Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК

Описание подгрупповой структуры группы Ли используется при решении ряда задач теоретической и математической физики: разделение переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных [1], построение точных частных решений нелинейных дифференциальных уравнений [2], редукция представлений группы на подгруппы [3].

Систематическое изучение непрерывных подгрупп неоднородных групп преобразований квантовой механики начато в работе [4], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечномерной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N и полупростой фактор-алгеброй L/N. Этим методом проведена классификация подалгебр алгебр Ли групп Пуанкаре $P(1,3)$ [4], $P(1,4)$ [5, 6] и групп Евклида $E(3)$ [7], $E(4)$ [8].

В настоящей работе дается дальнейшее уточнение общего метода из [4], позволяющее свести проблему классификации относительно $E(n)$-сопряженности подалгебр алгебры Евклида $LE(n)$ к описанию относительно $O(n)$-сопряженности неприводимых частей подалгебр алгебры $LO(n)$. В качестве применения полученных общих результатов дано описание максимальных абелевых подалгебр алгебры $LE(n)$, $n \geq 2$, и всех подалгебр алгебры $LE(5)$.

Пусть R — поле вещественных чисел, R^n — n-мерное арифметическое пространство над R, $O(n)$ — группа ортогональных матриц порядка n, $\langle X_1, \ldots, X_s \rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над полем R с базисом $X_1, \ldots, X_s$. Группой Евклида $E(n)$ называется мультипликативная группа матриц $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $A \in O(n)$, $X \in R^n$. Через LG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Алгебра Евклида $LE(n)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{bc} J_{ad} - \delta_{ac} J_{bd} - \delta_{bd} J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b,$$
$$[P_a, P_b] = 0, \quad J_{ba} = -J_{ab}, \quad a, b, c = 1, 2, \ldots, n.$$

Генераторы поворотов J_{ab} порождают алгебру $LO(n)$, а генераторы трансляций P_c — коммутативный идеал N, причем $LE(n) = N \dotplus LO(n)$. Алгебру $LO(n)$ мы рассматриваем как алгебру кососимметрических матриц порядка n над R, дополненных снизу и справа соответственно нулевой строкой и нулевым столбцом, а $P_1, P_2, \ldots, P_n$ считаем единичными векторами векторного пространства

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in R^n \right\}.$$

При этих предположениях получаем, что если $Y \in LO(n)$, а $Z \in N$, то $[Y, Z] = Y \cdot Z$.

Укр. мат. журн., 1986, **38**, № 1, С. 67–72.

Пусть C — такая матрица порядка $n+1$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to CXC^{-1}$ является автоморфизмом $LE(n)$. Если $C \in E(n)$, то φ_C называется $E(n)$-автоморфизмом. Если

$$C = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in R, \quad \lambda > 0,$$

то автоморфизм φ_C называется гомотетией.

Подалгебры K и K' алгебры $LE(n)$ называются $E(n)$-сопряженными, если $\varphi_C(K) = K'$ для некоторого $E(n)$-автоморфизма φ_C алгебры $LE(n)$.

Пусть π — проектирование алгебры $LE(n)$ на $LO(n)$, F — подалгебра $LO(n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $LE(n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$ $E(n)$-сопряжена алгебре $M \dot{+} F$, где M есть F-инвариантное подпространство пространства N, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $LE(n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset LE(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $LE(n)$.

Теорема 1. *Подалгебра $F \subset LO(n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $LE(n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$.*

Доказательство. Нетрудно убедится в справедливости теоремы для коммутативных подалгебр алгебры $LO(n)$. Пусть F — некоммутативная подалгебра алгебры $LO(n)$, не сопряженная подалгебре алгебры $LO(n-1)$. Тогда $F = D \oplus Q$, где D — центр, Q — фактор Леви. Так как по теореме Уайтхеда полупростые алгебры обладают только расщепляемыми расширениями, то можно предполагать, что $Q \subset F$. Если из условия $[Q, X] = 0$, $X \in N$, вытекает $X = 0$, то вследствие полупростоты Q-подпространств пространства N можно утверждать, что $D \subset F$.

