О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики

В.И. ФУЩИЧ

Принцип симметрии. В настоящее время не существует конструктивных методов решения нелинейных многомерных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), поэтому важной является задача выделения специальных классов многомерных нелинейных ДУЧП, обладающих богатыми симметрийными свойствами, для которых можно в явном виде построить многопараметрические семейства частных решений и провести детальные качественные исследования этих уравнений, а также использовать частные решения для построения эффективных приближенных алгоритмов ДУЧП.

В современных исследованиях по математической и теоретической физике всевозрастающую роль играют принципы симметрии. Это прежде всего связано с тем, что основные физические законы, уравнения движения, различные модели обладают явной или скрытой геометрической или негеометрической, локальной [1, 2] или нелокальной [3–5] симметриями. Построение математического аппарата, способного выявить разнообразные виды симметрий, — одна из важных задач математической физики. Не менее важной является задача, в определенном смысле обратная к только что сформулированной: по заданной группе или алгебре и их представлениям построить математические модели, обладающие заданной симметрией.

Для адекватного математического описания физических явлений естественно, как нам представляется, поставить идеи и принципы симметрии в основу науки о построении математических моделей [6]. Симметрийный принцип в такой науке должен играть роль правила отбора, выделяющего из множества допустимых математических моделей (уравнений) только такие, которые обладали бы соответствующими симметрийными свойствами. Этот принцип в явном или неявном виде используется при построении современных физических теорий, но, к сожалению, мало используется в классической математической физике.

В некоторых случаях требование инвариантности уравнений движения относительно этой или иной группы приводит к тому, что среди множества математически допустимых уравнений заданными свойствами обладают только одно или несколько уравнений. Так, среди множества линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для двух вектор-функций $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \{E_1, E_1, E_3\}$, $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) = \{H_1, H_2, H_3\}$ существует единственная система ДУЧП, инвариантная относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. Этой системой

Сборник научных трудов “Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред”, Киев, Наукова думка, 1986, С. 146–160.

являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [5]. Аналогичным свойством обладает и система уравнений Дирака. Единственной (с точностью до преобразований эквивалентности) линейной системой четырех ДУЧП первого порядка, инвариантной относительно группы $P(1,3)$, является система Дирака [5]. Указанными свойствами обладают не только линейные уравнения движения, но и нелинейные ДУЧП. Примером нелинейного уравнения, обладающего широкой группой симметрии, является хорошо известная система уравнений Эйлера–Навье–Стокса (см. п. 4). Необходимо отметить, что некоторые нелинейные ДУЧП обладают такими широкими группами симметрии, какими не обладает ни одно линейное ДУЧП. Примерами таких скалярных уравнений являются многомерное уравнение Монжа–Ампера и эйкональное уравнение [7, 8].

С чисто математической точки зрения важно знать максимальные (в некотором смысле) группы симметрии ДУЧП. Особенно ценную информацию дает знание нелинейных преобразований независимых и зависимых переменных, относительно которых инвариантно то или иное ДУЧП, поскольку это дает возможность по заданному одному (иногда тривиальному) решению построить (генерировать) целые семейства точных решений нелинейных ДУЧП.

Таким образом, классы нелинейных ДУЧП, обладающие богатыми симметрийными свойствами, представляются нам важными и интересными как в теоретическом, так и прикладном плане.

1. О точных решениях многомерного уравнения Лиувилля. Среди множества Пуанкаре-инвариантных нелинейных волновых уравнений вида

$$p_\mu p^\mu u + F(u) = 0, \tag{1}$$

где

$$p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \mu = \overline{0,n},$$
$$u \equiv u(x), \qquad x = (x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad x_0 \equiv t,$$

F — произвольная дифференцируемая функция из пространства C^2. Существует только два типа уравнений, инвариантных относительно расширенной группы Пуанкаре $\bar{P}(1,n)$. Группа $\bar{P}(1,n)$ — группа Пуанкаре, дополненная однопараметрической группой масштабных преобразований $D(1)$, т.е. $\bar{P}(1,n) = \{P(1,n), D(1)\}$.

Теорема 1 [8]. *Уравнение (1) инвариантно относительно группы $\bar{P}(1,n)$ только в случаях*

$$F = F_1 = \lambda_1 u^k \quad \textit{или} \quad F = F_2 = \lambda_2 \exp u, \tag{2}$$

где λ_1, λ_2, $k \neq 1$ — произвольные вещественные параметры.

