О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа

В.И. ФУЩИЧ, Р.М. ЧЕРНИГА

В работе исследуются два нелинейных уравнения шредингеровского типа в пространстве переменных (t, x_1, x_2, x_3):

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = k\Delta\Psi + \lambda\Psi(\Psi\overset{*}{\Psi})^{2/3},$$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = k\Delta\Psi + \lambda\Psi\frac{\partial(\Psi\overset{*}{\Psi})}{\partial x_a}\frac{\partial(\Psi\overset{*}{\Psi})}{\partial x_a}(\Psi\overset{*}{\Psi})^{-2}.$$

Доказано, что эти уравнения сохраняют группу симметрии линейного уравнения Шредингера. Проведена редукция по системе несопряженных одномерных подалгебр, в ряде случаев найдены точные решения полученных редукционных уравнений, по которым, с помощью соответствующих анзацев построены точные решения исходных нелинейных уравнений. В частности, получены солитоноподобные решения. С использованием свойств симметрии выведены формулы размножения решений и многопараметрические семейства решений.

В работе также описаны широкие классы систем дифференциальных уравнений второго порядка, инвариантные относительно группы Галилея и некоторых ее обобщений.

§ 1. Введение

Максимальной локальной (в смысле Ли) группой инвариантности линейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{1}$$

где $\Psi_t = \frac{\partial\Psi}{\partial t}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\Psi(t,x) = U(t,x) + iV(t,x)$, U, V — действительные функции, является обобщенная группа Галилея $G_2(1,n)$ (см., например, [1–3]), т.е. группа Галилея $G(1,n)$, дополненная группами масштабных и проективных преобразований. Символами $AG(1,n)$, $AG_2(1,n)$ будем обозначать алгебры Ли групп $G(1,n)$ и $G_2(1,n)$ соответственно. Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности (АИ) уравнения (1) имеют вид

$$P_\nu = \partial_\nu, \quad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \nu = \overline{0,n}, \quad x_0 = t, \tag{2a}$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad a,b = \overline{1,n}, \tag{2b}$$

$$J = u\partial_v - v\partial_u, \quad G_a = t\partial_a - \frac{x_a}{2k}J, \quad \partial_V = \frac{\partial}{\partial V}, \quad \partial_U = \frac{\partial}{\partial U}, \tag{2c}$$

Препринт 86.85, Институт математики АН УССР, Киев, 1986, 44 с.

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a - \frac{n}{2}(U\partial_U + V\partial_V), \tag{2d}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4k}J - \frac{nt}{2}(U\partial_U + V\partial_V), \quad |x|^2 = x_a x_a. \tag{2e}$$

(По повторяющимся индексам везде подразумевается суммирование.)

В работах [4, 5] построены широкие классы нелинейных обобщений уравнения теплопроводности, инвариантные относительно группы $G_2(1,n)$ и ее подгрупп.

В настоящей работе, являющейся естественным продолжением статьи [5], описаны все нелинейные обобщения уравнения (1) вида

$$\begin{gathered} i\Psi_t = A_{ab}(\Psi, \overset{*}{\Psi})\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_a \partial x_b} + B(\Psi, \overset{*}{\Psi}, \underset{1}{\Psi}, \underset{1}{\overset{*}{\Psi}}), \\ \underset{1}{\Psi} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\right), \quad \underset{1}{\overset{*}{\Psi}} = \left(\frac{\partial\overset{*}{\Psi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\overset{*}{\Psi}}{\partial x_n}\right), \\ \Psi = U + iV, \quad \overset{*}{\Psi} = U - iV, \quad \Psi\overset{*}{\Psi} = |\Psi|^2, \end{gathered} \tag{3}$$

где A_{ab}, $a,b = \overline{1,n}$, B — произвольные дифференцируемые комплексные функции, инвариантные относительно алгебр $AG_2(1,n) \subset AG_1(1,n) \subset AG(1,n)$, где $AG_1(1,n)$ — алгебра Галилея $AG(1,n)$, дополненная оператором масштабных преобразований D.

Оказывается, что все уравнения вида (3), инвариантные относительно алгебры $AG_2(1,n)$ с базисными элементами (2), эквивалентны уравнению

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \Psi(\Psi\overset{*}{\Psi})^{2/n}F(\Theta), \tag{4}$$

где

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\overset{*}{\Psi})\frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\overset{*}{\Psi})\Big/(\Psi\overset{*}{\Psi})^{2+2/n}, \tag{5}$$

F — произвольная функция.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением следующих двух уравнений вида (4) ($n = 3$):

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\Psi(\Psi\overset{*}{\Psi})^{2/3}, \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$i\Psi_t = k\Delta\Psi + \lambda\frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\overset{*}{\Psi})\frac{\partial}{\partial x_a}(\Psi\overset{*}{\Psi})\Big/(\Psi\overset{*}{\Psi})^2. \tag{7}$$

Воспользовавшись симметрийными свойствами этих уравнений, т.е. инвариантностью относительно группы $G_2(1,3)$, построим многопараметрические семейства точных решений уравнений (6) и (7).

В § 2 проведена редукция нелинейных уравнений (6), (7) по системе несопряженных одномерных подалгебр алгебры $AG(1,3)$ к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП) для функций, зависящих лишь от трех инвариантных переменных.

В § 3 с помощью преобразований из группы $G_2(1,3)$, порождаемых операторами $AG_2(1,3)$, получены формулы размножения решений для уравнений (6), (7).

Параграфы 4, 5, 7 посвящены построению явных точных решений уравнений (6), (7). Для этого используются редукционные уравнения (§ 2) и формулы размножения решений (§ 3).

Параграф 6 содержит результаты теоретико-алгебраических исследований систем уравнений параболического типа. В частности, построенный в нем класс уравнений, инвариантных относительно группы $G_2(1,n)$, содержит уравнение (4).

§ 2. Редукция нелинейных уравнений (6), (7)

Уравнения (6) и (7) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли $AG_2(1,3)$. Эта алгебра в качестве подалгебры содержит 11-мерную алгебру Галилея $AG(1,3)$. В работе [6] построена система всех несопряженных одномерных подалгебр алгебры Галилея. Эти подалгебры генерируются операторами

$$X_1 = P_1, \quad X_2 = J = i\left(\Psi\frac{\partial}{\partial\Psi} - \overset{*}{\Psi}\frac{\partial}{\partial\overset{*}{\Psi}}\right), \quad X_3 = P_0, \quad X_4 = J + \beta P_0,$$
$$X_5 = J_{12}, \quad X_6 = J_{12} + \alpha P_3, \quad X_7 = J_{12} + \alpha P_0, \quad X_8 = J_{12} + \alpha P_0 + \beta J,$$
$$X_9 = J_{12} + \beta J, \quad X_{10} = G_2 + \alpha P_2, \quad X_{11} = G_1, \quad X_{12} = G_1 + \alpha P_0,$$
$$X_{13} = J_{12} + \beta G_3, \quad X_{14} = J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0.$$

Решая соответствующие уравнения Лагранжа для каждого из операторов (8), получаем три инвариантные переменные w_1, w_2, w_3, зависящие от t, x_1, x_2, x_3, а также анзацы для искомой функции $\Psi = U + iV$. Исключение составляет только "единичный" оператор J, которому очевидно соответствуют 4 инвариантные переменные t, x_1, x_2, x_3 и дополнительное функциональное условие на компоненты U, V. Результаты решения уравнений Лагранжа приведены в таблице 1.

Таблица 1

Подалгебры	Инвариантные переменные	Анзацы $w = (w_1, w_2, w_3)$
X_1	t, x_2, x_3	$\Psi(t,x) = \varphi(w)$
X_2	t, x_1, x_2, x_3	$\Psi(t,x) = \varphi(t,x)$, $\Psi\overset{*}{\Psi} = \gamma^2$
X_3	x_1, x_2, x_3	$\Psi = \varphi(w)$
X_4	x_1, x_2, x_3	$\Psi = \exp(it/\beta)\varphi(w)$
X_5	t, $x_1^2 + x_2^2$, x_3	$\Psi = \varphi(w)$
X_6	t, $x_1^2 + x_2^2$, $x_3 - \alpha \arcsin \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$	$\Psi = \varphi(w)$
X_7	$t - \alpha \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$, $x_1^2 + x_2^2$, x_3	$\Psi = \varphi(w)$
X_8	$t - \alpha \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$, $x_1^2 + x_2^2$, x_3	$\Psi = \exp(i\beta t/\alpha)\varphi(w)$
X_9	t, $x_1^2 + x_2^2$, x_3	$\Psi = \exp\left(i\beta \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}\right)\varphi(w)$
X_{10}	t, $\alpha x_1 - t x_2$, x_3	$\Psi = \exp\left(-\dfrac{i x_1^2}{4xt}\right)\varphi(w)$
X_{11}	t, $-t x_2$, x_3	$\Psi = \exp\left(-\dfrac{i x_1^2}{4xt}\right)\varphi(w)$
X_{12}	$2\alpha x_1 - t^2$, x_2, x_3	$\Psi = \exp\left[-\dfrac{it}{2x\alpha}\left(x_1 - \dfrac{t^2}{3\alpha}\right)\right]\varphi(w)$
X_{13}	t, $x_1^2 + x_2^2$, $x_3 - \beta t \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$	$\Psi = \exp\left(-\dfrac{i x_3^2}{4xt}\right)\varphi(w)$
X_{14}	$t - \alpha \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1}$, $x_1^2 + x_2^2$, $2\alpha x_3 - \beta t^2$	$\Psi = \exp\left[-\dfrac{i\beta t}{2x\alpha}\left(x_3 - \dfrac{\beta t^2}{3\alpha}\right)\right]\varphi(w)$

