Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ФЕДОРЧУК, И.М. ФЕДОРЧУК

Найдены инварианты расщепляющихся подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ — группы вращений и сдвигов в 5-мерном псевдоевклидовом пространстве. Произведена редукция нелинейного уравнения Даламбера и релятивистского уравнения Гамильтона к дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных. Построены классы точных решений этих уравнений.

Введение

На основании подгрупповой структуры групп инвариантности дифференциальных уравнений можно находить точные решения этих уравнений.

Линейные волновые уравнения в пятимерном пространстве Минковского используются в квантовой теории для описания частиц с переменной массой [1]. Нелинейные волновые уравнения в пространстве Минковского $M(1,n)$ рассмотрены в работах [2–6], где, в частности, исследована симметрия этих уравнений и построены в явном виде, с помощью специальных анзацов, многопараметрические семейства точных решений.

В математической физике широко используется уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона. В работе [7] исследована симметрия этого уравнения, и на основании специальных анзацов найдены многопараметрические семейства точных решений. В [7], в частности, доказано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнения эйконала является конформная группа $C(1,4)$ в $(4+1)$-мерном пространстве Пуанкаре–Минковского. К настоящему времени подгруппы конформной группы $C(1,4)$ не описаны. Хорошо известно, что группа $C(1,4)$ содержит в качестве подгруппы группу $P(1,4)$. $P(1,4)$ — группа движений пространства Минковского $M(1,4)$. Подгрупповая структура группы $P(1,4)$ изучена в работах [8–12].

В данной работе на основании подгрупповой структуры группы $P(1,4)$ построены точные решения нелинейных волновых уравнений. При этом рассматривались только расщепляющиеся подалгебры [8, 9] алгебры Ли группы $P(1,4)$.

Дадим краткую характеристику работы. В § 1 найдены инварианты расщепляющихся подгрупп (локальных групп Ли, соответствующих расщепляющимся подалгебрам) группы $P(1,4)$. В § 2 построены классы точных решений нелинейного волнового уравнения. В § 3 найдены семейства точных решений уравнения эйконала. В § 4 исследовано уравнение эйконала с нулевой массой.

Препринт № 86.27, Киев, Институт математики АН УССР, 1986, 36 с.

§ 1. Инварианты расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$

Алгебра Ли группы $P(1,4)$ задается базисными элементами P_μ и $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\mu\sigma}P_\nu - g_{\nu\sigma}P_\mu,$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho},$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ — метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ если $\mu \neq \nu$.

Для нее выбрано следующее представление:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$P_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad M_{\mu\nu} = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu).$$

Ниже мы приводим функционально независимые решения систем уравнений

$$X_i I(x) = 0,$$

где $\{X_i\}$, $i = 1, \ldots, \dim P_{ik}$ — базисы расщепляющихся подалгебр P_{jk} алгебры Ли группы $P(1,4)$. Эти решения и являют собой инварианты соответствующих расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$. Наиболее удобно представить весь список инвариантов в виде таблиц.

1.1. Одномерные инварианты. Ниже выписаны одномерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$ в пространстве Минковского $M(1,4)$.

Таблица 1. Одномерные инварианты

№	Переменные	№	Переменные
1.	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$	9.	$\left(x_4^2 + x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2\right)^{1/2}$
2.	$\left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}$	10.	x_0
3.	$\left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$	11.	x_1
4.	$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$	12.	x_2
5.	$\left(x_4^2 + x_3^2 - x_0^2\right)^{1/2}$	13.	x_3
6.	$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$	14.	x_4
7.	$\left(x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2\right)^{1/2}$	15.	$x_0 + x_4$
8.	$\left(x_4^2 + x_2^2 + x_1^2 - x_0^2\right)^{1/2}$	16.	$x_0 - x_4$

1.2. Двумерные инварианты. Ниже выписаны двумерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$ в пространстве Минковского $M(1,4)$.

Таблица 2. Двумерные инварианты

№	Инварианты ω_1, ω_2	№	Инварианты ω_1, ω_2
1.	$\left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}$, $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$	2.	x_3, $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$
3.	x_2, x_3	4.	x_2, $\left(x_4^2 + x_3^2 - x_0^2\right)^{1/2}$
5.	x_0, $\left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$	6.	x_0, $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$
7.	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, $\left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$	8.	x_0, $\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}$

Продолжение табл. 2

№	Инварианты ω_1, ω_2	№	Инварианты ω_1, ω_2
9.	$x_3,\ x_4$	10.	$x_0,\ x_4$
11.	$x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$	12.	$x_0,\ x_3$
13.	$\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2},\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$	14.	$x_3,\ \left(x_4^2+x_2^2+x_1^2-x_0^2\right)^{1/2}$
15.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ \left(x_4^2+x_3^2-x_0^2\right)^{1/2}$	16.	$x_1,\ x_2$
17.	$x_3,\ \left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2}$	18.	$x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2\right)^{1/2}$
19.	$x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$	20.	$x_0,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$
21.	$x_0+x_4,\ x_3^2-2x_0(x_0+x_4)$	22.	$x_0+x_4,$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_0(x_0+x_4)$
23.	$x_0+x_4,\ x_1^2+x_2^2-2x_0(x_0+x_4)$	24.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\dfrac{1}{d}\ln(x_0+x_4),$ $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$
25.	$\ln\left(x_0^2-x_4^2\right)-$ $-2e\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+$ $+2\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}},\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$	26.	$\ln\left(x_0^2-x_4^2\right)+$ $+2e\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-$ $-2\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}},\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$
27.	$x_0+x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$	28.	$x_3,\ x_0-x_4$
29.	$x_2,\ x_0+x_4$	30.	$x_0-x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$
31.	$x_3,\ x_0+x_4$	32.	$x_0+x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$
33.	$x_0-x_4,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$		

1.3. Трехмерные инварианты. Приведем трехмерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$ в пространстве Минковского $M(1,4)$.