В этих случаях на множестве решений (1) реализуются следующие неэквивалентные представления алгебры Ли группы $\bar{P}(1,n)$:

$$\begin{aligned} &P_\mu = ig^{\mu\nu}p_\nu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ &D = x_\mu p^\mu - \frac{2i}{1-k}\frac{\partial}{\partial u} \quad \textit{при} \quad F = F_1, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &P_\mu = ig^{\mu\nu}p_\nu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ &D = x_\mu p^\mu - 2i\frac{\partial}{\partial u} \quad \textit{при} \quad F = F_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что уравнение Лиувилля является единственным (в классе (1)) уравнением неполиномиального типа, инвариантным относительно группы $\bar{P}(1,n)$.

Замечание 1. Двумерное уравнение (1) при $F = F_1 = 0$ или $F = F_2 = \lambda_2 \exp u$ инвариантно относительно более широкой алгебры, чем алгебра Ли группы $\bar{P}(1,n)$. Можно доказать [9], что в этих и только в этих двух случаях двумерное уравнение (1) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры $A_\infty \supset \bar{P}(1,n)$.

Замечание 2. Двумерное уравнение Лиувилля с помощью одной из нелокальных подстановок [10]

$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 - \tanh^2 \frac{C_1 - w}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

или

$$u = \ln\left[2w_\xi w_\eta/(w + C_2)^2\right], \qquad w_\xi = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad w_\eta = \frac{\partial w}{\partial \eta},$$
$$u = \ln\left[w_\xi w_\eta \left(1 + \tanh^2 \frac{w + C_3}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad \xi = x_0 + x_1, \qquad \eta = x_0 - x_1, \tag{5}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, приводится к линейному волновому уравнению

$$\Box\omega = -p_\mu p^\mu w = 0. \tag{6}$$

Зная общее решение уравнения (6)

$$w = f_1(x_0 + x_1) + f_2(x_0 - x_1),$$

получаем решение двумерного нелинейного уравнения Лиувилля. Решение это представим в виде $(F = F_2 = \lambda_2 \exp u)$

$$u = \ln\left\{\frac{-8f_1'(\omega_1)f_2'(\omega_2)}{\lambda_2(f_1(\omega_1) + f_2(\omega_2))^2}\right\}, \tag{7}$$

где $\omega_1 = \alpha_\mu x^\mu$, $\omega_2 = \beta_\mu x^\mu$, параметры α_μ, β_μ удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = 0, \qquad \alpha_\mu \beta^\mu = 2, \tag{8}$$

$$f_1' = \frac{\partial f_1}{\partial \omega_1}, \qquad f_2' = \frac{\partial f_2}{\partial \omega_2}.$$

Решение (7) совпадает с лиувиллевским решением, если положить $\omega_1 = x_0 + x_1$ $(\alpha_0 = \alpha_1 = 1)$, $\omega_2 = x_0 - x_1$ $(\beta_0 = \beta_1 = 1)$. Представление решений двумерного уравнения (1) в виде (7) имеет важное, с точки зрения обобщения, преимущество по сравнению с лиувиллевским решением. Непосредственной проверкой можно убедиться, что множество функций вида (7) удовлетворяет n-мерному уравнению Лиувилля, если параметры удовлетворяют условиям типа (8).

Приведенное наблюдение подсказывает следующий способ построения частных решений многомерного уравнения по решениям двумерного (или трехмерного) уравнения: 1) представить (построить) решения двумерного (или трехмерного) уравнения в явно инвариантном виде, т.е. решения записать через всевозможные инвариантные переменные ω_1, ω_2 или, например,

$$\omega_3 = \alpha_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \qquad \omega_4 = \beta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu, \tag{9}$$

где $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$ — параметры; 2) подставить явно инвариантные решения двумерного уравнения в многомерное нелинейное ДУЧП и найти условия на параметры α_μ, β_μ, $\alpha_{\mu\nu}$, $\beta_{\mu\nu}$, при которых двумерные решения типа (7) являются решениями многомерного уравнения. Этот способ построения решений многомерных уравнений по решениям двумерного и трехмерного уравнения широко использовался в [8] для уравнения Тейлора–Даламбера (1).

Очевидно, что многомерное уравнение Лиувилля кроме решений вида (7) имеет много других решений. Широкий класс решений многомерного уравнения Лиувилля, неэквивалентных (7), построен в работе [8].

Укажем один простой способ построения частных решений четырехмерного волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = F(u). \tag{10}$$

Ясно, что множество функций u, удовлетворяющих двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u(x_0,\boldsymbol{x})}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u(x_0,\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0,\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u(x_0,\boldsymbol{x})}{\partial x_3^2} = F(u), \qquad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3), \tag{12}$$

будет решением уравнения (10). Множество функций u удовлетворяющих двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = F(u), \tag{14}$$

также будет решением уравнения (10).