Используя инварианты и анзацы из таблицы 1, проведем редукцию уравнений (6) и (7) для каждого оператора $X_1, X_2, \ldots, X_{14}$. В результате получаем следующие уравнения (функции φ с индексами w_1, w_2, w_3 везде обозначают производные по этим переменным):

$$X_1: \ i\varphi_t = k(\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_3w_3}) + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \quad w_1 = t, \tag{9a}$$

$$i\varphi_t = k(\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_3w_3}) + \lambda\varphi[(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2} + (\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}](\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}; \tag{9b}$$

$$X_2: \ i\varphi_t = k\Delta\varphi + \lambda\gamma^{4/3}\varphi, \qquad \varphi\overset{*}{\varphi} = \gamma^2, \quad \gamma \in \mathbb{R}^1, \tag{10a}$$

$$i\varphi_t = k\Delta\varphi, \quad \varphi\overset{*}{\varphi} = \gamma^2; \tag{10b}$$

$$X_3 \ (\beta \to \infty), \ X_4: \ k\Delta\varphi + \varphi/\beta + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3} = 0, \tag{11a}$$

$$k\Delta\varphi + \varphi/\beta + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})_{x_a}(\varphi\overset{*}{\varphi})_{x_a}\Big/(\varphi\overset{*}{\varphi})^2 = 0, \quad w_a = x_a; \tag{11b}$$

$$X_5 \ (\alpha = 0), \ X_6: \ i\varphi_t = k\left[4\varphi_{w_2} + 4w_2\varphi_{w_2w_2} + (1 + \alpha^2/w_2)\varphi_{w_3w_3}\right] + {} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \quad w_1 = t, \tag{12a}$$

$$i\varphi_t = 4w_2\left[k\varphi_{w_2w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right] + {} + (1 + \alpha^2/w_2)\left[k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right]; \tag{12b}$$

$$X_7 \ (\beta = 0), \ X_8: \ i\varphi_{w_1} = k\left(\frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1w_1} + 4\varphi_{w_2} + 4w_2\varphi_{w_2w_2} + \varphi_{w_3w_3}\right) + {} + \frac{\beta}{\alpha}\varphi + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \tag{13a}$$

$$i\varphi_{w_1} - \frac{\beta}{\alpha}\varphi = \frac{\alpha^2}{w_2}\left[k\varphi_{w_1w_1} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_1}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right] + {} + 4w_2\left[k\varphi_{w_2w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right] + {} + k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}\Big/(\varphi\overset{*}{\varphi})^2; \tag{13b}$$

$$X_9: \ i\varphi_t = k\left(4\omega_2\varphi_{w_2w_2} + 4\varphi_{w_2} + \varphi_{w_3w_3}\right) - \frac{k\beta^2}{w_2}\varphi + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \quad w_1 = t, \tag{14a}$$

$$i\varphi_t + \frac{k\beta^2}{w_2}\varphi = 4w_2\left[k\varphi_{w_2w_2} + \frac{k}{w_2}\varphi_{w_2} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right] + {} + k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}; \tag{14b}$$

$$X_{10}, \ X_{11} \ (\alpha = 0): \ i\left[\varphi_t + \frac{\varphi + 2w_2\varphi_{w_2}}{2t}\right] = {} = k(\alpha^2 + t^2)\varphi_{w_2w_2} + k\varphi_{w_3w_3} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \tag{15a}$$

$$i\left[\varphi_t+\frac{\varphi+2w_2\varphi_{w_2}}{2t}\right]=(\alpha^2+t^2)\left[k\varphi_{w_2w_2}++\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right]+ \\ +k\varphi_{w_3w_3}+\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2},\quad w_1=t; \tag{15b}$$

$$X_{12}:\ \frac{w_1}{4k\alpha^2}\varphi=4k\alpha^2\varphi_{w_1w_1}+k(\varphi_{w_2w_2}+\varphi_{w_3w_3})]+\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \tag{16a}$$

$$\frac{w_1}{4k\alpha^2}\varphi=k(4\alpha^2\varphi_{w_1w_1}+\varphi_{w_2w_2}+\varphi_{w_3w_3})+ \\ +\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\left[4\alpha^2(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_1}+(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}+(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}\right]; \tag{16b}$$

$$X_{13}:\ i\left[\varphi_t+\frac{\varphi+2w_3\varphi_{w_3}}{2t}\right]= \\ =k\left[4w_2\varphi_{w_2w_2}+\left(1+\frac{\beta^2t^2}{w_2}\right)\varphi_{w_3w_3}\right]+\lambda(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \tag{17a}$$

$$i\left[\varphi_t+\frac{\varphi+2w_3\varphi_{w_3}}{2t}\right]=4w_2\left[k\varphi_{w_2w_2}+\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right]+ \\ +\left(1+\frac{\beta^2t^2}{w_2}\right)\left[k\varphi_{w_3w_3}+\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\right]; \tag{17b}$$

$$X_{14}:\ i\varphi_{w_1}=k\left[\frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1w_1}+4(w_2\varphi_{w_2w_2}+\varphi_{w_2})+4\alpha^2\varphi_{w_3w_3}\right]- \\ -\frac{\beta}{4k\alpha^2}w_3\varphi+\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \tag{18a}$$

$$i\varphi_{w_1}+\frac{\beta}{4k\alpha^2}\omega_2\varphi=k\left[\frac{\alpha^2}{w_2}\varphi_{w_1w_1}+4(w_2\varphi_{w_2w_2}+\varphi_{w_2})+4\alpha^2\varphi_{w_3w_3}\right]+ \\ +\lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{-2}\left[\frac{\alpha^2}{w_2}(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_1}+4\left(w_2(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_2}+\alpha^2(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_{w_3}\right)\right]. \tag{18b}$$

Замечание 1. Редукционные уравнения, соответствующие операторам X_3, X_5, X_7 и X_{11}, следуют соответственно из уравнений (11), (12), (13) и (15) при условиях, указанных возле этих операторов. Уравнения (9a), (10a), ..., (18a) получены редукцией уравнения (6), а (9b), (10b), ..., (18b) — редукцией уравнения (7).

Замечание 2. Если в уравнениях (6) и (7) провести разделение переменных по инвариантам, соответствующим проективному оператору (2e), то получим уравнения (11) при $\beta\to\infty$ с инвариантными переменными $w_1=x_1/t$, $w_2=x_2/t$, $w_3=x_3/t$. Следовательно, инвариантные решения соответствующие оператору (2e) с точностью до преобразований группы $G_2(1,3)$ совпадают с решениями, построенными по оператору временных трансляций P_0.

§ 3. Формулы размножения решений

Для получения явных формул размножения решений воспользуемся преобразованиями, генерируемыми базисными операторами (2) алгебры $AG_2(1,3)$. Наиболее полезными для получения из известных решений существенно новых являются преобразования инвариантности, порождаемые операторами G_a (2c) и Π (2e). Решая соответствующие уравнения Ли, получаем преобразования Галилея

$$G_a: \quad \begin{aligned} & t' = t, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a t, \quad a = 1,2,3, \\ & \Psi' = \Psi \exp\left(-\frac{i\varepsilon_a}{2k}\left(x_a + \frac{\varepsilon_a t}{2}\right)\right), \quad \varepsilon_a \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{19}$$

и проективные преобразования

$$\Pi: \quad \begin{aligned} & t' = \frac{t}{1-pt}, \quad x'_a = \frac{x_a}{1-pt}, \quad a = 1,2,3, \\ & \Psi' = \Psi(1-pt)^{3/2} \exp\left(-\frac{ip|x|^2}{4k(1-pt)}\right), \quad p \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $W(t,x)$ — решение уравнения (6) или (7). Применяя к нему преобразования (19), получаем новое решение (штрихи ниже опускаются)

$$\Psi = W(t, x + \varepsilon t) \exp\left(\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{|\varepsilon|^2 t}{2}\right)\right), \tag{21}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$.

После применения к решению (21) преобразований (20) находим более широкое семейство решений

$$\Psi = W\left(\frac{t}{1-pt}, \frac{x+\varepsilon t}{1-pt}\right) \exp\left[i\frac{p|x|^2 + 2\varepsilon x + |\varepsilon|^2 t}{4k(1-pt)}\right](1-pt)^{-3/2}. \tag{22}$$

Нетрудно убедиться, что повторное применение формул (19), (20) к решению (22) приводит к этому же семейству решений (это следует и из общих свойств групп преобразований).

Выражение (22) естественно назвать формулой размножения решений уравнений (6), (7), построенной по операторам G_a (2c) и Π (2e). Обобщим эту формулу, применив преобразования сдвигов по координатам t, x и вращениям в пространстве (см. операторы (2a), (2b) при $n = 3$):

$$t' = t + d_0^1, \quad x' = Ax + d^1, \quad \Psi' = \Psi, \tag{23}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = 1,$$

d_0^1, $d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$, $c_{11}, \ldots, c_{33}$ — действительные параметры; A — матрица вращения.

Используя группу преобразований (23), решение (22) обобщаем:

$$\Psi = W\left(\frac{t + d_0^1}{d_0 - pt}, \frac{Ax + \varepsilon t + d}{d_0 - pt}\right)(d_0 - pt)^{-3/2} \exp\left[i\frac{p|x|^2 + 2\varepsilon^1 x + |\varepsilon|^2 + b_0}{4k(d_0 - pt)}\right], \tag{24}$$

где $d_0 = 1 - pd_0^1$, $d = d^1 + \varepsilon d_0^1$, $\varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A$, $b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1$.

Наконец, воспользуемся однопараметрической группой масштабных преобразований, которую порождает оператор D (2d):

$$t' = m^2 t, \quad x' = mx, \quad \Psi' = m^{-3/2}\Psi, \quad m > 0 \tag{25a}$$

и 1-параметрической группой вращения компонент U, V функции Ψ (см. оператор J (1.2в)):

$$\Psi = e^{-i\alpha}\Psi, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{25b}$$

Таким образом, окончательно получаем формулу размножения решений уравнений (6), (7)

$$\begin{gathered}\Psi = e^{i\alpha}\frac{m^{3/2}}{(d_0 - pm^2 t)^{3/2}} \exp\left[i\frac{pm^2|x|^2 + 2m\varepsilon^1 x + m^2|\varepsilon|^2 t + b_0}{4k(d_0 - pm^2 t)}\right] \times \\ \times W\left(\frac{m^2 t + d_0^1}{d_0 - pm^2 t}, \frac{mAx + m^2\varepsilon t + d}{d_0 - pm^2 t}\right),\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}d_0 = 1 - pd_0^1, \quad d = d^1 + \varepsilon d_0^1, \quad \varepsilon^1 = \varepsilon A + pd^1 A, \\ b_0 = p|d^1|^2 + 2\varepsilon d^1 + |\varepsilon|^2 d_0^1,\end{gathered} \tag{27}$$

$\det A = 1$, A — матрица вращений, $d^1 = (d_1^1, d_2^1, d_3^1)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — действительные векторы, p, d_0^1, d, $m > 0$ — действительные параметры.

Теорема 1. *Если $W(t,x)$ — решение нелинейного уравнения (6) или (7), то формула (26) определяет неразмножаемое семейство решений этого же уравнения.*

Доказательство. Тот факт, что любая функция Ψ вида (26) будет решением уравнения (6), следует из только что проведенного размножения решения $W(t,x)$ с помощью базисных операторов алгебры $AG_2(1,3)$.

Неразмножаемость решений вида (26) с помощью 13-мерной группы, соответствующей алгебре $AG_2(1,3)$, доказывается проверкой. А именно, поочередно действуем на решение (26) преобразованиями (19), (20), (23), (25), убеждаемся, что в результате получаем решение вида (26) (изменяются только параметры). Теорема доказана.

Пусть в (26) $d_0 = 1/p$, $\varepsilon = 0$, $d = 0$, $\alpha = 0$, $A = E$, где E — единичная матрица. Тогда получаем решение

$$\Psi = \frac{m^{3/2}}{(-pm^2 t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4kt}\right) W\left(\frac{m^2 t + \frac{1}{p}}{-pm^2 t}, \frac{x}{-pmt}\right). \tag{28}$$

Сделав в (28) предельний переход

$$p \to \infty, \quad m \to \infty, \quad pm \to 1,$$

получим решение уравнения (6) или (7)

$$\Psi(t,x) = t^{-3/2} \exp\left(-\frac{i|x|^2}{4kt}\right) W\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right). \tag{29}$$

Формулу (29) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Апеля–Бриля для многомерного нелинейного уравнения Шредингера.

Замечание 3. Построенные формулы размножения решений позволяют из действительных стационарных решений уравнений (6), (7), получать комплексные нестационарные (т.е. зависящие от времени t) решения.

В заключение этого параграфа, отметим, что все приведенные выкладки по размножению решений $(1+3)$-мерных уравнений (6), (7) очевидным образом обобщаются на все уравнения вида (4) в случае любого количества переменных.

§ 4. Точные решения уравнения (6)

В этом параграфе будут построены точные решения уравнения (6) путем нахождения частных решений соответствующих редукционных уравнений (см. § 2).