Таблица 3. Трехмерные инварианты

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3	№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3
1.	$x_0,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ x_3$	2.	$x_1,\ x_2,\ x_3$
3.	$x_2,\ x_3,\ x_4$	4.	$x_0,\ x_3,\ x_4$
5.	$x_0,\ \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2},\ x_4$	6.	$\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2},\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ x_3$
7.	$x_1,\ x_2,\ \left(x_3^2+x_4^2-x_0^2\right)^{1/2}$	8.	$\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2},\ x_2,\ x_3$
9.	$x_0,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ \left(x_3^2+x_4^2\right)^{1/2}$	10.	$x_0,\ \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ x_4$
11.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\ x_3,\ x_4$	12.	$x_0+x_4,\ x_3^2-2x_0(x_0+x_4),\ x_2$
13.	$x_0+x_4,\ x_1^2+x_2^2-$ $-2x_0(x_0+x_4),\ x_3$	14.	$x_0+x_4,\ x_3^2-2x_0(x_0+x_4),$ $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$
15.	$\ln\left(x_0^2-x_4^2\right)-$ $-2e\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+$	16.	$\ln\left(x_0^2-x_4^2\right)+$ $+2e\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-$

Продолжение табл. 3

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3	№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3
	$+2\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3		$-2\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3
17.	$\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}+$ $+\dfrac{1}{e}\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, $\left(x_3^2+x_4^2\right)^{1/2}$	18.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-$ $-\dfrac{1}{d}\ln(x_0+x_4)$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, $\left(x_3^2+x_4^2-x_0^2\right)^{1/2}$
19.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-$ $-\dfrac{1}{e}\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, $\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2}$	20.	x_2, x_3, x_0+x_4
21.	x_2, x_3, x_0-x_4	22.	x_1, x_2, x_0+x_4
23.	x_0+x_4, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3	24.	x_0-x_4, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3
25.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\dfrac{x_3}{\varepsilon(x_0+x_4)}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_0+x_4		

1.4. Четырехмерные инварианты. Ниже выписаны четырехмерные инварианты расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$ в пространстве Минковского $M(1,4)$.

Таблица 4. Четырехмерные инварианты

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4	№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4
1.	x_1, x_2, x_3, x_4	2.	x_0, x_2, x_3, x_4
3.	x_0, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, x_4	4.	x_1, x_2, x_3, $\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2}$
5.	x_0+x_4, $x_3^2-2x_0(x_0+x_4)$, x_1, x_2	6.	$\dfrac{1}{e}\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+$ $+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, $\left(x_3^2+x_4^2\right)^{1/2}$, x_0
7.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-$ $-\dfrac{1}{e}\,\mathrm{arch}\,\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x_4^2}}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$,	8.	$\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+$ $+\dfrac{x_3}{\varepsilon(x_0+x_4)}$, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$,

Продолжение табл. 4

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4	№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4
	$\left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}$, x_3		$x_0 + x_4$, $x_3^2 - 2x_0(x_0 + x_4)$
9.	x_1, x_2, x_3, $x_0 + x_4$	10.	x_1, x_2, x_3, $x_0 - x_4$

§ 2. Частные решения нелинейного волнового уравнения

В данном параграфе рассматривается нелинейное волновое уравнение в пятимерном пространстве

$$\Box u = F(u), \tag{2.1}$$

где

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2},$$

$u(x) = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ — скалярная дважды дифференцируемая функция x, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция зависимой переменной u. Группой инвариантности уравнения (2.1) является $P(1,4)$. Для нахождения точных решений этого уравнения использована подгрупповая структура группы $P(1,4)$. Здесь рассмотрены только расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли группы $P(1,4)$, использование которых редуцирует уравнение (2.1) к уравнениям с меньшим числом переменных.

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Рассмотрим анзацы вида

$$u = \varphi(\omega), \tag{2.2}$$

где ω — одномерные инварианты соответствующих подгрупп группы $P(1,4)$. Подставляя (2.2) в (2.1), получаем ОДУ вида:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega}k\omega^{-1} = \varepsilon F(\varphi), \tag{2.3}$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть $F(\varphi) = \lambda\varphi^n$ $(n \neq 1)$, тогда уравнение (2.3) имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{d\varphi}{d\omega}k\omega^{-1} = \varepsilon\lambda\varphi^n \qquad (n \neq 1). \tag{2.4}$$

В этом случае частное решение (2.4) ищем в виде

$$\varphi = d\omega^\nu. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), находим следующие выражения для d и ν:

$$d = \left[\frac{2[1 + k + n(1-k)]}{\varepsilon\lambda(1-n)^2}\right]^{1/(n-1)}, \qquad \nu = \frac{2}{1-n}. \tag{2.6}$$

Поэтому частные решения уравнения (2.1) с правой частью $F(u) = \lambda u^n$ $(n \neq 1)$ выражаются формулами (2.2) и (2.5) с учетом (2.6). Переменные ω, k и ε выписаны в таблице 5.