Используя то обстоятельство, что общее решение волнового линейного уравнения (11) или (13) задается через две произвольные функции f_1 и f_2, т.е. решение уравнения (11) имеет вид

$$\begin{gathered} u = f_1\{\alpha_0(x_2,x_3)x_0 + \alpha_1(x_2,x_3)x_1 + \alpha(x_2,x_3)\} + \\ + f_2\{\beta_0(x_2,x_3)x_0 + \beta_1(x_2,x_3)x_1 + \beta(x_2,x_3)\}, \\ \alpha_0^2 - \alpha_1^2 = 0, \qquad \beta_0^2 - \beta_1^2 = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

уравнение (12) сводится к решению одного двумерного уравнения для функций f_1, f_2, α_μ, α, β_μ, β. В ряде случаев такое уравнение может быть решено.

Если нелинейность в (10) имеет, например, вид

$$F(u) = \lambda_1 \sin u + \lambda_2 \exp u, \tag{16}$$

то четырехмерное уравнение (10) редуцируется к двумерным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \lambda_1 \sin u, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \lambda_2 \exp u. \tag{18}$$

Все решения уравнения (18) задаются формулой (7).

2. Решения нелинейного уравнения Дирака. Рассмотрим нелинейное уравнение Дирака

$$\left\{\gamma_\mu p^\mu - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k\right\}\Psi = 0, \qquad \mu = \overline{0,3}, \tag{19}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, λ, k — произвольные постоянные, $\Psi = \Psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger\gamma_0$ — сопряженный по Дираку спинор. Уравнение (19) инвариантно относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3)$ только в том случае, когда $k = 1/3$ [11].

Решения уравнения ищем в виде [6]

$$\Psi = A(\tilde{\omega}_1)\varphi(\tilde{\omega}_2), \tag{20}$$

где $A(\tilde{\omega}_1)$ — функция, зависящая от матрицы $\tilde{\omega}_1$, матричные элементы которой зависят от x. Матрица $\tilde{\omega}_1$ выбирается так, чтобы она была инвариантной относительно подгруппы конформной группы, например относительно группы Лоренца. Требование лоренц-инвариантности может быть записано в виде

$$[\tilde{\omega}_1, J_{\mu\nu}] = 0, \qquad J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{21}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{\mu}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{22}$$

$\varphi(\tilde{\omega}_2)$ — четырехкомпонентный спинор, $\tilde{\omega}_2$ — скалярная инвариантная переменная типа (8), для которой по определению выполняется

$$[\tilde{\omega}_2, M_{\mu\nu}] = 0. \tag{23}$$

Формуле (20) можно дать простую физическую интерпретацию: решение уравнения (19) представляет собой волну с “амплитудой” $A(\tilde{\omega}_1)$ и “фазой” $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. Подставим (20) в (19), получим уравнение для $A(\tilde{\omega}_1)$ и $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. При некотором специальном виде амплитуды $A(\tilde{\omega}_1)$ для $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ получим систему обыкновенных ДУ относительно переменной $\tilde{\omega}_2$. Можно, конечно, задать явный вид фазы $\varphi(\tilde{\omega}_2)$, а амплитуду искать в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \gamma_\mu x^\mu f(\tilde{\omega}_3), \tag{24}$$

где $f(\tilde{\omega}_3)$ — произвольная функция скалярного инварианта $\tilde{\omega}_3$. Для отыскания конформно-инвариантных решений уравнения (19), следуя [12, 13], выбираем амплитуду в виде

$$A(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1^4}, \qquad \tilde{\omega}_1 = \gamma_\mu x^\mu, \qquad \tilde{\omega}_1^4 = (x_\mu x^\mu)^2. \tag{25}$$

В качестве скалярного инварианта $\tilde{\omega}_2$ выберем инвариант конформных преобразований

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu} \equiv \omega, \qquad x_\nu x^\nu \neq 0. \tag{26}$$

Формула (20) принимает вид

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\mu x^\mu}{(x_\nu x^\nu)^2}\varphi(\omega). \tag{27}$$

Подстановка (27) в (19) приводит к системе обыкновенных ДУ для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\frac{\lambda}{\beta_\nu\beta^\nu}(\bar{\varphi}\varphi)^{1/3}(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\varphi. \tag{28}$$

Общее решение уравнения (28) имеет вид [12]

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\chi, \qquad k = 1/3, \tag{29}$$

где χ — постоянный спинор.