Редукция уравнения (6) по оператору $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ приводит к нелинейному уравнению (9a) такого же вида, только в пространстве переменных $(w_1, w_2, w_3) = (t, x_2, x_3)$. Для получения частных решений уравнения (9a) рассмотрим систему

$$i\varphi_t = \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3}, \quad \lambda \neq 0, \tag{30a}$$

$$\varphi_{x_2x_2} + \varphi_{x_3x_3} = 0. \tag{30b}$$

Очевидно, что произвольное решение системы (30) удовлетворяет уравнению (9a). Построим общее решение системы (30).

Представляя комплексную функцию φ через пару действительных функций R и P, по известной формуле

$$\varphi = R(t, x_2, x_3)\exp(iP(t, x_2, x_3)), \tag{31}$$

сводим уравнение (30a) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) первого порядка. Решая эти уравнения и используя (31), получаем общее решение (30a)

$$\varphi(t, x_2, x_3) = \begin{cases} (-D_2/\lambda)^{3/4}\exp(i(D_1 + D_2 t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \left(D_2 - \dfrac{4\beta}{3}t\right)^{-3/4(1-i\alpha/\beta)} \exp(iD_1), \quad \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $D_1(x_2, x_3)$, $D_2(x_2, x_3)$ — произвольные действительные функции.

Подставляя выражение (32) в (30b), находим функции

$$D_1(x_2, x_3) = d_1, \qquad D_2(x_2, x_3) = d_2, \qquad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, получаем общее решение системы (30)

$$\varphi = \begin{cases} (-d_2/\lambda)^{3/4}\exp(i(d_2 t + d_1)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \left(d_2 - \dfrac{4\beta}{3}t\right)^{-3/4(1-i\alpha/\beta)} \exp(id_1), \quad \lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0, \end{cases} \tag{33}$$

которое является частным решением уравнения (9a), а следовательно, и решением исходного уравнения (6).

Множитель вида $\exp(id_1)$ в дальнейшем в решениях уравнений (6), (7) опускается, так как любое решение этих уравнений можно на него умножить (см. (25b)).

Редукция уравнения (6) по оператору X_2 приводит к нелинейному уравнению (10a) с дополнительным условием $\varphi\overset{*}{\varphi} = \gamma^2$, $\gamma \in R$, т.е., используя представление (31), получаем

$$\varphi = \gamma \exp iP(t,x), \tag{34}$$

где $P(t,x)$ — действительная функция.

Подставляя (34) в уравнение (10a) и делая очевидные преобразования, получаем систему

$$\begin{aligned} &P_t = kP_aP_a - \lambda\gamma^{4/3}, \quad P_a = \frac{\partial P}{\partial x_a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ &\Delta P = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

которая заменой

$$P(t,x) = P^1(t,x) - \lambda\gamma^{4/3}t \tag{36}$$

сводится к системе

$$\begin{aligned} &P^1_t = kP^1_aP^1_a, \quad P^1_a \equiv \frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \\ &\Delta P^1 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Построим общее решение системы уравнений (37) в предположении $P^1_t = F(P^1)$. Нетрудно показать, что тогда $F = \alpha = \text{const}$. Следовательно,

$$P^1 = \alpha(t + P^0(x)), \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \tag{38}$$

где $P^0(x)$ — действительная функция, удовлетворяющая нелинейной системе

$$\begin{aligned} &P^0_aP^0_a = \frac{1}{\alpha k}, \quad P^0_a \equiv \frac{\partial P^0}{\partial x_a}, \\ &\Delta P^0 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Как показано в работе [7], общее решение системы (39) в классе действительных функций имеет вид

$$P^0(x) = b^0_ax_a + d^0, \quad b^0_ab^0_a = \frac{1}{\alpha k} > 0, \quad b^0_a, d^0 \in \mathbb{R}^1, \tag{40}$$

поэтому с учетом (36), (38) линейная функция $P = b_ax_a + \left(kb_ab_a - \lambda\gamma^{4/3}\right)t + d$, $b_a = b^0_a\alpha$, $d = d^0\alpha$, является решением системы (35).

Таким образом, используя (34), получаем решение уравнения (6) в виде плоской волны:

$$\Psi = \varphi = \gamma \exp i(b_ax_a + b_0t), \quad b_0 = kb_ab_a - \lambda\gamma^{4/3}. \tag{41}$$

Замечание 4. Нетрудно убедится, что система (37) не имеет радиальных решений вида $P^1 = P^1\left(t, |x|^2\right)$.

Редукция уравнения (6) по оператору $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ приводит к нелинейному эллиптическому уравнению (11a). Пусть в уравнении (11a)

$$\varphi = \varphi(w), \quad w = \alpha_a x_a, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1,$$

тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$k\alpha_a\alpha_a\varphi_{ww} + \lambda\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3} = 0. \tag{42}$$

В случае действительной функции φ это уравнение есть уравнение Эмдена–Фаулера, частным решением которого является функция [8]

$$\varphi = \beta/w^{3/2}, \quad \beta = \left(-15|\alpha|^2 k/4\lambda\right)^{3/4}, \quad \lambda k < 0.$$

Таким образом, получаем стационарное решение уравнения (6):

$$\Psi = \left[\frac{15\alpha_a\alpha_a k}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2}\right]^{3/4}, \quad \lambda k < 0, \quad \alpha_a \in \mathbb{R}^1. \tag{43}$$

Отметим также, что в случае $\lambda k > 0$ выражение (43) задает чисто мнимое решение уравнения (6).

Если в уравнении (11a) положить

$$\varphi = \varphi(r), \quad r = |x|^2, \tag{44}$$

то получаем ОДУ второго порядка

$$4r\varphi_{rr} + 6\varphi_r + \frac{\lambda}{k}\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^{2/3} = 0,$$

которое в случае действительной функции φ есть уравнение Эмдена–Фаулера. Частным решением его является функция

$$\varphi = \left(\frac{15\lambda}{-4\lambda r}\right)^{3/4}, \quad \lambda k < 0.$$

Следовательно, с учетом (44) находим еще одно стационарное решение уравнения (6):

$$\Psi = \left(\frac{15k}{-4\lambda|x|^2}\right)^{3/4}. \tag{45}$$

Решение (45) в отличие от предыдущих решений обладает свойством

$$\Psi(x) \to 0 \qquad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{46}$$

Ко всем построенным решениям (33), (41), (43), (45) уравнения (6) можно применить формулу размножения (26) и тогда по теореме 1 получим неразмножаемые семейства решений. Поскольку формулы получаются довольно громоздкими, мы приводим в таблице 2 результаты применения двух частных случаев общей формулы размножения решений (21) и (29). Заметим, что решение (33) при $\lambda \in \mathbb{R}^1$ получается из решения (41), если в последнем формально положить $b_a = 0$, $a = 1, 2, 3$, $\gamma = (-\alpha_2/\lambda)^{3/4}$. В связи с этим формулы размножения (21), (29) к решению (33) при $\lambda \in \mathbb{R}^1$ не применялись.

Таблица 2

№ п/п	№ формулы исходного решения	Новое решение, полученное применением формулы (21)	Новое решение, полученное применением формулы (29)
1.	(33) $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$	$\left(d_2 - \frac{4\beta}{3}\right)^{-\frac{3}{4}\left(1-\frac{i\alpha}{\beta}\right)} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}t\right)\right]$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_a \in \mathbb{R}^1$, $\lvert\varepsilon\rvert^2 = \varepsilon_a\varepsilon_a$	$t^{-3/2}\left(d_2 + \frac{4\beta}{3t}\right)^{-\frac{3}{4}\left(1-\frac{i\alpha}{\beta}\right)} \exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$
2.	(41) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\gamma \exp\left(i\left(b_a^1 x_a + b_0^1 t\right)\right)$, $b_0^1 = k b_a^1 b_a^1 - \lambda\gamma^{4/3}$	$\gamma t^{3/2} \exp\left[i\left(\frac{b_a x_a - b_0}{t} - \frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)\right]$, $b_0 = b_a b_a k - \lambda\gamma^{4/3}$, $b_a \in \mathbb{R}^1$, $a = \overline{1,3}$
3.	(43) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[\frac{15k\lvert\alpha\rvert^2}{-4\lambda(\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))^2}\right]^{3/4} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}t\right)\right]$, $\alpha_a \in \mathbb{R}^1$, $\lvert\alpha\rvert^2 = \alpha_a\alpha_a$	$\left[\frac{15k\lvert\alpha\rvert^2}{-4\lambda(\alpha_a x_a)^2}\right]^{3/4} \exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$
4.	(45) $\lambda \in \mathbb{R}^1$	$\left[\frac{15k}{-4\lambda\lvert x + \varepsilon t\rvert^2}\right]^{3/4} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon_a x_a + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2}{2}t\right)\right]$	$\left[\frac{15k}{-4\lambda\lvert x\rvert^2}\right]^{3/4} \exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$

§ 5. Точные решения уравнения (7)

Настоящий параграф посвящен применению результатов §§ 2, 3 для построения семейств точных решений уравнения (7).

Как показано в § 2, редукция уравнения (7) по оператору X_2 преобразует его к свободному уравнению Шредингера (10b) с дополнительным условием (34). Подстановка (34) в уравнение (10b) приводит к системе (37) для функции $P(t,x)$. Следовательно, воспользовавшись формулами (38), (40), получим плосковолновое решение уравнения (7)

$$\Psi = \gamma \exp(i(b_0 t + b_a x_a)), \quad b_0 = k b_a b_a. \tag{47}$$

Рассмотрим теперь нелинейное эллиптическое уравнение (11b), которое получается из уравнения (7) редукцией по оператору X_3. Любое решение уравнения (11b) будет стационарным решением уравнения (7). Но из стационарных решений уравнения (7), применяя формулы размножения, полученные в § 3, мы можем построить семейства нестационарных решений. Таким образом, представляется важным построить классы точных решений уравнения (11b).

Пусть в уравнении (11b)

$$\varphi(x) = \varphi(w), \quad w = c_a x_a, \quad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad a = \overline{1,3}, \tag{48}$$

тогда для $\varphi(w)$ получаем ОДУ 2-го порядка

$$c_a c_a \left[\varphi_{ww} + \frac{\lambda}{k}\varphi(\varphi\overset{*}{\varphi})^2_w \Big/ (\varphi\overset{*}{\varphi})^2\right] = 0. \tag{49}$$

Если $c_a c_a = 0$, то уравнение (49) превращается в тождество и получаем решение уравнения (7)

$$\Psi = F(c_a x_a), \quad c_a c_a = 0, \tag{50}$$

где F — произвольная дважды дифференцируемая комплексная функция.