Таблица № 5

№	Переменные ω	k	ε
1.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$	1	-1
2.	$\left(x_0^2-x_4^2\right)^{1/2}$	1	1
3.	$\left(x_3^2+x_4^2\right)^{1/2}$	1	-1
4.	$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$	2	-1
5.	$\left(x_4^2+x_3^2-x_0^2\right)^{1/2}$	2	-1
6.	$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^{1/2}$	3	-1
7.	$\left(x_3^2+x_2^2+x_1^2-x_0^2\right)^{1/2}$	3	-1
8.	$\left(x_4^2+x_2^2+x_1^2-x_0^2\right)^{1/2}$	3	-1
9.	$\left(x_4^2+x_3^2+x_2^2+x_1^2-x_0^2\right)^{1/2}$	4	-1

Если $k=0$, уравнение (2.3) интегрируется в квадратурах. В этом случае для уравнения (2.4) получается такой результат:

$$\omega+C_0=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\varepsilon\lambda\varphi^{n+1}/(n+1)+C_1}}, \tag{2.7}$$

где C_0 и C_1 — произвольные постоянные, ω — одна из следующих переменных x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Для первой из них $\varepsilon=1$, для остальных переменных $\varepsilon=-1$. Для переменных $\omega_1=x_0+x_4$ и $\omega_2=x_0-x_4$ $\Box\varphi(\omega)\equiv 0$.

2.2. Дифференциальные уравнения в двумерном пространстве. Рассмотрим анзацы вида

$$u(x)=\varphi(\omega_1,\omega_2), \tag{2.8}$$

где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ — инварианты подгрупп группы $P(1,4)$, выписанные в табл. 2. Подставляя (2.8) в (2.1), получаем следующие двумерные дифференциальные уравнения с частными производными (ДУЧП) ($\varphi_{ik}=\partial^2\varphi/\partial\omega_i\omega_k$, $i,k=1,2$):

1) $\varphi_{11}-\varphi_{22}+\varphi_1\omega_1^{-1}-\varphi_2\omega_2^{-1}=F(\varphi)$,
2) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_2\omega_2^{-1}=-F(\varphi)$,
3) $\varphi_{11}+\varphi_{22}=-F(\varphi)$,
4) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+2\varphi_2\omega_2^{-1}=-F(\varphi)$,
5) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_2\omega_2^{-1}=F(\varphi)$,
6) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_2\omega_2^{-1}=F(\varphi)$,
7) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_1\omega_1^{-1}+\varphi_2\omega_2^{-1}=-F(\varphi)$,
8) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-3\varphi_2\omega_2^{-1}=F(\varphi)$,
9) $\varphi_{11}+\varphi_{22}=-F(\varphi)$,
10) $\varphi_{11}-\varphi_{22}=F(\varphi)$,
11) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_2\omega_2^{-1}=-F(\varphi)$,
12) $\varphi_{11}-\varphi_{22}=F(\varphi)$,

13) $\varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_1\omega_1^{-1} - 2\varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
14) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
15) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_1\omega_1^{-1} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
16) $\varphi_{11} + \varphi_{22} = -F(\varphi)$,
17) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
18) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 3\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
19) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
20) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - 2\varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
21) $4\left(\omega_1^2 - \omega_2\right)\varphi_{22} - 4\omega_1\varphi_{12} - 6\varphi_2 = F(\varphi)$,
22) $4\left(\omega_2 - \omega_1^2\right)\varphi_{22} + 4\omega_1\varphi_{12} + 10\varphi_2 = -F(\varphi)$,
23) $4\left(\omega_2 - \omega_1^2\right)\varphi_{22} + 4\omega_1\varphi_{12} + 8\varphi_2 = -F(\varphi)$,
24) $\omega_2^{-2}\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
25) $4e^2\omega_2^{-2}\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
26) $4e^2\omega_2^{-2}\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$.

Остальные двумерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим ОДУ

27) $\varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
28) $\varphi_{11} = -F(\varphi)$,
29) $\varphi_{11} = -F(\varphi)$,
30) $\varphi_{22} + \varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
31) $\varphi_{11} = -F(\varphi)$,
32) $\varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$,
33) $\varphi_{22} + 2\varphi_2\omega_2^{-1} = -F(\varphi)$.