Таким образом, получили четырехпараметрическое семейство точных решений уравнения (19) ($k = 1/3$) в форме

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\alpha x^\alpha}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha\beta^\alpha)\omega\}\chi, \qquad \beta_\nu\beta^\nu > 0. \tag{30}$$

Аналогичным способом можно построить решения систем уравнений второго порядка для спинорных, тензорных и векторных полей:

$$(\lambda_0\gamma_\mu\pi^\mu + \lambda\pi_\alpha\pi^\alpha)\Psi + \lambda_1 F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0,$$
$$\pi_\mu = p_\mu + \lambda_2\gamma_\mu + \lambda_3 p_\nu F_\mu^\nu + \lambda_4 A_\mu + \lambda_5(\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi);$$

$$\pi_\mu\pi^\mu\Psi = m^2\Psi;$$

$$\left(p_\mu - \lambda_6\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)\left(p^\mu - \lambda_6\frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\sigma}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + (\lambda_{17}E_k + \lambda_{18}H_k)\frac{\partial(\lambda_{19}E_i + \lambda_{20}H_i)}{\partial x_k} = 0,$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + (\lambda_{17}E_k + \lambda_{18}H_k)\frac{\partial(\lambda_{19}E_i + \lambda_{20}H_i)}{\partial x_k} = 0,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0;$$

$$\tilde{p}_\alpha\tilde{p}^\alpha A_\mu - \tilde{p}_\mu(\tilde{p}_\nu A^\nu) = 0,$$
$$\tilde{p}_\alpha = p_\alpha + \lambda_7\gamma_\alpha + \lambda_8 A_\alpha + \lambda_9 p_\alpha A_\nu A^\nu + \lambda_{10}p_\alpha p_\mu(A^\mu A_\nu A^\nu);$$

$$\tilde{\partial}_\alpha\tilde{\partial}^\alpha u_\mu = 0, \qquad \alpha,\mu,\sigma,\nu = \overline{0,3},$$

$$\tilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha + \lambda_{11}u_\alpha + \lambda_{12}\partial_\alpha F(u_\nu u^\nu), \qquad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha};$$

$$\tilde{\partial}_0 u_a + \lambda_{13}\tilde{\partial}_b\tilde{\partial}_b u_a = 0,$$

$$\tilde{\partial}_0 = \partial_0 + \lambda_{14}u_c u_c, \qquad \tilde{\partial}_b = \partial_b + \lambda_{15}u_b + \lambda_{16}u_c\frac{\partial u_b}{\partial x_c},$$

где $F_{\mu\nu}$, A_μ, E_i, H_i — тензор, вектор-потенциал, напряженности электромагнитного поля, u_μ — вектор скорости жидкости, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{20}$ — произвольные параметры.

3. Какие уравнения описывают нелинейную теплопроводность? Процессы тепломассопереноса описывают линейным или нелинейным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{c(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} + F(u), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{31}$$

$u = u(t, x_1, x_2, x_3)$, $c(u) > 0$, $F(u)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства одномерного линейного уравнения (31) ($c(u) = \lambda_1$, $F(u) = \lambda_2 u$, $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$) полностью изучил еще С. Ли. Для нас важно подчеркнуть, что в трехмерном случае линейное уравнение (31) инвариантно относительно 10-параметрической группы Галилея $G(1,3)$ [5, 14].

Групповой анализ одномерного нелинейного уравнения (31) в случае $F(u) = 0$ осуществил Л.В. Овсянников [2]. Методом С. Ли [2] можно получить групповые свойства трехмерного уравнения (31). Такие исследования были проведены М.М. Серовой и Р.М. Чернигой. Результат их исследования таков: среди нелинейных уравнений вида (31) ($c(u) \neq \text{const}$) не существует уравнений, инвариантных относительно всей группы Галилея $G(1,3)$. Это означает, *что для нелинейного уравнения вида (31)* ($F = 0$)*, в отличие от линейного, не выполняется принцип относительности Галилея [6].* Если функции c и F явным образом зависят от t, т.е. $c(u,t)$, $F(u,t)$, то уравнения вида (31) не будут инвариантны относительно всей группы $G(1,3)$, но могут быть инвариантны относительно преобразований Галилея. Для таких уравнений будет иметь место принцип Галилея. Поэтому представляется важной задача о построении классов нелинейных ДУЧП второго порядка

$$\begin{gathered} u_0 + F(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}) = 0, \\ \underset{1}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad \underset{2}{u} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn}), \\ u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = \overline{0, n}, \qquad u = u(x_0 \equiv t, x_1, \ldots, x_n), \end{gathered} \tag{32}$$

инвариантных относительно группы Галилея $G(1,n)$ и группы Шредингера $Sch(1,n) \supset G(1,n)$. Эта задача для случая $n \leq 3$ решена М.М Серовой и автором данной работы. Решения ее приведем в виде следующих теорем.