Если $c_a c_a > 0$, $c_a \in \mathbb{R}^1$, $a = 1,2,3$, то уравнение (49) в случае $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$ заменой

$$\varphi(w) = R(w)\exp iP(w) = \exp\left(R^1(w) + iP(w)\right), \tag{51}$$

где R, R^1, P — действительные функции аргумента w, сводится к системе ОДУ

$$R^1_{ww} = P^2_w, \qquad P_{ww} = -2P_w R^1_w. \tag{52}$$

Систему (52) удается полностью проинтегрировать и найти общее решение

$$R^1 = d_1 w - \frac{1}{2}\ln\left[1 + \exp(4d_1 w + d_2)\right] + d_3,$$
$$P = \pm\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left[\exp\left(2d_1 w + \frac{d_2}{2}\right)\right] + d_4, \quad d_1 > 0, \quad d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}^1.$$

Итак, воспользовавшись формулами (48), (51), получим решение уравнения (7) при $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$:

$$\Psi = \varphi(x) = \frac{\exp\left[d - d_1 w \pm i\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\exp\left(2d_1 w + \frac{d_2}{2}\right)\right]}{\sqrt{1 + \exp(4d_1 w + d_2)}}, \quad w = c_a x_a, \quad d = d_3 + i d_4. \tag{53}$$

Если в уравнении (49) $c_a c_a > 0$ и $\frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}$, то оно заменой

$$\varphi(w) = R(w) \exp iP(w) = (R^1)^{1/(4\lambda/k+1)} \exp(i(P(w)) \tag{54}$$

сводится к системе ОДУ для действительных функций

$$\begin{aligned} &R^1_{ww} = \lambda^1 R^1 P^2_w, \qquad \lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \\ &R^1 P_{ww} = -\frac{2}{\lambda^1} R^1_w P_w. \end{aligned} \tag{55}$$

Решение системы (55) при $P_w \neq 0$ сводится к интегрированию уравнения Эмдена–Фаулера

$$R^1_{ww} = \gamma_0^2 \lambda^1 (R^1)^{1-4/\lambda^1}, \quad 0 < \gamma_0 \in \mathbb{R}^1,$$

которое имеет частное решение

$$R^1 = \left[\frac{2\gamma_0 w}{\sqrt{\lambda^1 - 2}}\right]^{\lambda^1/2}, \quad \lambda^1 > 2. \tag{56}$$

С учетом (55)

$$\begin{aligned} &P_w = \gamma_0 (R^1)^{-2/\lambda^1} = \frac{\sqrt{\lambda^1 - 2}}{2w}, \\ &P = \frac{\sqrt{\lambda^1 - 1}}{2} \ln w + d_1, \quad d_1 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{57}$$

Таким образом, из (48), (54), (56), (57) получаем решение уравнения (7) при $\frac{\lambda}{k} > \frac{1}{4}$, $c_a c_a > 0$:

$$\Psi = \varphi = d(c_a x_a)^{1/2 + i\sqrt{\lambda^1 - 2}/2}, \quad d \in \mathbb{C}^1. \tag{58}$$

Если в (55) $P_w = 0$, то R^1 — линейная функция и, следовательно, решение уравнения (7) имеет вид

$$\Psi = (c_a x_a + c_0)^{1/\lambda^1} e^{id_1}, \qquad c_0, d_1 \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \quad c_a c_a > 0. \tag{59}$$

Для построения новых решений уравнения (11b) преобразуем его к системе двух действительных уравнений с помощью замены

$$\varphi(x) = R(x) \exp[iP(x)], \tag{60}$$

где R, P — действительные функции.

Подставляя (60) в уравнение (11 в), получаем систему нелинейных ДУЧП

$$\begin{aligned} &\Delta R = R P_a P_a - 4\frac{\lambda}{k} R_a R_a / R, \\ &R \Delta P = -2 P_a P_a. \end{aligned} \tag{61}$$

Система (61) заменой

$$R = \begin{cases} \exp R^1(x), & \dfrac{\lambda}{k} = -\dfrac{1}{4}, \\ [R^1(x)]^{1/(1+4\lambda/k)}, & \dfrac{\lambda}{k} \neq -\dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{62}$$

сводится, соответственно, к системам

$$\begin{aligned} &\Delta R^1 = P_a P_a, \qquad \frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}, \\ &\Delta P = -2R_a^2 P_a, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &\Delta R^1 = \lambda^1 R^1 P_a P_a, \qquad \lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k} \neq 0, \\ &R^1 \Delta P = -\frac{2}{\lambda^1} R_a^1 P_a. \end{aligned} \tag{64}$$

Можно заметить, что в случае $P(x) = d_1 = \mathrm{const}$ произвольное решение уравнения Лапласа

$$\Delta R^1 = 0 \tag{65}$$

удовлетворяет как системе ДУЧП (63), так и (64). Следовательно, воспользовавшись (60), (62), получим семейство стационарных решений уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \exp\left[R^1(x) + id_1\right], & \dfrac{\lambda}{k} = -\dfrac{1}{4}, \\ \left[R^1(x)\right]^{1/(1+4\lambda/k)} e^{id_1}, & \dfrac{\lambda}{k} \neq -\dfrac{1}{4}, \quad d_1 \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{66}$$

где $R^1(x)$ — произвольное действительное решение уравнения Лапласа (65).

Если в качестве $R^1(x)$ взять фундаментальное решение уравнения (65) при $n = 3$, т.е.

$$R^1(x) = \frac{1}{|x|},$$

то получаем решение уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{1}{|x|} + id_1\right], & \dfrac{\lambda}{k} = -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\exp(id_1)}{|x|^{1/(1+4\lambda/k)}}, & \dfrac{\lambda}{k} \neq -\dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{67}$$

Заметим, что при $\frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}$ решение (67) удовлетворяет условию (46).

Рассмотрим теперь систему (63) с дополнительным условием

$$\Delta P = 0. \tag{68}$$

Известно частное действительное решение уравнения (68):

$$P = f(c_a x_a) + f(\overset{*}{c}_a x_a), \qquad c_a \in \mathbb{C}^1, \quad c_a c_a = 0, \tag{69}$$

где f — произвольная действительная функция.

Подставляя выражение (69) в систему (63), после соответствующих преобразований, в предложении, что

$$R^1 = R^1(c_a x_a, \overset{*}{c}_a x_a), \tag{70}$$

получаем для R^1 ОДУ

$$R^1_{VV} = 1, \qquad V = i\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right],$$

т.е.

$$R^1 = -\frac{1}{2}\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right]^2 + id_1\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right] + d_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1, \tag{71}$$

С учетом (60), (62) получаем еще одно семейство решений уравнения (7) при $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$, которое содержит произвольную функцию f:

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \exp\Big\{-\frac{1}{2}\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right]^2 + id_1\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right] + \\ +i\left[f(c_a x_a) + f(\overset{*}{c}_a x_a)\right]\Big\}, \qquad c_a c_a = 0.\end{gathered} \tag{72}$$

Подстановка (69) в систему (64) в предложении (70), приводит к решению

$$R^1(x) = \begin{cases} d_1 \exp\left(\sqrt{1 + 4\dfrac{\lambda}{k}}\,v(x)\right) + d_2 \exp\left(-\sqrt{1 + 4\dfrac{\lambda}{k}}\,v(x)\right), & \dfrac{\lambda}{k} > -\dfrac{1}{4}, \\ d_1 \cos\left(\sqrt{\left|1 + 4\dfrac{\lambda}{k}\right|}\,v(x)\right) + d_2 \sin\left(\sqrt{\left|1 + 4\dfrac{\lambda}{k}\right|}\,v(x)\right), & \dfrac{\lambda}{k} < -\dfrac{1}{4}, \end{cases} \tag{73}$$

где

$$v(x) = i\left[f(c_a x_a) - f(\overset{*}{c}_a x_a)\right]. \tag{74}$$

Воспользовавшись (60), (62), получим решение уравнения (7)

$$\Psi = \begin{cases} \left[d_1 \exp\left(\sqrt{\lambda^1}\,v(x)\right) + d_2 \exp\left(-\sqrt{\lambda^1}\,v(x)\right)\right]^{1/\lambda^1} \times \\ \qquad \times \exp i\left[f(c_a x_a) + f(\overset{*}{c}_a x_a)\right], \quad \lambda^1 > 0, \\ \left[d_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda^1|}\,v(x)\right) + d_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda^1|}\,v(x)\right)\right]^{1/\lambda^1} \times \\ \qquad \times \exp i\left[f(c_a x_a) + f(\overset{*}{c}_a x_a)\right], \quad \lambda^1 < 0, \end{cases} \tag{75}$$

$\lambda^1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k}$, $c_a c_a = 0$, $c_a \in \mathbb{C}^1$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$, ($v(x)$ — см. (74)).

Замечание 5. В случае двух пространственных переменных ($n = 2$) формулы (69), (71) при $c_1 = 0$, $c_1^2 + c_2^2 = 0$ задают общее решение нелинейной системы ДУЧП (63) с условием (68), а формулы (69), (73) — общее решение системы (64) с условием (68).

В заключение, с помощью формул размножения (см. § 3) построим из стационарных решений уравнения (7) нестационарные семейства решений. Поскольку при применении общей формулы размножения решений выражения слишком громоздки, мы воспользовались частными случаями этой формулы — выражениями (21) и (29). Полученные новые решения уравнения (7) приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ п/п	№ формулы стационарного решения	Решение, полученное с помощью формулы (3.3)	Решение, полученное с помощью формулы (3.11)
1	(50)	$F(c(x+\varepsilon t))\exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^3$, $\lvert\varepsilon\rvert^2=\varepsilon_a\varepsilon_a$	$t^{-3/2}F\left(\frac{c_a x_a}{t}\right)\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$, $c_a c_a=0$, $c_a\in\mathbb{C}^1$
2	(53) $\frac{\lambda}{k}=-\frac{1}{4}$	$\frac{\exp[-d_1 c(x+\varepsilon t)]}{\sqrt{1+\exp[4d_1 c(x+\varepsilon t)+d_2]}}\times$ $\times\exp\left\{i\left[\pm\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(2d_1 c(x+\varepsilon t)+\frac{d_2}{2}\right)+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{1}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]\right\}$, $c=(c_1,c_2,c_3)$, $c\in\mathbb{R}^3$	$\frac{t^{-3/2}\exp\left(-\frac{d_1 c_a x_a}{t}\right)}{\sqrt{1+\exp\left[\frac{4d_1 c_a x_a}{t}+d_2\right]}}\exp\left\{i\left[\pm\sqrt{2}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times\mathrm{arctg}\ \exp\left[\frac{2d_1 c_a x_a}{t}+\frac{d_2}{2}\right]-\frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right]\right\}$, $c\in\mathbb{R}^3$
3	(58) $\frac{\lambda}{k}>\frac{1}{4}$	$[c(x+\varepsilon t)]^{\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{\lambda}{k}-\frac{1}{4}}}\exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$, $c\in\mathbb{R}^3$	$t^{-2-i\sqrt{\frac{\lambda}{k}-\frac{1}{4}}}(c_a x_a)^{\frac{1}{2}+i\sqrt{\frac{\lambda}{k}-\frac{1}{4}}}\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$, $c\in\mathbb{R}^3$
4	(59) $\frac{\lambda}{k}\neq-\frac{1}{4}$	$[c(x+\varepsilon t)+c_0]^{\frac{1}{1+4\lambda/k}}\exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$, $c_0\in\mathbb{R}^1$, $c\in\mathbb{R}^3$	$t^{\varkappa}(c_\nu x_\nu)^{\frac{1}{1+4\lambda/k}}\exp\left(-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$, $\varkappa=-\frac{3}{2}-\frac{1}{1+4\lambda/k}$, $x_0=t,\nu=\overline{0,3}$, $c_0\in\mathbb{R}^1$, $c\in\mathbb{R}^3$
5	(66) $\frac{\lambda}{k}=-\frac{1}{4}$ $\frac{\lambda}{k}\neq-\frac{1}{4}$	$\exp\left\{R^1(x+\varepsilon t)+\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right\}$, $\Delta R^1(x)=0$, $[R^1(x+\varepsilon t)]^{\frac{1}{1+4\lambda/k}}\exp\left\{\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right\}$, $\Delta R^1(x)=0$	$t^{-3/2}\exp\left[R^1\left(\frac{x}{t}\right)-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right]$, $\Delta R^1(x)=0$, $t^{-3/2}\exp\left[-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right]\left[R^1\left(\frac{x}{t}\right)\right]^{\frac{1}{1+4\lambda/k}}$, $\Delta R^1(x)=0$
6	(67) $\frac{\lambda}{k}=-\frac{1}{4}$	$\exp\left[\frac{1}{\lvert x+\varepsilon t\rvert}+\frac{1}{2k}\left(\varepsilon x+\frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$ $\lvert x+\varepsilon t\rvert=\sqrt{\lvert x\rvert^2+\lvert\varepsilon\rvert^2 t^2+2x\varepsilon t}$	$t^{-3/2}\left[\frac{t}{\lvert x\rvert}-\frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right]$