2.3. Дифференциальные уравнения в трехмерном пространстве. Рассмотрим анзацы вида

$$u(x) = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \tag{2.9}$$

где $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$ — инварианты подгрупп группы $P(1,4)$, выписанные в табл. 3. Подставляя (2.9) в (2.1), получаем следующие трехмерные ДУЧП ($\varphi_{ik} = \partial^2\varphi/\partial\omega_i\omega_k$, $i,k = 1,2,3$):

1) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
2) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$,
3) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = -F(\varphi)$,
4) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} = F(\varphi)$,
5) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - 2\varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
6) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \varphi_1\omega_1^{-1} - \varphi_2\omega_2^{-1} = F(\varphi)$,
7) $\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} + 2\varphi_3\omega_3^{-1} = -F(\varphi)$,
8) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \varphi_1\omega_1^{-1} = F(\varphi)$,
9) $\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} - \varphi_2\omega_2^{-1} - \varphi_3\omega_3^{-1} = F(\varphi)$,

10) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_{33}-\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=F(\varphi)$,
11) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{1}\omega_{1}^{-1}=-F(\varphi)$,
12) $4\left(\omega_{1}^{2}-\omega_{2}\right)\varphi_{22}-\varphi_{33}-4\omega_{1}\varphi_{12}-6\varphi_{2}=F(\varphi)$,
13) $4\left(\omega_{2}-\omega_{1}^{2}\right)\varphi_{22}+\varphi_{33}+4\omega_{1}\varphi_{12}+8\varphi_{2}=-F(\varphi)$,
14) $4\left(\omega_{1}^{2}-\omega_{2}\right)\varphi_{22}-\varphi_{33}-\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}-4\omega_{1}\varphi_{12}-6\varphi_{2}=F(\varphi)$,
15) $4e^{2}\omega_{2}^{-2}\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=-F(\varphi)$,
16) $4e^{2}\omega_{2}^{-2}\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=-F(\varphi)$,
17) $\left(e^{-2}\omega_{2}^{-2}+\dfrac{1}{4}\omega_{3}^{-2}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}+\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}=-F(\varphi)$,
18) $\omega_{2}^{-2}\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}+2\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}-2d^{-1}\varphi_{13}\omega_{3}^{-1}=-F(\varphi)$,
19) $\left(e^{-2}\omega_{3}^{-2}+\omega_{2}^{-2}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}-\varphi_{33}-\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}=-F(\varphi)$.

Остальные трехмерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим двумерным ДУЧП:

20) $\varphi_{11}+\varphi_{22}=-F(\varphi)$,
21) $\varphi_{11}+\varphi_{22}=-F(\varphi)$,
22) $\varphi_{11}+\varphi_{22}=-F(\varphi)$,
23) $\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=-F(\varphi)$,
24) $\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=-F(\varphi)$,
25) $\left(\omega_{2}^{-2}+\omega_{3}^{-2}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=-F(\varphi)$.

2.4. Дифференциальное уравнение в четырехмерном пространстве. Рассмотрим анзацы вида:

$$u(x)=\varphi(\omega_{1},\omega_{2},\omega_{3},\omega_{4}), \tag{2.10}$$

где $\omega_1(x),\ldots,\omega_4(x)$ — инварианты подгрупп группы $P(1,4)$, выписанные в табл. 4. Подставляя (2.10) в (2.1), получаем следующие четырехмерные ДУЧП ($\varphi_{ik}=\partial^2\varphi/\partial\omega_i\omega_k,\ i,k=1,2,3,4$):

1) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\varphi_{44}=-F(\varphi)$,
2) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_{33}-\varphi_{44}=F(\varphi)$,
3) $\varphi_{11}-\varphi_{22}-\varphi_{33}-\varphi_{44}-\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}=F(\varphi)$,
4) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}-\varphi_{44}-\varphi_{4}\omega_{4}^{-1}=-F(\varphi)$,
5) $4\left(\omega_{1}^{2}-\omega_{2}\right)\varphi_{22}-\varphi_{33}-\varphi_{44}-4\omega_{1}\varphi_{12}-6\varphi_{2}=F(\varphi)$,
6) $\left(e^{-2}\omega_{2}^{-2}+\dfrac{1}{4}\omega_{3}^{-2}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}-\varphi_{44}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}+\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}=-F(\varphi)$,
7) $\left(e^{-2}\omega_{3}^{-2}+\omega_{2}^{-2}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}-\varphi_{33}+\varphi_{44}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}-\varphi_{3}\omega_{3}^{-1}=-F(\varphi)$,
8) $\left(\omega_{2}^{-1}+\omega_{3}^{-1}\right)\varphi_{11}+\varphi_{22}+4\omega_{3}\varphi_{34}+4\left(\omega_{4}-\omega_{3}^{2}\right)\varphi_{44}+\varphi_{2}\omega_{2}^{-1}-$
$-2\varphi_{4}=-F(\varphi)$,

Остальные четырехмерные инварианты редуцируют уравнение (2.1) к следующим трехмерным ДУЧП:

9) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}=-F(\varphi)$,
10) $\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}=-F(\varphi)$,

§ 3. Некоторые точные решения релятивистского уравнения эйконала

Релятивистское уравнение эйконала или релятивистское уравнение Гамильтона

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = m^2 \tag{3.1}$$

является одним из основных в математической физике. Не уменьшая общности, можно положить $m = 1$ и рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1. \tag{3.2}$$

В работе [7] показано, что максимальной локальной группой инвариантности уравнения (3.2) является конформная группа $C(1,4)$ в $(4+1)$-мерном пространстве Пуанкаре–Минковского с метрикой

$$s^2 = x^\alpha x_\alpha \equiv g^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2,$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 4$; $x_4 = u$; $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \{1, -1, -1, -1, -1\}\delta_{\alpha\beta}$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Базисные элементы алгебры инвариантности имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} &P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ &P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad M_{\mu\nu} = -(x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Среди инвариантов, выписанных в § 1, рассмотрим только те, которые удовлетворяют необходимым условиям существования инвариантных решений [13].