Допустим, что для некоторого ненулевого элемента $X \in N$ выполняется $[Q, X] = 0$. Обозначим через M максимальное подпространство пространства N, имеющее свойство $[Q, M] = 0$. Если $\dim M = n - k$, $0 < k < n$, то можно предполагать, что $M = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$. Но тогда $Q \subset LO(k)$. Отсюда и из тождества Якоби вытекает, что $[D, M] \subset M$, а потому D является подалгеброй алгебры $LO(k) \oplus LO(M)$. Пусть D' — проекция D на $LO(M)$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$, то D' имеет только расщепляемые расширения в $M \dot{+} LO(M)$. Отсюда следует, что $D \subset F$. Теорема доказана.

Пусть $F = D \oplus Q$ — разложение подалгебры $F \subset LO(n)$ в прямую сумму центра D и фактора Леви Q. Обозначим через W максимальное подпространство N, обладающее тем свойством, что $[F, W] = 0$. Если $\dim W = n - k$, $0 \le k < n$, то можно предполагать, что $W = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$. Но тогда $F \subset LO(k)$. Отсюда в силу теоремы 1 заключаем, что алгебра $\hat{F} \subset LE(n)$ со свойством $\pi(\hat{F}) = F$ допускает разложение $\hat{F} = V \dot{+} (D' \oplus Q)$, где V — подпространство N, инвариантное относительно F, а D' — подалгебра прямой суммы алгебр D и $\langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$. Алгебры типа D' можно классифицировать с помощью метода Ли–Гурса [4].

Из полученных результатов вытекает, что для описания подалгебр алгебры $LE(n)$ важно решить вопрос о структуре подпространств пространства N, инвариантных относительно $F \subset LO(n)$.

Подалгебра F алгебры $LO(n)$, $n \ge 2$, называется неприводимой, если тривиальное представление F в $LO(n)$ является неприводимым.

Тривиальное представление Γ ненулевой алгебры $F \subset LO(n)$ в $LO(n)$ вполне приводимо: $\Gamma = \mathrm{diag}\,[\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p]$, где Γ_i — неприводимое представление F в $LO(W_i)$, $W_i \subset N$ и $\dim W_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, m$; $m \leq p$. Пусть $F_i = \{\mathrm{diag}\,[0, \ldots, \Gamma_i(X), \ldots, 0] \mid X \in F\}$. Очевидно, F_i — неприводимая подалгебра алгебры $LO(W_i)$. Алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Если Γ_i и Γ_j суть эквивалентные представления, то будем предполагать, что для любого $X \in F$ выполняется равенство $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$.

Объединив эквивалентные неприводимые ненулевые представления, получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры $LO(n)$, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F.

Лемма. *Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $LO(n)$. Группа автоморфизмов алгебры $N\dot{+}F$ разлагается в прямое произведение группы $E(n)$-автоморфизмов и группы гомотетий.*

Доказательство. Пусть $D \oplus Q$ — разложение F в прямую сумму центра D и фактора Леви Q. Если φ — автоморфизм алгебры $N\dot{+}F$, то $\varphi(N\dot{+}D) = N\dot{+}D$ и с точностью до $E(n)$-автоморфизмов $\varphi(Q) = Q$. Вследствие неприводимости F имеем $\varphi(N) = N$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $LO(n-1)$, то на основании теоремы 1 $\varphi(D) = D$.