Таблица 3 (продолжение)

№ п/п	№ формулы стационарного решения	Решение, полученное с помощью формулы (3.3)	Решение, полученное с помощью формулы (3.11)
7	(67) $\frac{\lambda}{k} \neq -\frac{1}{4}$	$(\lvert x+\varepsilon t\rvert)^{-\frac{1}{1+4\lambda/k}} \exp\left[\frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]$	$t^{-3/2}\left[\frac{t}{\lvert x\rvert}\right]^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \exp\left(-i\frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right)$
8	(72) $\frac{\lambda}{k} = -\frac{1}{4}$	$\exp\left\{\frac{1}{2}[V(\varepsilon t+x)]^2 + dV(\varepsilon t+x) + \right.$ $\left. +i\left[P(x+\varepsilon t) + \frac{1}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right]\right\},$ $V(x+\varepsilon t) = i[f(c(x+\varepsilon t)) - f(\overset{*}{c}(x+\varepsilon t))],$ $P(x)$ — см. (36), $c=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{C},\ \lvert c\rvert = 0$	$t^{-3/2}\exp\left\{\frac{1}{2}V^2\left(\frac{x}{t}\right) + dV\left(\frac{x}{t}\right) + i\left[P\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\lvert x\rvert^2}{4kt}\right]\right\}$ $V\left(\frac{x}{t}\right) = i\left[f\left(\frac{cx}{t}\right) - f\left(\frac{\overset{*}{c}x}{t}\right)\right],\ P(x)$ см. (36)
9	(75) $\frac{\lambda}{k} > -\frac{1}{4}$	$\left\{d_1\exp\left[\sqrt{1+4\frac{\lambda}{k}}V(x+\varepsilon t)\right] + \right.$ $\left. +d_2\exp\left[-\sqrt{1+4\frac{\lambda}{k}}V(x+\varepsilon t)\right]\right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times$ $\times\exp\left[iP(x+\varepsilon t) + \frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right],$ $P,\ V$ см. № 8, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$	$\left\{d_1\exp\left[\sqrt{1+4\frac{\lambda}{k}}V\left(\frac{x}{t}\right)\right] + \right.$ $\left. +d_2\exp\left[-\sqrt{1+4\frac{\lambda}{k}}V\left(\frac{x}{t}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times$ $\times t^{-3/2}\exp\left[iP\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right],$ $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1,\ P,\ V$ см. № 8
10	(75) $\frac{\lambda}{k} < -\frac{1}{4}$	$\left\{d_1\cos\left[\sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}V(x+\varepsilon t)\right] + \right.$ $\left. +d_2\sin\left[\sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}V(x+\varepsilon t)\right]\right\}^{1/\lambda_1} \times$ $\times\exp\left[iP(x+\varepsilon t) + \frac{i}{2k}\left(\varepsilon x + \frac{\lvert\varepsilon\rvert^2 t}{2}\right)\right],$ $\lambda_1 = 1 + 4\frac{\lambda}{k},\ P,\ V$ см. № 8, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1$	$\left\{d_1\cos\left[\sqrt{\lambda_1}V\left(\frac{x}{t}\right)\right] + \right.$ $\left. +d_2\sin\left[\sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}V\left(\frac{x}{t}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{1+4\lambda/k}} \times$ $\times t^{-3/2}\exp\left[iP\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{i\lvert x\rvert^2}{4kt}\right],$ $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^1,\ P,\ V$ см. № 8

§ 6. Нелинейные системы уравнений второго порядка, инвариантные относительно алгебр $AG(1,n)$, $AG_1(1,n)$ и $AG_2(1,n)$

Рассмотрим систему нелинейных ДУЧП второго порядка параболического типа

$$\lambda_1 \Psi^1_t = A^1_{ab}(\Psi^1, \Psi^{(2)})\Psi^1_{ab} + B^1(\Psi^1, \Psi^{(2)}, \underset{1}{\Psi}^1, \underset{1}{\Psi}^{(2)}), \tag{76a}$$

$$\lambda_2 \Psi^{(2)}_t = A^{(2)}_{ab}(\Psi^1, \Psi^{(2)})\Psi^{(2)}_{ab} + B^{(2)}(\Psi^1, \Psi^{(2)}, \underset{1}{\Psi}^1, \underset{1}{\Psi}^{(2)}), \tag{76b}$$

где $\lambda_k = \mathrm{const}$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $A^{(k)}_{ab}$, $a, b = \overline{1,n}$, $B^{(k)}$, $k = 1, 2$, — произвольные комплексные (в частности, действительные) функции из класса C^1;

$$\Psi^{(k)}_t = \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial t}, \qquad \Psi^{(k)}_{ab} = \frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{x_a \partial x_b},$$

$$\underset{1}{\Psi}^{(k)} = (\Psi^{(k)}_1, \dots, \Psi^{(k)}_n), \qquad \Psi^{(k)}_a = \frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial x_a}.$$

Системы уравнений вида (76) широко используются в качестве математических моделей для описания процессов диффузии при химических реакциях, в популяционной генетике, при многофазном тепломассопереносе и т.д. (ряд конкретных примеров приведен с [9]). В случае

$$\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}{}^1, \qquad A^{(2)}_{ab} = \overset{*}{A}{}^1_{ab}, \qquad B^{(2)} = \overset{*}{B}{}^1, \qquad \lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1 = -\frac{i}{k} \tag{77}$$

систему (76) можно рассматривать как пару комплексно-сопряженных уравнений вида (3).

Как отмечалось в [10], для параболических уравнений (систем) естественно требовать инвариантность относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$. Рассмотрим представление алгебры $AG(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b) и

$$G_a = t\partial_a - \frac{x_a}{2} J_\lambda, \quad a = \overline{1,n}, \quad J_\lambda = \lambda_1 \Psi^1 \frac{\partial}{\partial \Psi^1} - \lambda_2 \Psi^{(2)} \frac{\partial}{\partial \Psi^{(2)}}. \tag{78}$$

Очевидно, что в случае $\Psi^1 = U + iV$, $\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}{}^1$, $\lambda_1 = i/k$, $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1$ операторы (78) совпадают с (2c).

Теорема 2. *Система уравнений (76) инвариантна относительно алгебры Галилея $G(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b) и (78) тогда и только тогда, когда она эквивалентна уравнениям*

$$\lambda_1 \Psi^1_t = C^1(v)\Delta \Psi^1 + \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1} \Psi^1_a \Psi^1_a + \Psi^1 f^1(v, \theta), \tag{79a}$$

$$\lambda_2 \Psi^{(2)}_t = C^{(2)}(v)\Delta \Psi^{(2)} + \frac{1 - C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}} \Psi^{(2)}_a \Psi^{(2)}_a + \Psi^{(2)} f^{(2)}(v, \theta), \tag{76b}$$

где $v = (\Psi^1)^{\lambda_2} (\Psi^{(2)})^{-\lambda_1}$, $\theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a} v^{-2} = \frac{\partial}{\partial x_a}(\ln v)\frac{\partial}{\partial x_a}(\ln v)$, C^k, f^k, $k = 1, 2$ — произвольные функции.

Доказательство. *Необходимость.* Воспользуемся алгоритмом Ли (современное изложение см. в [11]). Подействуем на систему уравнений (76) дважды продолженным инфинитезимальным оператором (40)

$$\tilde{\tilde{X}} = X + \rho_i^k \frac{\partial}{\partial \Psi_i^{(k)}} + \sigma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \Psi_{ij}^{(k)}}, \qquad k = 1, 2, \quad i, j = \overline{0, n},$$

где

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial \Psi^{(k)}},$$

$$x_0 = t, \quad \xi^i = \xi^i \left(t, x, \Psi^1, \Psi^{(2)}\right), \quad \eta^i = \eta^i \left(t, x, \Psi^1, \Psi^{(2)}\right),$$

функции ρ_i^k, σ_{ij}^k выражаются через ξ^i, η^k по известным формулам; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В результате получаем систему определяющих уравнений

$$\lambda_1 \rho_0^1 \overset{\mathfrak{M}}{=} A_{ab}^1 \left(\Psi^1, \Psi^{(2)}\right) \sigma_{ab}^1 + \left(\frac{\partial A_{ab}^1}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^1 + \frac{\partial B^1}{\partial \Psi^{(k)}}\right) \eta^k + \rho_a^k \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}}, \tag{80a}$$

$$\lambda_2 \rho_0^2 \overset{\mathfrak{M}}{=} A_{ab}^{(2)} \left(\Psi^1, \Psi^{(2)}\right) \sigma_{ab}^{(2)} + \left(\frac{\partial A_{ab}^{(2)}}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^{(2)} + \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \Psi^{(k)}}\right) \eta^k + \rho_a^k \frac{\partial B^{(2)}}{\partial \Psi_a^{(k)}}, \tag{80b}$$

где $\mathfrak{M}$ — система (76), рассматриваемая как многообразие в дважды продолженном пространстве переменных.

