Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе найдены в явном виде полные системы инвариантов одномерных подалгебр алгебры Ли $AP(1,n)$ группы $P(1,n)$. Получен ряд утверждений, позволяющий дать конструктивное описание полных систем инвариантов всех абелевых подалгебр алгебры $AP(1,n)$ разрешимых подалгебр алгебры $AO(1,n)$. Проблема описания инвариантов произвольных неоднородных подалгебр алгебры $AP(1,n)$ сведена к аналогичной проблеме для подалгебр, имеющих более простую структуру.

Введение

Обобщенная группа Пуанкаре $P(1,n)$ — это мультипликативная группа таких неоднородных преобразований $x_\mu \to a_\mu^\nu x_\nu + b_\mu$ пространства Минковского $M(1,n) = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}$, для которых соответствующие однородные преобразования $x_\mu \to a_\mu^\nu x_\nu$ сохраняют его метрику $x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$. В данной работе найдены в явном виде инварианты некоторых классов подгрупп группы $P(1,n)$. Поскольку вместо группы Ли $G \subset P(1,n)$ можно рассматривать соответствующую ей алгебру Ли AG, а алгебру AG можно задать как алгебру дифференциальных операторов первого порядка, то исследуемая задача сводится к нахождению решений определенных систем линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных. Множество $\{f_1, \dots, f_s\}$ функционально независимых решений такой системы, обладающее тем свойством, что любое ее решение имеет вид $\Psi(f_1, \dots, f_s)$, будем называть полной системой инвариантов данной алгебры Ли (сокращенно ПСИ), а инварианты $f_1, \dots, f_s$ — основными. Из теории систем дифференциальных уравнений в частных производных [1] хорошо известно, что если r — ранг системы уравнений, соответствующей алгебре $L \subset AP(1,n)$, то $s = n + 1 - r$. Число s назовем коразмерностью алгебры L и обозначим $\operatorname{codim} L$.

ПСИ подалгебр алгебры $AP(1,n)$ используются для нахождения точных решений уравнений, инвариантных относительно $P(1,n)$. Таким уравнением является, например, уравнение

$$\Phi\left(\Box u, (\nabla u)^2, u\right) = 0, \tag{1}$$

где

$$\Box u = u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \cdots - u_{x_nx_n}, \quad (\nabla u)^2 = (u_{x_0})^2 - (u_{x_1})^2 - \cdots - (u_{x_n})^2,$$

а Φ — достаточно гладкая функция. Отметим, что частными случаями уравнения (1) суть нелинейные уравнения Даламбера $\Box u = F\left(u, (\nabla u)^2\right)$, $\Box u = \sin u$ и Гамильтона $(\nabla u)^2 + V(u) = E$. Широкие классы точных решений нелинейных дифференциальных уравнений эффективно находятся при помощи предложенного в [2] анзаца $u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$, где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\omega(x) = \{\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)\}$ — функционально независимые инварианты одномерной подалгебры алгебры симметрии данного уравнения (см. [3–7]). Если $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$ — полная система

Препринт 86.86, Институт математики АН УССР, Киев, 1986, 40 с.

инвариантов алгебры $L \subset AP(1,n)$, то анзац $u(x) = \varphi(\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x))$ редуцирует уравнение (1) к уравнению от k переменных $\omega_1, \ldots, \omega_k$ [8].

Инварианты подгрупп расширенных групп Евклида, Галилея для трехмерных пространств найдены в [9] , а инварианты подгрупп группы $P(1,3)$ — в [8].

В первом параграфе нашей работы находятся в явном виде ПСИ тех абелевых подалгебр алгебры $AP(1,n)$ $(n \geq 2)$, из которых путем использования подпрямых сумм можно построить любую абелеву подалгебру алгебры $AP(1,n)$. Доказанные предложения конструктивно описывают ПСИ всех абелевых подалгебр алгебры $AP(1,n)$ и позволяют явно перечислить основные инварианты для каждой одномерной подалгебры алгебры $AP(1,n)$.

Во втором параграфе описываются ПСИ разрешимых подалгебр алгебры $AP(1,n)$. Выписаны в явном виде ПСИ разрешимых подалгебр алгебр $AO(1,5)$ и $AO(1,6)$.

Третий параграф работы посвящен редукционным теоремам, сводящим проблему нахождения ПСИ подалгебр алгебры $AP(1,n)$ к этой же проблеме для более простых алгебр. Из доказанных нами теорем вытекает основной результат работы [8] о подалгебрах коразмерности 1 алгебры $AP(1,n)$.

§ 1. Абелевы подалгебры и их инварианты

Алгебра Пуанкаре $AP(1,n)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},$$
$$[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \quad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \quad [P_\alpha, P_\beta] = 0,$$

где $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{nn} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \ldots, n)$.