Теорема 2. *Уравнение (32) инвариантно относительно группы $G(1,n)$ только в таких случаях:*

при $n = 1$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_1(v_1), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11}; \tag{33}$$

при $n = 2$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_2(v_1, v_2), \qquad v_1 = \Delta u = u_{11} + u_{22},$$
$$v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{12}; \tag{34}$$

при $n = 3$

$$F = \lambda u_i u_i + \Phi_3(v_1, v_2, v_3), \qquad v_1 = \Delta u,$$
$$v_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{13} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}, \tag{35}$$
$$v_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix},$$

Φ_1, Φ_2, Φ_3 — *произвольные функции из пространства* C^∞.

При доказательстве использована следующая реализация базисных элементов расширенной алгебры Ли группы $\bar{G}(1,n) = \{G(1,n), D(1)\}$:

$$P_0 = p_0, \qquad P_a = p_a, \qquad J_{ab} = M_{ab},$$
$$G_a = x_0 p_a - \frac{1}{2\lambda} x_a p_u, \qquad p_u = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad a, b = \overline{1, n}, \tag{36}$$
$$D = 2x_0 p_0 - x_a p_a.$$

Если алгебру $\bar{G}(1,n)$ дополнить оператором A (соответствующим проективным преобразованиям), то получим алгебру Шредингера $Sch(1,n)$. В данном случае

$$A = x_0(x_0 p_0 - x_a p_a) + \frac{1}{4\lambda} x_i^2 p_u.$$

Теорема 3. *Уравнение (32) инвариантно относительно группы* $\bar{G}(1,n)$ $(n \leq 3)$ *только в таких случаях:*

$$\text{при } n = 1, \quad F = \lambda u_i u_i + \lambda_1 u_{11};$$
$$\text{при } n = 2, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}\right), \quad v_1 \neq 0; \tag{37}$$
$$\text{при } n = 3, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 \Phi\left(\frac{v_2}{v_1^2}; \frac{v_3}{v_1^3}\right).$$

Теорема 4. *Уравнение (32) инвариантно относительно группы Шредингера* $Sch(1,n)$ $(n \geq 3)$ *только в таких случаях:*

$$\text{при } n = 1, \quad F = \lambda u_i u_i;$$
$$\text{при } n = 2, \quad F = \lambda u_i u_i + v_1 \left(v_1^2 - 4v_2\right)^{1/2};$$
$$\text{при } n = 3, \quad F = \lambda u_i u_i + \left(v_1^2 - 3v_2\right)^{1/2} \Phi(w), \tag{38}$$
$$w = \frac{2v_1^3 - 9v_1 v_2 + 27 v_3}{\left(v_1^2 - 3v_2\right)^{3/2}}, \quad v_1^2 \neq 3v_2, \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0.$$

Для всех приведенных уравнений вида (2), инвариантных относительно групп $G(1,n) \subset \bar{G}(1,n) \subset Sch(1,n)$, выполняется принцип относительности Галилея и справедливы законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Среди множества уравнений (32) с нелинейностями (35) имеется, в частности, уравнение (при $\Phi_3 = \sqrt{v_1}$, $v_1 = v_3 = 0$)

$$u_0 + \lambda u_i u_i + \lambda_1 \sqrt{(\Delta u)^2} = 0. \qquad (39)$$

Это уравнение эквивалентно стандартному линейному уравнению теплопроводности $v_0 + \lambda_1 \Delta v = 0$, $v = \lambda_1/\lambda \exp \lambda/\lambda_1 u$.

Для найденных нелинейных уравнений можно ставить те же задачи, что и для линейного уравнения теплопроводности. Конечно, начальные или граничные условия будут, как и в линейном случае, нарушать галилеевскую симметрию.

Замечание 1. Для более адекватного описания тепловых и диффузионных процессов естественно использовать интегродифференциальные уравнения вида

$$\{(\exp \mu S) - 1\} u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_a}\frac{\partial u}{\partial x_a}\right), \qquad (40)$$

где

$$\exp \mu S = 1 + \frac{\mu}{1!} S + \frac{\mu^2}{2!} S^2 + \cdots, \qquad S = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta.$$

В том случае, когда $F = 0$, а параметр $\mu \ll 1$ и $\|S^2 u\| < \|Su\|$, уравнение (40) приближенно совпадает со стандартным уравнением теплопроводности.