Определим коэффициенты оператора X для алгебры $G(1, n)$ с базисными операторами (2a), (2b), (78). Очевидно, что

$$\begin{gathered}
\xi^0 = d_0, \quad \xi^a = C_{ab} x_b + g_a t + d_a, \quad C_{ab} + C_{ba} = 0, \quad a \neq b, \\
\eta^1 = -\frac{\lambda_1}{2} g_a x_a \Psi^1, \quad \eta^2 = -\frac{\lambda_2}{2} g_a x_q \Psi^{(2)},
\end{gathered} \tag{81}$$

где d_0, d_a, C_{ab}, $a < b$, g_a — произвольные комплексные параметры. Используя (81), получаем в явном виде

$$\begin{gathered}
\rho_0^k = -\frac{\lambda_k}{2} g_a x_a \Psi_t^{(k)} - g_a \Psi_a^{(k)}, \\
\rho_a^k = -\frac{\lambda_k}{2} g_a \Psi^{(k)} - \frac{\lambda_k}{2} g_b x_b \Psi_a^{(k)} - \Psi_b^{(k)} C_{ab}, \\
\sigma_{ab}^k = -\frac{\lambda_k}{2} \left(g_b \Psi_a^{(k)} + g_a \Psi_b^{(k)}\right) - \frac{\lambda_k}{2} g_{a_1} x_{a_1} \Psi_{ab}^{(k)} - C_{b_1 b} \Psi_{ab_1}^{(k)} - C_{b_1 a} \Psi_{bb_1}^{(k)}, \\
a_1, b_1 = \overline{1, n}.
\end{gathered} \tag{82}$$

Подставляя выражения (81), (82) в определяющее уравнение (80a) и переход на многообразие $\mathfrak{M}$, имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_1}{2} x_a g_a B^1 + \lambda_1 g_a \Psi_a^1 - \frac{\lambda_1}{2} A_{ab}^1 \left(g_b \Psi_a^1 + g_a \Psi_b^1\right) - \\
- A_{ab}^1 (C_{b_1 b} \Psi_{ab_1}^1 + C_{b_1 a} \Psi_{bb_1}^1) - \frac{\lambda_k}{2} g_{a_1} x_{a_1} \Psi^{(k)} \left(\frac{\partial A_{ab}^1}{\partial \Psi^{(k)}} \Psi_{ab}^1 + \frac{\partial B^1}{\partial \Psi^{(k)}}\right) - \\
- \frac{\lambda_k}{2} (g_a \Psi^{(k)} + g_b x_b \Psi_a^{(k)}) \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}} - C_{ba} \Psi_b^{(k)} \frac{\partial B^1}{\partial \Psi_a^{(k)}} = 0.
\end{gathered} \tag{83}$$

Расщепляя выражение (83) по параметрам C_{ab}, $a<b$, учетом независимости всех переменных t, x, $\Psi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}_{ab}$, $k=1,2$, $a,b=\overline{1,n}$, получаем

$$A^1_{ab}\left(\Psi^1,\Psi^{(2)}\right)=\delta^b_a A^1\left(\Psi^1,\Psi^{(2)}\right),\quad a,b=\overline{1,n}, \tag{84}$$

где

$$\delta^b_a=\begin{cases}1, & a=b,\\ 0, & a\neq b,\end{cases}$$

A^1 — произвольная функция. Функция B^1 должна удовлетворить системе линейных ДУЧП

$$\left[\Psi^1_b\frac{\partial}{\partial\Psi^1_a}-\Psi^1{}_a\frac{\partial}{\partial\Psi^1_b}+\Psi^{(2)}_b\frac{\partial}{\partial\Psi^{(2)}_a}-\Psi^{(2)}_a\frac{\partial}{\partial\Psi^{(2)}_b}\right]B^1=0,\quad a<b,\ a,b=\overline{1,n}. \tag{85}$$

Решая систему (85), находим общее решение

$$B^1=\hat{B}^1\left(\Psi^1,\Psi^{(2)},\Psi^1_a\Psi^1_a,\Psi^1_a\Psi^{(2)}_a,\Psi^{(2)}_a\Psi^{(2)}_a\right), \tag{86}$$

где $\hat{B}^1$ — произвольная функция.

Учитывая соотношения (84), (86), выражение (83) приводим к виду

$$\begin{gathered}\frac{\lambda_1}{2}g_a x_a\hat{B}^1+\lambda_1 g_a\Psi^1_a-\lambda_1A^1g_a\Psi^1_a-\frac{\lambda_k}{2}g_{a_1}x_{a_1}\Psi^k\left(\frac{\partial A^1}{\partial\Psi^k}\Delta\Psi^1+\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial\Psi^k}\right)-\\ -\frac{\lambda_k}{2}\left(g_a\Psi^k+g_bx_b\Psi^k_a\right)\left(2\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk}}\Psi^k_a+\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}}\Psi^{k_1}_a\right)=0,\quad k\neq k_1,\end{gathered} \tag{87}$$

где

$$y_{kk}=\Psi^k_a\Psi^k_a,\qquad y_{kk_1}=\Psi^k_a\Psi^{k_1}_a.$$

Так как соотношение (87) должно выполняться при произвольных параметрах g_a, $a=\overline{1,n}$, и независимых переменных x, Ψ^k, Ψ^k_a, Ψ^k_{aa}, $a=\overline{1,n}$, то оно эквивалентно следующей системе линейных ДУЧП:

$$\lambda_1\Psi^1\frac{\partial A^1}{\partial\Psi^1}+\lambda_2\Psi^{(2)}\frac{\partial A^1}{\partial\Psi^{(2)}}=0, \tag{88a}$$

$$\lambda_1\Psi^1_a\left(1-A^1\right)=\frac{\lambda_k}{2}\Psi^k\left(2\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk}}\Psi^k_a+\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}}\Psi^{k_1}_a\right),\quad k_1\neq k,\ a=\overline{1,n}, \tag{88b}$$

$$\lambda_k\Psi^k\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial\Psi^k}+\lambda_k\Psi^k_a\left(2\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk}}\Psi^k_a+\frac{\partial\hat{B}^1}{\partial y_{kk_1}}\Psi^{k_1}_a\right)=\lambda_1\hat{B}^1,\quad k_1\neq k. \tag{88c}$$

Общее решение уравнения (88a) задается выражением

$$A^1\left(\Psi^1,\Psi^{(2)}\right)=C^1(v),\qquad v=\left(\Psi^1\right)^{\lambda_2}\left(\Psi^{(2)}\right)^{-\lambda_1}, \tag{89}$$

где C^1 — произвольная функция.

Решение уравнений (88b), (88c) с учетом (89) сводится к построению общего решения уравнения

$$\lambda_1\Psi^1\frac{\partial\hat f^1}{\partial\Psi^1}+\lambda_2\Psi^{(2)}\frac{\partial\hat f^1}{\partial\Psi^{(2)}}+2(\lambda_1+\lambda_2)\tilde v\frac{\partial\hat f^1}{\partial\tilde v}=\lambda_1\hat f^1, \tag{90}$$

где

$$\tilde v=\left(\lambda_1\Psi^1\Psi_a^{(2)}-\lambda_2\Psi^{(2)}\Psi_a^1\right)\left(\lambda_1\Psi^1\Psi_a^{(2)}-\lambda_2\Psi^{(2)}\Psi_a^1\right), \tag{91}$$

тогда

$$\hat B^1=\hat f^1\left(\Psi^1,\Psi^{(2)},\tilde v\right)-\left(1-C^1(v)\right)\Psi_a^1\Psi_a^1/\Psi^1. \tag{92}$$

В случае $\lambda_1+\lambda_2=0$ уравнение (90) легко решается и получаем общее решение вида

$$\hat f^1=\Psi^1 f^1(v,\tilde v), \tag{93}$$

где f^1 — произвольная функция (v, $\tilde v$ — см. (89), (91)). Если $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$, то общее решение уравнения (90) имеет вид

$$\hat f^1=\Psi^1 f^1\left(v,\frac{\tilde v}{\left(\Psi^1\Psi^{(2)}\right)^2}\right), \tag{94}$$

где f^1 — произвольная функция.

Можно заметить, что при $\lambda_1+\lambda_2=0$ выражения v и $\left(\Psi^1\Psi^{(2)}\right)^2$ функционально зависимы, поэтому решение (93) получается из (94) как частный случай. Следовательно, (94) является общим решением уравнения (90). Воспользовавшись формулами (86) и (92) получим окончательный вид искомой функции:

$$B^1=\Psi^1 f(v,\theta)+\frac{1-C^1(v)}{\Psi^1}\Psi_a^1\Psi_a^1, \tag{95}$$

где

$$\theta=\frac{\tilde v}{\left(\Psi^1\Psi^{(2)}\right)^2}=\frac{\partial v_a}{\partial x_a}\frac{\partial v_a}{\partial x_a}v^{-2}\qquad (v\text{ — см. (89)}).$$

Полностью идентичные выкладки для определяющего уравнения (80b) приводят к искомым функциям

$$\begin{gathered}A^{(2)}=C^{(2)}(v),\qquad A_{ab}^{(2)}=\delta_a^b A^{(2)},\\ B^{(2)}=\Psi^{(2)}f^{(2)}(v,\theta)+\frac{1-C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}}\Psi_a^{(2)}\Psi_a^{(2)}.\end{gathered} \tag{96}$$

Подставляя формулы (84), (89), (95), (96) в исходную систему (76), получаем систему (79). Необходимость доказана. Достаточность доказывается простой проверкой.

Следствие. *Если* $\lambda_1 = i/k$, $k \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1$, $\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}{}^{(1)}$, $C^{(2)} = \overset{*}{C}{}^{(1)}$, $f^{(2)} = \overset{*}{f}{}^{(1)}$, *то система (79) сводится к паре комплексно-сопряженных нелинейных обобщений уравнения (1):*

$$\frac{i}{k}\Psi_t = C(\Psi\overset{*}{\Psi})\Delta\Psi + \overset{*}{\Psi}\frac{1 - C(\Psi\overset{*}{\Psi})}{\Psi\overset{*}{\Psi}}\Psi_a\Psi_a + \Psi f(\Psi, \overset{*}{\Psi}, (\Psi\overset{*}{\Psi})_a(\Psi\overset{*}{\Psi})_a), \tag{97a}$$

$$-\frac{i}{k}\overset{*}{\Psi}_t = C(\Psi\overset{*}{\Psi})\Delta\overset{*}{\Psi} + \Psi\frac{1 - \overset{*}{C}(\Psi\overset{*}{\Psi})}{\Psi\overset{*}{\Psi}}\overset{*}{\Psi}_a\overset{*}{\Psi}_a + \overset{*}{\Psi}\overset{*}{f}(\Psi, \overset{*}{\Psi}, (\Psi\overset{*}{\Psi})_a(\Psi\overset{*}{\Psi})_a). \tag{97b}$$

Очевидно, что при $C(\Psi\overset{*}{\Psi}) = 1$ *уравнение (97a) содержит уравнение (4) как частный случай.*

Класс уравнений (79) достаточно широк. Чтобы его сузить, потребуем дополнительную инвариантность относительно оператора масштабных преобразований:

$$D = 2t\partial_t + x_a\partial_a + I_\alpha, \qquad I_\alpha = \alpha_1\Psi^1\partial_{\Psi^1} + \alpha_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}. \tag{98}$$

Теорема 3. *Галилеевски-инвариантная система уравнений (79) инвариантна относительно группы масштабных преобразований, порождаемой оператором (98), только тогда, когда она эквивалентна уравнениям*

$$\lambda_1\Psi^1_t = D_1\Delta\Psi^1 + \frac{1 - D_1}{\Psi^1}\Psi^1_a\Psi^1_a + \Psi^1\hat{f}^1(\hat{\theta})v^{-2/\delta}, \tag{99a}$$

$$\lambda_2\Psi^{(2)}_t = D_2\Delta\Psi^{(2)} + \frac{1 - D_2}{\Psi^{(2)}}\Psi^{(2)}_a\Psi^{(2)}_a + \Psi^{(2)}\hat{f}^{(2)}(\hat{\theta})v^{-2/\delta}, \tag{99b}$$

если

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и

$$\lambda_1\Psi^1_t = C^1(v)\Delta\Psi^1 + \frac{1 - C^1(v)}{\Psi^1}\Psi^1_a\Psi^1_a + \Psi^1 g^1(v)\theta, \tag{100a}$$

$$\lambda_2\Psi^{(2)}_t = C^{(2)}(v)\Delta\Psi^{(2)} + \frac{1 - C^{(2)}(v)}{\Psi^{(2)}}\Psi^{(2)}_a\Psi^{(2)}_a + \Psi^{(2)} g^{(2)}(v)\theta, \tag{100b}$$