На основании одномерных инвариантов получены следующие решения уравнения (3.2):

$$\begin{array}{llll} 1) & x_0^2 - u^2 = 0, & 5) & u = x_0 - C, \\ 2) & x_0^2 - x_3^2 - u^2 = 0, & 6) & x_3^2 + u^2 = 0, \\ 3) & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 = 0, & 7) & x_0^2 - x_1^2 - x_3^2 - u^2 = 0, \\ 4) & u = C - x_0, & 8) & u^2 - x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. \end{array} \tag{3.4}$$

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Использование некоторых двумерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к ОДУ. Для этого рассмотрим анзацы вида [2]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{3.5}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции, $\varphi(\omega)$ — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению. Подставляя (3.5) в уравнение (3.2), получаем ОДУ для функции $\varphi(\omega)$. Полученные результаты представлены таблицей 6.

Решения уравнений (1)–(4) (см. таблицу № 6) имеют вид:

1) $\varphi(\omega) = C$,
2) $\varphi(\omega) = i\varepsilon\omega^{1/2} + C, \quad (\varepsilon = \pm 1)$,
3) $\varphi(\omega) = \varepsilon\omega + C$,
4) $\varphi(\omega) = i\varepsilon\omega + C$.

Подставляя найденные $\varphi(\omega)$ в (3.5), получаем точные решения уравнения эйконала.

Таблица № 6

№	Инварианты ω, ω_1	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения	
1.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ x_0+u$	1	$-x_0$		
2.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ x_0-u$	-1	x_0		
3.	$x_1^2+x_2^2,\ u+x_0$	1	$-x_0$		
4.	$x_3,\ x_0+u$	1	$-x_0$	$\varphi'(\omega)=0$	(1)
5.	$x_2,\ x_0+u$	1	$-x_0$		
6.	$x_3,\ x_0-u$	-1	x_0		
7.	$x_1^2+x_2^2,\ x_0-u$	-1	x_0		
8.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2,\ u$	1	0		
9.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2\omega=-\dfrac{1}{4}$	(2)
10.	$x-1^2+x_2^2,\ u$	1	0		
11.	$x_0,\ u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2=1$	(3)
12.	$x_3,\ u$	1	0	$[\varphi'(\omega)]^2=-1$	(4)

Рассмотрим анзацы вида [2, 5]

$$F(u)=f(x)\varphi(\omega)+g(x), \tag{3.6}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции, $\varphi(\omega)$ — некоторая неизвестная функция, подлежащая определению. В частности, если $F(u)=u^2$, получаем следующие результаты:

Таблица № 7

№	Инварианты ω, ω_1	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения	
1.	$x_3,\ x_0^2-u^2$	-1	x_0^2		
2.	$x_0,\ x_3^2+u^2$	1	$-x_3^2$	$(\varphi')^2-4\varphi=0$	(1)
3.	$x_0,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$	1	$-x_1^2-x_2^2-x_3^2$		
4.	$x_1^2+x_2^2,\ x_3^2+u^2$	1	$-x_3^2$		
5.	$x_1^2+x_2^2,\ u^2+x_3^2-x_0^2$	1	$-x_3^2+x_0^2$	$(\varphi')^2\omega+\varphi=0$	(2)
6.	$x_3,\ u^2+x_2^2+x_1^2-x_0^2$	1	$x_0^2-x_1^2-x_2^2$		
7.	$x_2,\ u^2+x_3^2-x_0^2$	1	$x_0^2-x_3^2$	$(\varphi')^2+4\varphi=0$	(3)
8.	$x_1^2+x_2^2,\ x_0^2-u^2$	-1	x_0^2		
9.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ x_0^2-u^2$	-1	x_0^2	$(\varphi')^2\omega-\varphi=0$	(4)

Решения уравнений (1)–(4) имеют вид:

(1) $\varphi(\omega)=(\omega\varepsilon+C)^2$,
(2) $\varphi(\omega)=(i\varepsilon\omega^{1/2}+C)^2$,
(3) $\varphi(\omega)=(i\varepsilon\omega+C)^2$,
(4) $\varphi(\omega)=(\varepsilon\omega^{1/2}+C)^2$, $(\varepsilon=\pm1)$.

Подставляя найденные $\varphi(\omega)$ в (3.6) получаем точные решения уравнения эйконала.

Для инвариантов

$$\omega_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \frac{1}{d}\ln(x_0+u) \quad (d>0)$$

анзац имеет вид

$$u = \exp\left[d\left(\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \varphi(\omega_1)\right)\right] - x_0. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в уравнение (3.2), получаем:

$$\frac{d\varphi}{d\omega_1} = \frac{i\varepsilon}{\omega_1} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\omega_1) = i\varepsilon\ln\omega_1 - \ln C_1,$$

тогда

$$u = \frac{\tilde{C}_1}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2\varepsilon i d}}\exp\left\{d\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right\} - x_0.$$

Для инвариантов

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \omega_1 = \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\\
& \omega_2 = \ln\left(x_0^2-u^2\right) - 2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + 2\operatorname{arch}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}},\\
(2)\quad & \omega_1 = \left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\\
& \omega_2 = \ln\left(x_0^2-u^2\right) + 2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 2\operatorname{arch}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}} \quad (e>0)
\end{aligned}$$