Замечание 2. Группу Галилея $G(1,n)$, дополненную группой масштабных и проективных преобразований, в литературе называют группой Шредингера и обозначают символом $Sch(1,n)$. Такое название этой группы совершенно не обосновано и несправедливо, поскольку ни в одной работе Шредингера не встречается эта группа. Впервые эта группа, как максимальная локальная группа инвариантности одномерного уравнения теплопроводности, установлена Софусом Ли еще в 1885 г. Поэтому, ради справедливости, эту группу следовало бы обозначать символом $SL(1,n)$ и назвать специальной группой Ли.

4. Какой спин несет поле Навье–Стокса? 1. Для наших целей достаточно рассмотреть простейший вариант системы типа Навье–Стокса [15]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_1 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \lambda_2 \Delta u_i = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3, \qquad (41)$$

и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (42)$$

Тот факт, что система уравнений (41), (42) инвариантна относительно расширенной группы $\bar{G}(1,3)$, известен давно [16]. Сравнительно недавно доказано, что $\bar{G}(1,n)$ является максимальной (в смысле С. Ли) группой инвариантности (МГИ) системы (41), (42) [2, 17, 18]. Базисные элементы 11-мерной алгебры инвариантности (АИ) уравнений (41), (42) имеют следующий вид (при $\lambda_1 = 1$):

$$P_\mu^{\mathrm{I}} = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mu = \overline{0,3}, \qquad (43)$$

$$J^{\rm I}_{ab}=M^{\rm I}_{ab}+S^{\rm I}_{ab},\qquad M^{\rm I}_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a,\qquad a,b=\overline{1,3}, \tag{44}$$

$$G^{\rm I}_a=t\partial_a-\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{45}$$

$$D^{\rm I}=2t\partial_0+x_a\partial_a-u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{46}$$

где

$$S^{\rm I}_{ab}=u_a\frac{\partial}{\partial u_b}-u_b\frac{\partial}{\partial u_a}. \tag{47}$$

Провести теоретико-алгебраический анализ уравнений означает [4, 19]: 1) найти алгебру инвариантности (АИ); 2) построить по АИ группу инвариантности ДУ; 3) установить, какое именно представление реализуют базисные операторы АИ. В соответствии с работами С. Ли и Л.В. Овсянникова провести групповой анализ ДУ означает решить только первые две задачи. Во времена С. Ли третья задача не могла и ставиться, поскольку только в 30–50-е годы нашего столетия построена теория представлений групп и алгебр Ли. Как нам кажется, уместно использовать словосочетание “теоретико-алгебраический анализ уравнения”, в том случае, когда решаются все три задачи.

Важность решения третьей задачи теоретико-алгебраического анализа ДУ представляется нам очевидной. Действительно, если, например, провести только групповой анализ уравнения Дирака (т.е. решить первые две задачи), то мы не получим существенной информации о спиновой структуре этого уравнения, т.е. не будем знать, что система Дирака описывает частицу и античастицу со спином 1/2. Последняя информация является следствием того, что на множестве решений уравнения Дирака реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ со спином $s=1/2$ [5]. Алгебра $P(1,3)$ является алгеброй инвариантности уравнения Дирака.

2. Рассмотрим линейную систему типа (41), (42) (положив $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\Delta u_i=0, \tag{48}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0. \tag{49}$$

В матричной записи систему (48), (49) можно представить в виде

$$L_0\Psi=0,\qquad L_0=(\partial_t-\Delta)I_3, \tag{50}$$

$$L_1\Psi=0,\qquad L_1=\begin{pmatrix}\partial_1&\partial_2&\partial_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{51}$$

где Ψ — вектор-функция с компонентами (u_1,u_2,u_3), I_3 — единичная матрица 3×3.

Базисные элементы максимальной алгебры инвариантности системы (48), (49) выглядят так:

$$P^{\rm II}_\mu=\partial_\mu,\qquad D^{\rm II}_1=2x_0\partial_0-x_a\partial_a,\qquad D^{\rm II}_2=u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{52}$$

$$J^{\mathrm{II}}_{ab} = J^{\mathrm{I}}_{ab} = M^{\mathrm{I}}_{ab} + S^{\mathrm{I}}_{ab}. \tag{53}$$

На множестве решений уравнений (50), (51) операторы (52), (53) можно представить в виде

$$P^{\mathrm{II}}_{\mu} = \partial_{\mu}, \qquad D^{\mathrm{II}}_{1} = 2x_0\partial_0 - x_a\partial_a, \qquad D^{\mathrm{II}}_{2} = I_3, \tag{54}$$

$$J^{\mathrm{II}}_{ab} = M^{\mathrm{I}}_{ab} + S^{\mathrm{II}}_{ab}, \tag{55}$$

где 3×3 матрицы $S^{\mathrm{II}}_{ab} = S_{ab}$ реализуют векторное представление алгебры Ли группы вращений $SO(3)$, т.е.

$$S_{12} = S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{23} = S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{31} = S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Легко подсчитать, что квадрат спинового оператора

$$-(S^{\mathrm{II}}_{ab})^2\Psi = -\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)\Psi = s(s+1)I_3\Psi = 2\Psi. \tag{57}$$

Проведенный анализ представлений (54), (55) показывает, что система ДУ (48), (49) описывает физическую систему со спином $s = 1$.