Так как $[\varphi(X), \varphi(P_j)] = \varphi([X, P_j])$, то для каждого $X \in F$ матрица оператора $\varphi(X)$ в базисе $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$ совпадает с матрицей оператора X в базисе $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Отсюда вытекает, что если B — матрица перехода от базиса $P_1, P_2, \ldots, P_n$ к базису $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$, то $BXB^{1} = \varphi(X)$. Матрицу B можно записать в виде TU, где T — положительно определенная симметрическая, а U — ортогональная матрицы. Используя лемму Шура, получаем $T = \lambda E$, где $\lambda > 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части ненулевой подалгебры F алгебры $LO(n)$, M — подпространство пространства N, инвариантное относительно F. Тогда $M = M_1 \oplus M_s \oplus \cdots \oplus M_q \oplus \tilde{M}$, где $M_i = [K_i, M_i] = [K_i, M]$, $[K_j, M_i] = 0$ при $j \neq i$, $\tilde{M} = \{X \in M \mid [F, X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $LO(W_1), LO(W_2), \ldots, LO(W_r)$, то относительно $O(n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства N с условием $[K, W] = W$ исчерпываются пространствами: $W_1, W_1 \oplus W_2, \ldots, W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Доказательство. Так как $M = \tilde{M} \oplus \tilde{M}^{\perp}$, то будем предполагать, что $\tilde{M} = 0$. Пусть K_i — подпрямая сумма неприводимых частей $K_{i1}, \ldots, K_{is_i}$, $M_{ij} = [K_{ij}, M]$, π_{ij} — проектированием M на M_{ij}, $i = 1, \ldots, q$; $j = 1, \ldots, s_i$. Допустим, что $\pi_{ab}(M) \neq 0$. На основании леммы и теоремы Ли–Гурса [4] о подалгебрах прямой суммы алгебр в пространстве M существует такое максимальное F-инвариантное подпространство V, что $\pi_{ab}(V) \neq 0$ и $\pi_{cd}(V) = 0$, где $1 \leq c \leq q$, $c \neq a$, $1 \leq d \leq s_c$. Отсюда следует, что в M существует максимальное F-инвариантное подпространство U_{ab} со свойством: $\pi_{ab}(U_{ab}) \neq 0$, $\pi_{cd}(U_{ab}) = 0$ для всех $c \neq a$, $d = 1, 2, \ldots, s_c$. Очевидно, $M_a = U_{ab}$.

Пусть примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $LO(W_1), LO(W_2), \ldots, LO(W_r)$, где

$W_i = \langle P_{(i-1)k+1}, P_{(i-1)k+2}, \dots, P_{ik}\rangle$, $i = 1, \dots, r$. Если $[K, W] = W$ и $W \neq 0$, то переставляя, если это необходимо, подалгебры $S_1, S_2, \dots, S_r$, можно предполагать, что W содержит элементы $P_j + \sum\limits_{j=1}^{r-1} \lambda_j P_{jk+i}$, $i = 1, \dots, k$.

Пусть

$$C_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}E & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}E \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}E & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}E \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \dots, r-1,$$

$$tE = \operatorname{diag}[\underbrace{E, \dots, E}_{t}],$$

где E — единичная матрица порядка k. Очевидно, $C_j(\lambda) \in O(jk + k)$. Легко получаем

$$C_1(\lambda)\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} C_1(\lambda) \tag{1}$$

для любой матрицы X порядка k и

$$C_1(\lambda)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_k \end{pmatrix} = \sqrt{1+\lambda^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть φ_{A_j} — автоморфизм $LE(rk)$, соответствующий матрице $A_j = \operatorname{diag}[C_j(\lambda), (r-j-1)E]$. На основании равенства(1), (2) имеем $\varphi_{A_j}(K) = K$, и автоморфизм

$$\varphi_{A_{r-1}}(\lambda_{r-1})\varphi_{A_{r-2}}(\lambda_{r-2})\cdots\varphi_{A_1}(\lambda_1)$$

отображает W на $W_1 \oplus W'$, где W' — подпространство пространства $W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$. Остается применить индуктивное предположение. Теорема доказана.

Известно, что $LO(n)$ обладает относительно $O(n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с подалгеброй Картана $\mathfrak{K}(n) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1,2m}\rangle$, $m = [n/2]$. Отсюда вытекает, что алгебра $\mathfrak{K}(n) = N \dot{+} \mathfrak{K}(n)$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $LE(n)$ и каждая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $LE(n)$ сопряжена с $\mathfrak{K}(n)$.

Очевидно, $\langle J_{12}\rangle$ — неприводимая подалгебра алгебры $LO(2)$. Примарные части алгебры $F \subset \mathfrak{K}(n)$ можно найти таким способом.