решения уравнения эйконала ищем на основании следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \ln\left(x_0^2-u^2\right) - 2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + 2\operatorname{arch}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}} = \varphi(\omega_1),\\
(2)\quad & \ln\left(x_0^2-u^2\right) + 2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 2\operatorname{arch}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}} = \varphi(\omega_1).
\end{aligned}$$

Тогда в обоих случаях получается уравнение

$$\left(\frac{d\varphi}{d\omega_1}\right)^2 + \frac{4e^2}{\omega_1^2} = 0,$$

общее решение которого задается формулой

$$\varphi(\omega_1) = C\ln\omega_1^{2ie\varepsilon}.$$

Решения уравнения эйконала задаются неявно в виде формул

$$(1)\quad \ln\frac{x_0^2-u^2}{C\,(x_1^2+x_2^2)^{ie\varepsilon}}-2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+2\,\mathrm{arch}\,\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}}=0,$$

$$(2)\quad \ln\frac{x_0^2-u^2}{C\,(x_1^2+x_2^2)^{ie\varepsilon}}+2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-2\,\mathrm{arch}\,\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}}=0.$$

Для инвариантов

$$\begin{aligned}
&\omega_1=x_0+u, \qquad \omega_2=x_1^2+x_2^2-2x_0(x_0+u),\\
&\omega_1=x_0+u, \qquad \omega_2=x_3^2-2x_0(x_0+u),\\
&\omega_1=x_0+u, \qquad \omega_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_0(x_0+u)
\end{aligned}\tag{3.8}$$

рассмотрим анзацы вида

$$\omega_2=\psi(\omega_1).\tag{3.9}$$

С учетом (3.9) уравнение эйконала редуцируется к следующему ОДУ:

$$\omega_1\psi_1+\omega_1^2-\psi(\omega_1)=0.\tag{3.10}$$

Общее решение уравнения (3.10) имеет вид

$$\psi=(-\omega_1+C_1)\omega_1.$$

На основании (3.9) получаются решения уравнения эйконала в неявном виде

$$\omega_2=(-\omega_1+C_1)\omega_1,\tag{3.11}$$

где ω_1, ω_2 даются соотношениями (3.8).

Другие анзацы для рассмотренных ω_1 и ω_2 могут быть получены из соотношения

$$F(\omega_1,\omega_2)=0.$$

3.2. Уравнения в двумерном пространстве. Использование некоторых трехмерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к двумерным ДУЧП. С этой целью рассмотрим анзацы вида:

$$u=f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2)+g(x).\tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в уравнение (3.2), получаем двумерные ДУЧП для функции $\varphi(\omega_1,\omega_2)$. Полученные результаты подытожены в таблице 8.

Рассмотрим анзацы вида

$$F(u)=f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2)+g(x),\tag{3.13}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции, $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ — неизвестная функция, подлежащая определению. В частности, если $F(u)=u^2$, получаем следующие результаты (таблица 9).

Таблица № 8

№	Инварианты ω, ω_1, ω_3	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	x_2, x_3, x_0+u	1	$-x_0$	
2.	x_2, x_3, x_0-u	-1	x_0	
3.	x_1, x_2, x_0+u	1	$-x_0$	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2=0$
4.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, x_0+u	1	$-x_0$	
5.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, x_0-u	-1		
6.	x_2, x_3, u	1	0	
7.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2=-1$
8.	x_0, x_3, u	1	0	
9.	x_0, $\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{1/2}$, u	1	0	$(\varphi_1)^2-(\varphi_2)^2=1$
10.	x_0, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, u	1	0	

Таблица № 9

№	Инварианты ω, ω_1, ω_3	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, $x_0^2-u^2$	-1	x_0^2	
2.	x_2, x_3, $x_0^2-u^2$	-1	x_0^2	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2-4\varphi=0$
3.	x_1, x_2, $x_3^2+u^2-x_0^2$	1	$x_0^2-x_3^2$	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2+4\varphi=0$
4.	x_0, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, $x_3^2+u^2$	1	$-x_3^2$	$(\varphi_1)^2-(\varphi_2)^2-4\varphi=0$

Для инвариантов

$$\begin{aligned}
&\omega_1=x_0+u, && \omega_2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, && \omega_3=x_3-2x_0(x_0+u),\\
&\omega_1=x_0+u, && \omega_2=x_2, && \omega_3=x_3^2-2x_0(x_0+u),\\
&\omega_1=x_0+u, && \omega_2=x_3, && \omega_3=x_1^2+x_2^2-2x_0(x_0+u)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

рассмотрим анзацы вида

$$\omega_3=\psi(\omega_1,\omega_2). \tag{3.15}$$

На основании (3.15) уравнение эйконала редуцируется к следующему двумерному ДУЧП:

$$4\omega_1\psi_1-(\psi_2)^2+4\left(\omega_1^2-\psi(\omega_1,\omega_2)\right)=0.$$

Рассмотрим трехмерные инварианты

$$\begin{aligned}
&\omega_1=x_3, \quad \omega_2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\\
&\omega_3=\ln\left(x_0^2-u^2\right)-2e\arcsin\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+2\operatorname{arch}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}} \qquad (e>0)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

и

$$\omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2},$$
$$\omega_3 = \ln\left(x_0^2 - u^2\right) + 2e \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 2 \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0).$$