если $\delta = 0$, *где* $\hat{\theta} = v^{2/\delta}\theta$, v, θ *— см. теорему 2,* D_1, D_2 *— произвольные постоянные,* $\hat{f}^{(k)}$, $C^{(k)}$, $g^{(k)}$, $k = 1,2$ *— произвольные функции.*

Доказательство. Воспользуемся системой определяющих уравнений (80). Подстановка в (80a) коэффициентов уравнения (79a) приводит к соотношению

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\rho_0^1 \overset{\mathfrak{M}}{=} C^1(v)\delta_a^a\sigma_{aa}^1+\lambda_2 v\frac{\partial C^1}{\partial v}\Delta\Psi^1\frac{\eta^1}{\Psi^1}-\lambda_1 v\frac{\partial C^1}{\partial v}\Delta\Psi^1\frac{\eta^{(2)}}{\Psi^{(2)}}+\\
&+2\frac{1-C^1(v)}{\Psi^1}\Psi_a^1\rho_a^1-\frac{\lambda_2 v\frac{\partial C^1}{\partial v}+(1-C^1)}{(\Psi^1)^2}\eta^1\Psi_a^1\Psi_a^1+f^1\eta^1+\\
&+\frac{\lambda_1 v}{\Psi^1\Psi^{(2)}}\frac{\partial C^1}{\partial v}\eta^{(2)}\Psi_a^1\Psi_a^1+\lambda_2\Psi^1 v\frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\eta^1}{\Psi^1}-\lambda_1\Psi^1 v\frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\eta^2}{\Psi^{(2)}}+\\
&+2\Psi^1\frac{\partial\Psi^1}{\partial\theta}\left[\left(-\lambda_2^2\frac{\Psi_a^1\Psi_a^1}{(\Psi^1)^3}+\lambda_1\lambda_2\frac{\Psi_a^1\Psi_a^{(2)}}{(\Psi^1)^2\Psi^{(2)}}\right)\eta^1+\right.\\
&+\left(-\lambda_1^2\frac{\Psi_a^{(2)}\Psi_a^{(2)}}{(\Psi_a^{(2)})^3}+\lambda_1\lambda_2\frac{\Psi_a^1\Psi_a^{(2)}}{\Psi^1(\Psi^{(2)})^2}\right)\eta^{(2)}+\\
&\left.+\left(\lambda_2^2\frac{\Psi_a^{(2)}}{(\Psi^1)^2}-\lambda_1\lambda_2\frac{\Psi_a^{(2)}}{\Psi^1\Psi^{(2)}}\right)\rho_a^1+\left(\lambda_1^2\frac{\Psi_a^{(2)}}{(\Psi^{(2)})^2}-\lambda_1\lambda_2\frac{\Psi_a^1}{\Psi^1\Psi^{(2)}}\right)\rho_a^{(2)}\right],
\end{aligned}
\tag{101}
$$

где $\mathfrak{M}$ — многообразие, порожденное системой (79) в продолженном пространстве.

Нетрудно подсчитать, что для оператора (98)

$$
\begin{aligned}
&\eta^1=\alpha_1\Psi^1, \qquad \eta^{(2)}=\alpha_2\Psi^{(2)},\\
&\rho_0^1=(\alpha_1-2)\Psi_t^1, \qquad \rho_0^{(2)}=(\alpha_2-2)\Psi_t^{(2)},\\
&\rho_a^1=(\alpha_1-1)\Psi_a^1, \qquad \rho_a^{(2)}=(\alpha_2-1)\Psi_a^{(2)},\\
&\sigma_{aa}^1=(\alpha_1-2)\Psi_{aa}^1, \qquad \sigma_{aa}^{(2)}=(\alpha_2-2)\Psi_{aa}^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Подставляя выражения (102) для η^k, ρ_i^k, σ_{aa}^k, $k=1,2$; $a=\overline{1,n}$; $i=\overline{0,n}$, в определяющее уравнение (101), после соответствующих преобразований получаем соотношение

$$
\delta v\Psi^1\frac{\partial f^1}{\partial v}+\delta v\frac{\partial C^1}{\partial v}\left(\Delta\Psi^1-\frac{\Psi_a^1\Psi_a^1}{\Psi^1}\right)-2\Psi^1\theta\frac{\partial f^1}{\partial\theta}+2\Psi^1 f^1=0. \tag{103}
$$

Если $\delta\neq 0$, то расщепление уравнения (103) по вторым производным Ψ_{aa}^1 приводит к условию

$$
\frac{\partial C^1}{\partial v}=0,
$$

т.е.

$$
C^1(v)=D_1=\text{const}. \tag{104}
$$

Для определения функции f^1 получаем линейное ДУЧП первого порядка

$$
-v\frac{\partial f^1}{\partial v}+\frac{2}{\delta}\theta\frac{\partial f^1}{\partial\theta}=f^1
$$

с общим решением

$$
f^1=v^{-2/\delta}\hat{f}^1\left(v^{2/\delta}\theta\right), \tag{105}
$$

где $\hat{f}^1$ — произвольная функция.

Если же $\delta = 0$, то, очевидно, соотношение (103) приводит к условиям

$$f^1 = \theta g^1(v), \tag{106}$$

$g^1(v)$, $C^1(v)$ — произвольные функции.

Аналогичные выкладки проводятся для определяющего уравнения (80b) с коэффициентами из уравнения (79b) и (102). В результате получаем

$$C^{(2)}(v) = D_2 = \text{const},$$
$$f^{(2)} = v^{-2/\delta} \hat{f}^2 \left(v^{2/\delta}\theta\right),$$

если $\delta \neq 0$;

$$f^{(2)} = \theta g^{(2)}(v),$$
$$C^{(2)}(v) \text{ — произвольная функция,}$$

если $\delta = 0$. Теорема доказана.

Оказывается, что среди систем (99), (100) есть такие, которые допускают операторы проективных преобразований

$$\Pi = t^2\partial_t + tx_a\partial_a - \frac{|x|^2}{4}J_\lambda + tI_\alpha, \tag{107}$$

где J_λ, I_α определены в (78) и (98). Другими словами, существуют системы уравнений, инвариантные относительно алгебры $AG_2(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b), (78), (98), (107).

Теорема 4. *1. Система уравнений вида (99) при произвольных D_k, $\hat{f}^{(k)}$, $k = 1, 2$ инвариантна относительно алгебры $AG_2(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b), (78), (98), (107), причем*

$$I_\alpha = -\frac{n}{2}\left(D_1\Psi^1\partial_{\Psi^1} + D_2\Psi^{(2)}\partial_{\Psi^{(2)}}\right), \qquad \delta = -\frac{n}{2}\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Система уравнений (100) инвариантна относительно алгебры $AG_2(1,n)$ только тогда, когда

$$C^{(k)}(v) = D_k = \text{const}, \quad k = 1, 2,$$

причем

$$I_\alpha = -\frac{D_1}{\lambda_1}\frac{n}{2}J_\lambda = -\frac{D_2}{\lambda_2}\frac{n}{2}J_\lambda, \qquad \delta = -\frac{n}{2}\begin{vmatrix} D_1 & D_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство теоремы 4 такое же, как и теорем 2, 3.

Следствие. *Если положить $\lambda_1 = i/k$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\lambda_2 = \overset{*}{\lambda}_1$, $\Psi^{(2)} = \overset{*}{\Psi}{}^1$, $\hat{f}^{(2)} = \overset{*}{\hat{f}}{}^1 = \overset{*}{f}$, $D_1 = D_2 = q$, $q \in \mathbb{R}^1$, то $\delta = nqi/k \neq 0$ и система уравнений (99) сводится к паре комплексно-сопряженных нелинейных обобщений уравнений (1)*

$$\frac{i}{k}\Psi_t = q\Delta\Psi + \overset{*}{\Psi}\frac{1-q}{\Psi\overset{*}{\Psi}}\Psi_a\Psi_a + \Psi(\Psi\overset{*}{\Psi})^{\frac{2}{nq}} f\left((\Psi\overset{*}{\Psi})^{-2\left(1+\frac{1}{nq}\right)}(\Psi\overset{*}{\Psi})_a(\Psi\overset{*}{\Psi})_a\right), \tag{108a}$$

$$-\frac{i}{k}\overset{*}{\Psi}_t = q\Delta\overset{*}{\Psi}+\Psi\frac{1-q}{\Psi\overset{*}{\Psi}}\overset{*}{\Psi}_a\overset{*}{\Psi}_a+\overset{*}{\Psi}(\Psi\overset{*}{\Psi})^{\frac{2}{nq}}\overset{*}{f}\left((\Psi\overset{*}{\Psi})^{-2\left(1+\frac{1}{nq}\right)}(\Psi\overset{*}{\Psi})_a(\Psi\overset{*}{\Psi})_a\right), \quad (108b)$$

инвариантных относительно алгебры $AG_2(1,n)$.

Очевидно, что при $q=1$ класс уравнений (108a) совпадает с классом уравнений (4). При этом операторы (78), (98) и (107) переходят соответственно в (2c), (2d) и (2e).

Отметим, что системы уравнений (99) и (100) при условиях теоремы 4 сводятся к более простым с помощью локальных замен

$$W^{(k)}(t,x) = \int\left[\exp\int\frac{1-D_k}{D_k\Psi^{(2)}}d\Psi^{(2)}\right]d\Psi^{(k)} = D_k\left[\Psi^{(k)}\right]^{1/D_k}, \quad k=1,2. \quad (109)$$

Нетрудно убедиться, что замена (109) преобразует систему (99) к виду

$$\begin{aligned}&\hat\lambda_1 W^1_t = \Delta W^1 + W^1 h^1(\hat\theta)v^{-2/\delta},\\ &\hat\lambda_2 W^{(2)}_t = \Delta W^{(2)} + W^{(2)} h^{(2)}(\hat\theta)v^{-2/\delta},\end{aligned} \quad (110)$$

где

$$\hat\lambda_k = \frac{\lambda_k}{D_k}, \qquad W^{(k)}_t = \frac{\partial W^{(k)}}{\partial t}, \qquad k=1,2,$$

$$v = \left(\left(W^1\right)^{\hat\lambda_2}\left(W^{(2)}\right)^{-\hat\lambda_1}\right)^{D_1D_2}, \qquad \theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}v^{\frac{2}{\delta}-2},$$

h^1, $h^{(2)}$ — произвольные функции.

Применение замены (109) к системе (100) при условиях теоремы 4 приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}&\hat\lambda W^1_t = \Delta W^1 + W^1\theta\hat g^1(v),\\ &\hat\lambda W^{(2)}_t = \Delta W^{(2)} + W^{(2)}\theta\hat g^{(2)}(v),\end{aligned} \quad (111)$$

где

$$\hat\lambda = \frac{\lambda_1}{D_1} = \frac{\lambda_2}{D_2}, \qquad v = \left(\frac{W^1}{W^{(2)}}\right)^{\hat\lambda D_1 D_2}, \qquad \theta = \frac{\partial v}{\partial x_a}\frac{\partial v}{\partial x_a}v^2,$$

$\hat g^1$, $\hat g^{(2)}$ — произвольные функции.