Замечание 1. Необходимо заметить, что линейная система Навье–Стокса (48), (49), в отличие от нелинейной, не инвариантна относительно преобразований Галилея, т.е. для нее не выполняется основной принцип механики — принцип относительности Галилея. Это обстоятельство, как нам кажется, ставит под сомнение правомерность использования линеаризованной системы Навье–Стокса для описания реальных гидродинамических систем.

Замечание 2. Максимальной АИ системы (48), без условия (49), является 22-мерная алгебра с базисными операторами

$$P^{\mathrm{III}}_{\mu} = \partial_{\mu}, \qquad J^{\mathrm{III}}_{ab} = M_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \tag{58}$$

$$G^{\mathrm{III}}_{a} = 2x_0\partial_a + x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \qquad D^{\mathrm{III}} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a}, \tag{59}$$

$$A^{\mathrm{III}} = x_0\left(x_\mu\partial_\mu - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}x_a x_a u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \tag{60}$$

$$S^{\mathrm{III}}_{ab} = u_a\frac{\partial}{\partial u_b}. \tag{61}$$

Это означает, что группой инвариантности системы (48) является группа $Sch(1,3) \otimes GL(3)$.

Замечание 3. Система (48), (49), помимо локальной группы инвариантности, порождаемой операторами (52), (53), обладает нелокальной симметрией $SU(2)$. Доказательство этого утверждения приводится с помощью метода, описанного в работах [3–5]. По трем базисным операторам алгебры Ли группы $SU(2)$ можно построить новые законы сохранения для системы (48), (49).

Замечание 4. Нелинейная система ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \tag{62}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{63}$$

инвариантна относительно группы $\bar{G}(1,3)$. Максимальной АИ системы (58), (59) является алгебра Ли группы $IGL(4,R) \supset P(1,3)$. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\begin{gathered} P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{ab} = J^{\mathrm{I}}_{ab}, \qquad J_{0a} = x_a\partial_0 - u_a u_b \frac{\partial}{\partial u_b}, \\ G_a = x_a\partial_0 - \frac{\partial}{\partial u_a}, \qquad D_0 = x_0\partial_0 - u_b\frac{\partial}{\partial u_b}, \qquad D_a = x_a\partial_a + u_a\frac{\partial}{\partial u_a} \end{gathered} \tag{64}$$

(в D_a суммы по a нет).

Из явного вида операторов (64) следует, что система уравнений Эйлера (62), (63) инвариантна как относительно преобразований Галилея, так и относительно преобразований Лоренца. Таким образом, система (62), (63) является примером уравнений, для которых выполняется как принцип относительности Галилея, так и принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна.

Замечание 5. Уравнение неразрывности (42) инвариантно относительно бесконечной алгебры.

3. Чтобы ответить на вопрос, вынесенный в заглавие, достаточно провести сравнительный анализ операторов (52), (53) и (43)–(47). Совокупность всех операторов (43)–(47), в отличие от операторов (52), (53), не может быть определена в пространстве вектор-функций $\{\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \text{столбец}\,(u_1(t,\boldsymbol{x}), u_2(t,\boldsymbol{x}), u_3(t,\boldsymbol{x})\}$, поскольку G^{I}_a выражается через оператор сдвига $\frac{\partial}{\partial u_a}$. Оператор $\frac{\partial}{\partial u_a}$ является неограниченным оператором, поэтому его невозможно представить матрицей конечного порядка.

В силу этого действия всех операторов (43)–(47) можно задать только в пространстве функций $\{\chi = \chi(t, x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3)\}$, зависящих от семи переменных. Это главное отличие операторов (43)–(47) от операторов (52), (53). Конечно, операторы (52), (53) можно задать в пространстве $\{\chi\}$. При этом пространство $\{\chi\}$ будет приводимо относительно операторов (52), (53).

Из приведенного следует, что квадрат оператора спина

$$\left(S^{\mathrm{I}}_{ab}\right)^2 = \left(S^{\mathrm{I}}_{12}\right)^2 + \left(S^{\mathrm{I}}_{23}\right)^2 + \left(S^{\mathrm{I}}_{31}\right)^2 \tag{65}$$

в пространстве $\{\chi, t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\}$ не равен 2, но принимает бесконечно много различных значений.