Анзац (3.15) дает возможность редуцировать уравнение эйконала к следующему ДУЧП:

$$(\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + 4e^2\omega_2^{-2} = 0.$$

Трехмерные инварианты

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \omega_1 = x_0 + u, \quad \omega_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \\
&\qquad \omega_3 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{x_3}{\varepsilon(x_0 + u)} \quad (\varepsilon = \pm 1), \\
&(2) \quad \omega_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(x_0^2 - u^2\right)^{1/2}, \\
&\qquad \omega_3 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{e} \operatorname{arch} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - u^2}} \quad (e > 0), \\
&(3) \quad \omega_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(u^2 + x_3^2 - x_0^2\right)^{1/2}, \\
&\qquad \omega_3 = \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{1}{d} \ln(x_0 + u) \quad (d > 0), \\
&(4) \quad \omega_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(x_3^2 + u^2\right)^{1/2}, \\
&\qquad \omega_3 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + u^2}} + \frac{1}{e} \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad (e > 0)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

с анзацем (3.15) дают возможность редуцировать уравнение эйконала к следующим ДУЧП:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (\psi_2)^2 + \omega_2^{-2} + \omega_1^2 = 0, \\
&(2) \quad (\psi_1)^2 - (\psi_2)^2 + \omega_1^{-2} + e^{-2}\omega_2^{-2} = 0, \\
&(3) \quad (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + \omega_1^{-2} + 2d^{-1}\omega_2^{-1}\psi_2 = 0, \\
&(4) \quad (\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + e^{-2}\omega_1^{-2} + \frac{1}{4}\omega_2^{-2} = 0.
\end{aligned}$$

Другие неявные анзацы для инвариантов (3.14), (3.16) и (3.17) могут быть получены из соотношения $F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0$.

3.3. Уравнения в трехмерном пространстве. Использование некоторых четырехмерных инвариантов редуцирует уравнение эйконала к трехмерным ДУЧП. С этой целью рассмотрим анзацы вида:

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + g(x). \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) в уравнение (3.2), получаем трехмерные ДУЧП для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Полученные результаты приведены в таблице 10.

Таблица № 10

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	x_1, x_2, x_3, x_0+u	1	$-x_0$	
2.	x_1, x_2, x_3, x_0-u	-1	x_0	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2+(\varphi_3)^2=0$
3.	x_0, x_2, x_3, u	1	0	
4.	x_0, $\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2-(\varphi_2)^2-\varphi_3)^2=1$
5.	x_1, x_2, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2+(\varphi_3)^2=-1$

Для инвариантов $\omega_1=x_1$, $\omega_2=x_2$, $\omega_3=x_3$, $\omega_4=x_0^2-u^2$ анзац имеет вид:

$$u^2=x_0^2-\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

В этом случае вместо уравнения эйконала получаем следующее:

$$(\varphi_1)^2+(\varphi_2)^2+(\varphi_3)^2-4\varphi=0.$$

Четырехмерные инварианты

(1) $\omega_1=x_1,\quad \omega_2=x_2,\quad \omega_3=x_0+u,$
$\omega_4=x_3^2-2x_0(x_0+u),$

(2) $\omega_1=x_0+u,\quad \omega_2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},\quad \omega_3=x_3^2-2x_0(x_0+u),$
$\omega_4=\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\dfrac{x_3}{\varepsilon(x_0+u)},$

(3) $\omega_1=x_3,\quad \omega_2=\left(x_0^2-u^2\right)^{1/2},\quad \omega_3=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},$
$\omega_4=\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}-\dfrac{1}{e}\operatorname{arch}\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2-u^2}},\quad (e>0),$

(4) $\omega_1=x_0,\quad \omega_2=\left(x_3^2+u^2\right)^{1/2},\quad \omega_3=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2},$
$\omega_4=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x_3}{\sqrt{x_3^2+u^2}}+\dfrac{1}{e}\arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+u^2}},\quad (e\neq 0),$

с анзацами вида $\omega_4=\psi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ редуцируют уравнение эйконала к следующим ДУЧП:

(1) $(\psi_1)^2+(\psi_2)^2-\omega_3\psi_3-4\omega_3^2+4\psi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=0,$
(2) $(\psi_2)^2+4\left(\omega_3-\omega_2^2\right)(\psi_3)^2+4\omega_1\psi_1\psi_3+\omega_1^{-2}+\omega_2^{-2}=0,$
(3) $(\psi_1)^2-(\psi_2)^2+(\psi_3)^2+e^{-2}\omega_2^{-2}+\omega_3^{-2}=0,$
(4) $(\psi_1)^2-(\psi_2)^2-(\psi_3)^2-\dfrac{1}{4}\omega_2^{-2}-e^2\omega_3^{-2}=0.$

На основании инвариантов (1)–(4) более общие анзацы имеют вид:

$$F(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)=0.$$

§ 4. О точных решениях уравнения эйконала с нулевой массой

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 0. \tag{4.1}$$

В работе [5] доказано, что уравнение (4.1) инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы Ли. Инфинитезимальный оператор этой группы имеет вид:

$$\begin{aligned} &X = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad \mu = 0,1,2,3, \quad \eta = \eta(u), \\ &\xi^\mu = -b_\mu(u)x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu(u)x^\nu + c_{\mu\nu}(u)x^\nu + d_\mu(u). \end{aligned} \tag{4.2}$$

В этом параграфе приводим некоторые точные решения уравнения (4.1), полученные на основании некоторых инвариантов расщепляющихся подгрупп группы $P(1,4)$.