В заключение рассмотрим систему уравнений диффузионного типа

$$\begin{aligned}&\Delta U = \lambda\frac{\partial U}{\partial t} + f(U,V),\\ &\Delta V = \lambda\frac{\partial V}{\partial t} + g(U,V),\end{aligned} \quad (112)$$

которая, очевидно, с точностью до обозначений является частным случаем системы уравнений (76). Согласно теореме 2 система (112) инвариантна относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$ с базисными операторами (2a), (2b), (78) только тогда, когда она имеет вид

$$\begin{aligned}&\Delta U = \lambda\frac{\partial U}{\partial t} + Uf_1(U/V),\\ &\Delta V = \lambda\frac{\partial V}{\partial t} + Vg_1(U/V).\end{aligned} \quad (113)$$

Если же в системе уравнений (113)

$$f_1(U/V) = \beta_1(U/V)^{2/(\alpha_2-\alpha_1)}, \quad g_1(U/V) = \beta_2(U/V)^{2/(\alpha_2-\alpha_1)}, \quad \alpha_2 \neq \alpha_1, \tag{114}$$

то она допускает оператор масштабных преобразований (98) (см. теорему 3). Однако, как следует из теоремы 4, среди галилеевски-инвариантных систем уравнений вида (113) нет нелинейных систем, инвариантных относительно алгебры $AG_2(1,n)$ с проективным оператором Π (107).

Нам удалось показать, что среди нелинейных систем вида (113) существует единственная (с точностью до постоянных коэффициентов), которая инвариантна относительно обобщенной алгебры Галилея $AG_2(1,n)$ со специальным представлением проективного оператора Π. Это следующая нелинейная система уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \lambda \frac{\partial U}{\partial t} + \beta_1 \frac{U^2}{V}, \\ \Delta V &= \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + \beta_2 U, \end{aligned} \tag{115}$$

где $\beta_k = \text{const}$, $k = 1, 2$, $\beta_1 \neq \beta_2$.

Теорема 5. *Максимальная (в смысле С. Ли) АИ системы уравнений (115) является алгебра $AG_2(1,n)$ с базисными элементами*

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \tag{116a}$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \qquad a, b = \overline{1,n}, \tag{116b}$$

$$G_a = tP_a - \frac{\lambda x_a}{2} I, \qquad I = U\partial_U + V\partial_V, \tag{116c}$$

$$D = 2tP_t + x_a P_a - 2U\partial_U - \left(\frac{n}{2} + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\right) I, \tag{116d}$$

$$\Pi = tD - t^2 P_t - \frac{\lambda |x|^2}{4} I + \frac{\lambda}{\beta_1 - \beta_2} V\partial_U. \tag{116e}$$

Доказательство. Тот факт, что операторы (116) удовлетворяют коммутационным соотношениям, характеризующим алгебру Ли $AG_2(1,n)$, доказывается, простой проверкой. Доказательство того, что операторы (116) порождают максимальную АИ системы (115), проводится по методу Ли.

§ 7. О солитоноподобных решениях уравнения (6)

В § 4 найдены частные решения нелинейного уравнения (6) путем редукции его по одномерным неизоморфным подалгебрам X_1, X_2, X_3 алгебры $AG(1,3)$. Оказывается, что, решая редукционное уравнение (12а), соответствующее подалгебре X_4, можем получить солитоноподобные решения уравнения (6). Действительно, воспользовавшись заменой

$$\varphi = \varphi(y), \qquad y = \alpha_a x_a,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^1$, $\varphi(y)$ — действительная функция, сведем уравнение (12a) к нелинейному ОДУ второго порядка

$$|\alpha|^2 k \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{1}{\beta}\varphi + \lambda\varphi^{2/3} = 0. \tag{117}$$

Общее решение уравнения (117) в элементарных функциях получить не удается, так как его решение сводится к квадратуре

$$C_2 \pm y = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{C_1 + \frac{\varphi^2}{\beta} - \frac{3}{5}\lambda\varphi^{10/3}}}. \tag{118}$$

Построим частные решения уравнения (117) специального вида:

$$\varphi(y) = y(e^{my} - e^{-my})^{\varkappa_1}(e^{my} + e^{-my})^{\varkappa_2}; \tag{119}$$

здесь γ, m, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — некоторые постоянные, которые подлежат определению. Подстановка (119) и уравнение (117) приводит к соотношению

$$\begin{gathered} k|\alpha|^2 m^2 \Big[\varkappa_1 + \varkappa_2 + 2\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_1(\varkappa_1 - 1)(e^{my} + e^{-my})^2 \Big/ \\ (e^{my} - e^{-my})^2 + \varkappa_2(\varkappa_2 - 1)(e^{my} - e^{-my})^2 \Big/ (e^{my} + e^{-my})^2\Big] + \\ + \lambda\gamma^{4/3}(e^{my} - e^{-my})^{4\varkappa_1/3}(e^{my} + e^{-my})^{4\varkappa_2/3} = 0. \end{gathered} \tag{120}$$

Очевидно, что если постоянные γ, m, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ такие, что соотношение (120) выполняется тождественно, то (119) является решение уравнения (117).

Пусть $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = -3/2$, тогда выражение (120) сводится к виду

$$\frac{1}{\beta} - \frac{3}{2}|\alpha|^2 m^2 + \frac{15}{4}|\alpha|^2 k m^2 \frac{(e^{my} - e^{-my})^2}{(e^{my} + e^{-my})^2} + \frac{\lambda\gamma^{4/3}}{(e^{my} + e^{-my})^2} = 0. \tag{121}$$

Равенство (121) превращается в тождество только в случае, если

$$\gamma = \pm 2\sqrt{2}\left(-\frac{5}{3\lambda\beta}\right)^{3/4}, \quad m = \pm\frac{2}{3\sqrt{-\beta k|\alpha|^2}}, \quad \lambda\beta < 0, \quad \beta k < 0. \tag{122}$$

Таким образом, получаем решение уравнения (117):

$$\varphi(y) = \frac{\gamma}{(e^{my} + e^{-my})^{3/2}} = \frac{\gamma_-}{[\cosh my]^{3/2}}, \qquad \gamma_- = \pm\left(-\frac{5}{3\lambda\beta}\right)^{3/4},$$

где γ, m определены в (122). Следовательно (см. табл. 1), выражение

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- e^{it/\beta}}{[\cosh m\alpha_a x_a]^{3/2}}, \tag{123}$$

где β, α_1, α_2, α_3 — произвольные параметры, является точным решением уравнения (6).

Воспользовавшись формулой размножения решений (21), из (123) получаем семипараметрическое семейство солитоноподобных решений:

$$\Psi(t, x) = \frac{\gamma_- \exp\frac{i}{2k}\left[\varepsilon_a x_a + \left(\frac{|\varepsilon|^2}{2} + 2k/\beta\right)t\right]}{[\cosh(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))]}; \tag{124}$$

здесь

$$|\varepsilon|^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^1.$$

В случае $\alpha_2 = \alpha_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon_1 = v$ из (124) имеем решение

$$\Psi(t,x) = \frac{\gamma_- \exp \frac{iv}{2k}(x_1 + (v/2 + 2k/v\beta))}{[\cosh m_0(x_1 + vt)]^{3/2}}, \qquad m_0 = \frac{\pm 2}{3\sqrt{-k\beta}}, \tag{125}$$

одномерного ($n = 1$) нелинейного уравнения

$$i\Psi_t = k\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \lambda \Psi (\Psi \overset{*}{\Psi})^{2/3}.$$

Решение (125) естественно назвать солитонным по аналогии с известным решением (см., напр., [12])

$$\Psi(t,x_1) = \sqrt{\frac{m_1}{2}} \frac{\exp[(iv/2)(x_1 + (\varepsilon/2 + \lambda^2/3v)t)]}{\cosh m_1(x_1 + vt)}, \quad m_1 = \sqrt{-\frac{\lambda}{4}}, \quad \lambda < 0$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\Psi_t = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \lambda \Psi (\Psi \overset{*}{\Psi}).$$

Воспользовавшись формулой (22), из решения (123) получаем восьмипараметрическое семейство решений уравнения (6):

$$\Psi(t,x) = \frac{\gamma_- \exp\{(i[p|x|^2 + 2\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2 + 4k/\beta)t)/(4k(1-pt))\}}{\{(1-pt)\cosh[(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))/(1-pt)]\}^{3/2}}. \tag{126}$$

Очевидно, что в случае $p = 0$ из решений (126) получаем солитоноподобные решения вида (124).

Рассмотрим соотношение (120) в случае $\varkappa_1 = -\frac{3}{2}$, $\varkappa_2 = 0$, т.е.

$$\frac{1}{\beta} - \frac{3}{2}\alpha_a\alpha_a k m^2 + \frac{15}{4}\alpha_a\alpha_a k m^2 \frac{(e^{mx} + e^{-mx})^2}{(e^{mx} - e^{-mx})^2} + \frac{\lambda\gamma^{4/3}}{(e^{mx} - e^{-mx})^2} = 0.$$

Нетрудно показать, что оно превращается в тождество только в случае, когда

$$\gamma = \pm\left(\frac{20}{3\lambda\beta}\right)^{3/4}, \quad m = \pm\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{-\beta k \alpha_a \alpha_a}}, \quad \lambda\beta > 0, \quad k\beta < 0. \tag{127}$$

Воспользовавшись формулой (119), получим еще одно решение нелинейного ОДУ (117):

$$\varphi = \gamma(e^{my} - e^{-my})^{-3/2} = \gamma/(2\sinh my)^{3/2}, \tag{128}$$

где γ, m определены в (127). Из решения (128) следует решение уравнения (6):

$$\Psi = \frac{\gamma_+ e^{it/\beta}}{[\sinh m\alpha_a x_a]^{3/2}}, \qquad \gamma_+ = \pm\left(\frac{5}{3\lambda\beta}\right)^{3/4}. \tag{129}$$

Применяя к этому решению формулу (21), получаем семипараметрическое семейство солитоноподобных решений

$$\Psi = \frac{\gamma_+ \exp[(i/2k)(\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2/2 + 2k/\beta)t)]}{[\sinh(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))]^{3/2}}. \tag{130}$$

Отметим, что решения вида (130) в отличие от солитоноподобных решений из семейства (124) имеют особенность на многообразии

$$\alpha_a x_a + \alpha_a \varepsilon_a t = 0 \tag{131}$$

в пространстве независимых переменных.

В заключение приведем восьмипараметрическое семейство решений уравнения (6)

$$\Psi(t,x) = \frac{\gamma_+ \exp\{(i[p|x|^2 + 2\varepsilon_a x_a + (|\varepsilon|^2 + 4k/\beta)t)/(4k(1-pt))\}}{\{(1-pt)\sinh[(m\alpha_a(x_a + \varepsilon_a t))/(1-pt)]\}^{3/2}},$$

которое получается из решения (129) с помощью формулы (22).

1. Niederer V., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 808–816.
2. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементар. частиц и атом. ядра*, 1981, **12**, вып. 5, 1157–1219.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
4. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
5. Fushchych W.I., Cherniha R.M., The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, 3491–3503.
6. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
7. Collins C.B., Complex potential equations. I. A technique for solution, *Proc. Cambr. Phys. Soc.*, 1976, **80**, 165–171.
8. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1976, 576 с.
9. Хенри Д., Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, М., Мир, 1985, 376 с.
10. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
11. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
12. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *Журн. эксперимент. и теорет. физики*, 1971, **61**, № 1, 118–134.