Таким образом, поле Навье–Стокса (уравнения (41), (42)) и поле Эйлера (уравнения (62), (63)) несут всевозможные целочисленные спины $s = 0, 1, 2, \ldots$. Этот результат принципиально отличен от того, что мы знаем о нелинейном уравнении Дирака (19) или о нелинейном уравнении для векторного поля, или о полях Янга–Миллса, где спин принимает либо одно, либо конечное число значений.

В заключение приведем пример релятивистской алгебры (содержащей в качестве подалгебры алгебру $P(1,3)$) операторов, которые приводят также к бесконечному набору целых спинов. Совокупность таких операторов имеет вид

$$
\begin{gathered}
P_\mu = \partial_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \qquad R_\mu = \frac{\partial}{\partial u_\mu}, \\
G^{\pm}_{\mu\nu} = x_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} \pm u_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad S_{\mu\nu} = u_\mu \frac{\partial}{\partial u_\nu} - u_\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu}.
\end{gathered} \tag{66}
$$

Часть операторов (66) инвариантна относительно замены зависимых $(u(x))$ и независимых переменных (x): $x_\mu \to u_\mu$, $u_\mu \to x_\mu$.

5. О нелиевской симметрии релятивистского уравнения Гамильтона. В работе [26] доказано, что максимальной (в смысле С. Ли) локальной группой инвариантности уравнения Гамильтона

$$
\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 0 \tag{67}
$$

является конформная группа $C(1,4)$ в пятимерном пространстве $R_5(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ с метрикой

$$
s^2(x,u) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - u^2 = x_\mu^2 - u^2. \tag{68}
$$

В данном разделе обращается внимание на существование новой (нелиевской) симметрии уравнения (67). Для обнаружения этого факта достаточно заметить, что (67) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для вектора $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, т.е.

$$
u_\mu u^\mu = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \qquad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}. \tag{69}
$$

Очевидно, что уравнение (69) инвариантно относительно преобразований Лоренца и конформных преобразований

$$
u'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} u^\nu, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{70}
$$

$$
u'_\mu = \frac{u_\mu - c_\mu u_\alpha u^\alpha}{1 - 2c_\alpha u^\alpha + c_\alpha c^\alpha u_\nu u^\nu}. \tag{71}
$$

Обратим внимание на то, что преобразования (70), (71) заданы в пространстве производных $R_4(u_0, u_1, u_2, u_3)$, а не в пространстве $R_5(x_0, x_1, x_2, x_3, u)$. По этой причине симметрию уравнения (67) относительно преобразований (70), (71) невозможно было обнаружить с помощью метода С. Ли. Нелокальные симметрийные свойства уравнения (67) относительно группы (70), (71) могут быть использованы для размножения решений, если мы знаем какое-то частное решение (67).

1. Lie S., Uber die Integration durch bestimente integrate von einer Klasse lineare partiellen Differentialglaichungen, *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328–368.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фущич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.

4. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики, *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, № 4, 846–850.

5. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.

6. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

7. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 24–64.

8. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.

9. Шульга М.В., О двумерных нелинейных волновых уравнениях, инвариантных относительно некоторых алгебр Ли, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 84–86.

10. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 82.83, Киев, Ин-т математики, 1982, 49 с.

11. Gürsey F., On a conform-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, № 10, 988–1006.

12. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–277.

13. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.

14. Фущич В.И., Никитин А.Г., Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1981, **12**, вып. 3, 1157–1219.

15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., Наука, 1973, 416 с.

16. Биркгоф Г., Гидродинамика, М., Изд-во иностр. лит., 1954, 183 с.

17. Пухначев Вл.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.

18. Данилов Ю.А., Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье–Стокса, Препринт, АН СССР, Ин-т атом. энергии, М., 1967, 15 с.

19. Фущич В.И., О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 5–44.

20. Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983, 280 с.

21. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie–Bäcklund transformations in applications, Philadelphia, 1979, 150 p.

22. Сорокин В.С., О внутреннем трении жидкостей и газов, обладающих скрытым моментом импульса, *Журн. эл. техн. физики*, 1943, **13**, 306–314.

23. Шлиомис М.И., Динамика жидких парамагнетиков, Пермь, Перм. ун-т, 1983, 68 с.

24. Славуцкий С.Л., Групповые свойства некоторых уравнений гидрогазодинамики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 71–74.

25. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р., Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях, *Дифф. ур-ния*, 1983, **19**, № 7, 1215–1224.

26. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498–502.