4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Использование некоторых двумерных инвариантов дает возможность редуцировать уравнение (4.1) к ОДУ. С этой целью рассмотрим анзацы вида (3.5)

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x).$$

Подставляя (3.5) в (4.1), приходим к ОДУ для функции $\varphi(\omega)$. Полученные результаты приведены в таблице 11.

Таблица № 11

№	Инварианты ω, ω_1	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения	
1.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_0^2$, u	1	0		
2.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2$, u,	1	0		
3.	x_0, u	1	0	$\varphi'(\omega)=0$	(1)
4.	$x_1^2+x_2^2$, u	1	0		
5.	x_3, u	1	0		
6.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2$, x_0+u	1	$-x_0$		
7.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2$, x_0-u	-1	x_0		
8.	$x_1^2+x_2^2$, x_0+u	1	$-x_0$	$(\varphi')^2\omega=\frac{1}{4}$	(2)
9.	$x_1^2+x_2^2$, x_0-u	-1	x_0		
10.	x_3, x_0+u	1	$-x_0$		
11.	x_2, x_0+u	1	$-x_0$	$(\varphi')^2=1$	(3)
12.	x_3, x_0-u	-1	x_0		

Решения уравнений (1)–(3) (см. таблицу 11) имеют вид:

(1) $\varphi(\omega) = \mathrm{const}$,

(2) $\varphi(\omega) = \varepsilon\omega^{1/2} + C$,

(3) $\varphi(\omega) = \varepsilon\omega + C, \quad (\varepsilon = \pm 1)$.

Учитывая найденные $\varphi(\omega)$ и вид анзаца, получаем точные решения уравнения (4.1).

4.2. Уравнения в двумерном пространстве. Использование некоторых трехмерных инвариантов редуцирует уравнение (4.1) к двумерным ДУЧП. Для этого рассмотрим анзацы (3.12)

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2) + g(x).$$

Подставляя (3.12) в уравнение (4.1), получаем двумерные ДУЧП для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2)$. Результаты сведены в таблицу 12.

Таблица № 12

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	x_2, x_3, $x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	x_2, x_3, $x_0 - u$	-1	x_0	
3.	x_1, x_2, $x_0 + u$	1	$-x_0$	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = 1$
4.	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, $x_0 + u$	1	$-x_0$	
5.	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, $x_0 - u$	-1	x_0	
6.	x_2, x_3, u	1	0	
7.	$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 = 0$
8.	x_0, x_3, u	1	0	
9.	x_0, $\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, u	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 = 0$
10.	x_0, $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, u	1	0	

4.3. Уравнения в трехмерном пространстве. Редуцируем уравнение (4.1) к трехмерным ДУЧП. С этой целью воспользуемся подстановкой

$$u = f(x)\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + g(x),$$

которая приводит уравнение (4.1) к трехмерным ДУЧП для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Результаты приведены в таблице 13.

Таблица № 13

№	Инварианты ω_1, ω_2, ω_3, ω_4	$f(x)$	$g(x)$	Редуцированные уравнения
1.	x_1, x_2, x_3, $x_0 + u$	1	$-x_0$	
2.	x_1, x_2, x_3, $x_0 - u$	-1	x_0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 1$
3.	x_0, x_2, x_3, u	1	0	
4.	x_0, $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2 - (\varphi_2)^2 - (\varphi_3)^2 = 0$
5	x_1, x_2, x_3, u	1	0	$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 0$

Воспользовавшись формулами размножения решений [5, 7] волнового уравнения (2.1) и уравнения эйконала (3.2), по найденным нами частным решениям строятся многопараметрические семейства решений. Так, например, если u_1 — частное решение конформно-инвариантного уравнения

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \qquad k = \frac{n+2}{n-2} = \frac{7}{3}, \quad \text{для } n = 5, \tag{4.3}$$

где n — размерность пространства, то новые решения u_2 строятся по формуле:

$$\begin{gathered} u_2 = \sigma\frac{2-n}{n} u_1(x_0 \to x'_0, x_1 \to x'_1, x_2 \to x'_2, x_3 \to x'_3, x_4 \to x'_4), \\ x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x_\alpha x^\alpha), \qquad \sigma = 1 - 2c_\nu x^\nu + c_\alpha c^\alpha x_\nu x^\nu, \end{gathered} \tag{4.4}$$

c_μ — произвольные параметры, задающие конформные преобразования. Формула (4.4) задает не одно, а целое семейство частных решений нелинейного уравнения (4.3).

1. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, 360–382.
2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фущич В.И., О симметрии частных решениях некоторых уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., Штелень В.М., О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Дирака и уравнения эйконала, В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.2, М., Наука, 1983, 407–413.
5. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645.
6. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
7. Fushchych W.I., Shtelen V.M., The symmetry and some exact solutions of relativistic eikonal equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.
8. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, Препринт 78.18, Киев, Институт математики АН УССР, 1978, 36 с.
9. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717.
10. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696.
11. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, М., Наука, 1980, 61–66.
12. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M., Continious subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
13. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.