Зафиксируем некоторый базис $Y_1, \dots, Y_t$ алгебры F. Если Y_j — такой первый базисный вектор F, что его проекция на $\langle J_{2k-1,2k} \rangle$ отлична от нуля, то считаем, что коэффициент при $J_{2k-1,2k}$ в Y_j является положительным числом. В каждом базисном элементе алгебры F соберем слагаемые с коэффициентами, равными по модулю, вынесем за скобки модуль коэффициентов, а затем в полученных выражениях выделим суммы, содержащие максимально возможное число слагаемых с одним и тем же знаком. Пусть $S = \{X_1, \dots, X_l\}$ — множество всех таких сумм, взятых со знаком $+$. Если X_i и X_j имеют общие слагаемые, то из множества S исключаем X_i, X_j и вводим $X_i \cap X_j$, $X_i - X_i \cap X_j$, $X_j - X_i \cap X_j$, где $X_i \cap X_j$ — сумма общих слагаемых элементов X_i, X_j. В полученном множестве снова находим ненулевые пересечения его элементов и производим дальнейшее преобразование множества S. На конечном шаге мы получим множество $\{H_1, H_2, \dots, H_a\}$, в котором H_i, H_j не имеют общих слагаемых при $1 \le i < j \le a$. Алгебры $\langle H_1 \rangle, \langle H_2 \rangle, \dots, \langle H_a \rangle$ суть примарные части алгебры F.

На основании теорем 1, 2 можно доказать такие утверждения.

Предложение 1. *Каждая разрешимая подалгебра алгебры $LE(n)$ сопряжена с $W \dotplus A$, где $W \subset N$, A — абелева подалгебра.*

Предложение 2. *Каждая нильпотентная подалгебра алгебры $LE(n)$ является абелевой.*

Предложение 3. *Пусть $m = [n/2]$, $\delta = 0$ при $n = 2m$, $\delta = 1$ при $n = 2m + 1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $LE(n)$ исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$\langle P_1, P_2, \dots, P_n \rangle, \quad \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1,2m}, \delta P_n \rangle,$$
$$\langle P_1, P_2, \dots, P_{2r}, \delta P_n, J_{2r+1,2r+2}, \dots, J_{2m-1,2m} \rangle,$$

где $r = 1, 2, \dots, m - 1$. Число максимальных абелевых подалгебр алгебры $LE(n)$ равно $m + 1$.

Если речь идет об алгебрах $W_1 \dotplus F, \dots, W_s \dotplus F$, то используем обозначение $F : W_1, \dots, W_s$.

Теорема 3. *Относительно $E(5)$-сопряженности подалгебры алгебры $LE(5)$ исчерпываются такими алгебрами:*

0, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12} \rangle$: 0, $\langle P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha J_{34} \rangle$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5 \rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$, $0 < \alpha < 1$;

$\langle J_{12} + J_{34} \rangle$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12}, J_{34} \rangle$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$: 0, $\langle P_4 \rangle$, $\langle P_4, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3} J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3} J_{35} \rangle$: 0, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} \rangle$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} \rangle$: 0, $\langle P_4, P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$LO(4)$: 0, $\langle P_5 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$LO(5)$: 0, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \rangle$;

$\langle J_{12} + aP_5 \rangle$: 0, $\langle P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_3, P_4 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $a > 0$;

$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+aP_5\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $0<\alpha<1$, $a>0$;
$\langle J_{12}+J_{34}+aP_5\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $a>0$;
$\langle J_{12}+aP_5,J_{34}+bP_5\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle P_3,P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $a>0$, $b\geq 0$;
$\langle J_{12}-J_{34}+aP_5,J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{14}+J_{23}\rangle$: 0, $\langle P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$, $a>0$.

Теорема 3 доказывается на основании теорем 1, 2 с использованием предложенного алгоритма для нахождения примарных частей подалгебр подалгебры Картана $\mathfrak{K}(n)$. Как видно из теоремы 3, алгебра $LO(5)$ обладает двумя неприводимыми подалгебрами: $LO(5)$, $\langle 2J_{12}+J_{34},J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45},J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle$.

1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981, 342 с.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. мат. физика*, 1976, **26**, № 2, 206–220.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
5. Федорчук В.М., Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
6. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$, *Укр. мат журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
7. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.
8. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.