14) при $c_0 = 1$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ к (10) с последующим переходом от x_0 к x_0+1 (в силу инвариантности уравнения относительно трансляций), получаем (11).

Применим теперь процедуру размножения решений к конформно-инвариантному решению (11), (13а)

$$
\psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}\exp\left\{-i\lambda\frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}\right\}\chi, \qquad \beta_\mu = \frac{\bar\chi\gamma_\mu\chi}{[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)(\bar\chi\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}. \tag{15}
$$

Совершив над (15) преобразование трансляций $x_\mu \to x_\mu + a_\mu$ ($a_\mu = \text{const}$), получим другое семейство решений

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) = \frac{\gamma x + \gamma a}{(x^2 + 2ax + a^2)^2}\exp\left\{-i\lambda\frac{\beta x + \beta a}{x^2 + 2ax + a^2}\right\}\chi,\\
&\beta_\mu = \frac{\bar\chi\gamma_\mu\chi}{[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)(\bar\chi\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Это семейство замечательно тем, что оно уже неразмножается с помощью преобразований группы $C(1,3)$. Убедимся в этом. Очевидно, что (16) неразмножимо с помощью трансляций. Применяя к (16) формулы (14), получаем

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma^2(x,c)}\frac{\frac{\gamma x - \gamma c x^2}{\sigma(x,c)} + \gamma a}{\left[a^2 + 2\frac{ax + acx^2 + x^2}{\sigma(x,c)}\right]^2}\exp\left\{-i\lambda\frac{\frac{\beta x - \beta c x^2}{\sigma(x,c)} + \beta a}{a^2 + 2\frac{ax - acx^2 + x^2}{\sigma(x,c)}}\right\}\chi,\\
&\sigma(x,c) = 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad \beta_\mu = \frac{\bar\chi\gamma_\mu\chi}{[(\bar\chi\gamma_\nu\chi)(\bar\chi\gamma^\nu\chi)]^{1/3}}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Легко видеть, что (17) можно переписать в виде (16), если совершить замену параметров

$$\begin{aligned} &a_\mu \to \tilde{a}_\mu = -\frac{a_\mu - c_\mu a^2}{\sigma(a,c)}, \qquad \chi \to \tilde{\chi} = \frac{1-\gamma c\gamma a}{\sigma^2(a,c)}, \\ &\sigma(a,c) = 1 - 2ac + a^2c^2, \qquad \beta_\mu \to \tilde{\beta}_\mu = \frac{\bar{\tilde{\chi}}\gamma_\mu\tilde{\chi}}{[(\bar{\tilde{\chi}}\gamma_\nu\tilde{\chi})(\bar{\tilde{\chi}}\gamma^\nu\tilde{\chi})]^{1/3}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Неразмножимость (16) остальными преобразованиями группы $C(1,3)$ вполне очевидна.

В заключение отметим, что мы использовали симметрию для получения точных решений нелинейного уравнения Дирака [1, 2, 11], нелинейных уравнений квантовой электродинамики [7], уравнений Янга–Миллса [8] и некоторых скалярных нелинейных уравнений, таких, как Лиувилля, эйконала, Монжа–Ампера, Гамильтона–Якоби [6, 9, 10, 11].

1. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, **16**, 1983, 271.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88.
3. Gursey F., *Nuovo Cim.*, 1956, № 1, 88.
4. Гейзенберг В., Введение в единую полевую теорию элементарных частиц, М., Мир, 1968, 239 с.
5. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P., *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 5.
6. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6.
7. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, 215.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cim.*, 1983, **38**, 37.
9. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498.
10. Fushchych W.I., Serov N.I., *J. Phys. A*, 1983, **16**, 3645.
11. Фущич В.И., Серов Н.И., Штелень В.М., В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, М., Наука, 1983, Т.2, 407.