Алгебра $AP(1,n)$ изоморфна алгебре дифференциальных операторов, действующих в пространстве скалярных функций $u(x)$, где $x \in M(1,n)$:

$$J_{oa} = x_0\partial_a + x_a\partial_0, \qquad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \qquad P_\mu = \partial_\mu$$
$$(\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu;\ a, b = 1, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, n).$$

Пусть π — проектирование $AP(1,n)$ на $AO(1,n)$, $\hat{F}$ — подалгебра $AP(1,n)$. Если $\pi(\hat{F})$ не имеет в пространстве $M(1,n)$ инвариантных изотропных подпространств, то структура алгебры $\hat{F}$ аналогична структуре подалгебр евклидовой алгебры [10]. Описание таких алгебр в определенном смысле сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр $AO(1,k)$ и $AO(k)$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$. Остальные случаи сводятся к случаям подалгебр алгебры $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}\rangle$, где $A\tilde{G}(n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом $M = P_0 + P_n$; $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$; $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$; J_{ab} $(a, b = 1, \ldots, n-1)$. Отметим, что

$$[G_a, J_{0n}] = G_a, \quad [M, J_{0n}] = M, [P_0 - P_n, J_{0n}] = -(P_0 - P_n), \quad [P_0, G_a] = P_a,$$
$$[P_a, G_a] = M, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad G_a = (x_0 - x_n)\partial_a + x_a(\partial_0 + \partial_n).$$

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$AO(s \uparrow t) = \langle J_{ab} \mid a, b = s, s+1, \ldots, t\rangle;$$

$\langle X_1,\ldots,X_s\rangle$ — алгебра Ли или векторное пространство над полем вещественных чисел R с образующими $X_1,\ldots,X_s$;

$$V(k,l)=\langle G_k,\ldots,G_l\rangle,\quad (k\le l),\quad V(k)=V(k,k);$$
$$W(\alpha,\beta)=\langle P_\alpha,\ldots,P_\beta\rangle\quad (\alpha\le\beta),\quad W(\alpha)=W(\alpha,\alpha);$$
$$\Delta(r,t)=\Delta_0(r,t)+\langle M\rangle=\langle G_r+\alpha_rP_r,\ldots,G_t+\alpha_tP_t,M\rangle,$$

где $r\le t$, $\alpha_r\le\cdots\le\alpha_t$, $\alpha_r=0$ и $\alpha_t=1$ при $\alpha_t\ne 0$; $AH(0)=O$, $AH(2d)=\langle J_{12},\ldots,J_{2d-1,2d}\rangle$ — подалгебра Картана алгебры $AO(2d)$;

$$\mathfrak{M}(r,t)=\overline{\mathfrak{M}}(r,t)\Subset\langle P_0\rangle=\langle M,P_r,\ldots,P_t,G_r,\ldots,G_t\rangle\Subset\langle P_0\rangle.$$

Через π_1, π_2 обозначим проектирования алгебры $A\tilde{G}(n-1)\Subset\langle J_{0n}\rangle$ соответственно на $V(1,n-1)$, $W(0,n)$. Мы будем такие использовать проектирования алгебры $A\tilde{G}(n-1)\Subset\langle J_{0n}\rangle$ на $\langle P_0\rangle$, $\langle M\rangle$, $\langle J_{0n}\rangle$.

В [10] доказано, что максимальные абелевы подалгебры алгебры $AO(1,n)$ исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:

$$n=2k+1,$$
$$AH(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle,\quad V(1,n-1),$$
$$AH(2d)\oplus V(2d+1,n-1)\ (d=1,\ldots,(n-3)/2);$$

$$n=2k,$$
$$AH(n),\quad AH(n-2)\oplus\langle J_{0n}\rangle,\quad V(1,n-1),$$
$$AH(2d)\oplus V(2d+1,n-1)\ (d=1,\ldots,(n-2)/2).$$

Теорема 1.1. *Пусть $0\le m\le[n-1/2]$, L — ненулевая абелева подалгебра алгебры $A\tilde{G}(n-1)\Subset\langle J_{0n}\rangle$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ отлична от нуля, то L $P(1,n)$-сопряжена подпрямой сумме алгебр L_1, L_2, $\langle J_{0n}\rangle$, где $L_1\subset AH(2m)$, $L_2=0$ или $L_2=W(2m+1,2m+s)$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ и на $\langle P_0\rangle$ равна 0, то L сопряжена подпрямой сумме алгебр L_1, L_2, L_3, L_4, где $L_1\subset AH(2n)$, $L_2=0$ или $L_2=\Delta_0(2m+1,2m+s)$, $L_3=0$ или $L_3=W(2m+s+1,l)$, $L_4=0$ или $L_4=\langle M\rangle$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0, а проекция L на $\langle P_0\rangle$ отлична от нуля, то L сопряжена подпрямой сумме алгебр L_1, L_2, L_3, L_4, где $L_1\subset AH(2m)$, $L_2=\langle P_0+\alpha G_{2m+1}\rangle$ $(\alpha\in\{0,1\})$, $L_3=0$ или $L_3=W(\bar{s},t)$, $L_4=0$ или $L_4=\langle M\rangle$ ($\bar{s}=2m+1$ при $\alpha=0$; $\bar{s}=2m+2$ при $\alpha=1$).*

Доказательство. Пусть $X_i=G_i+\beta_{2m+1,i}P_{2m+1}+\cdots+\beta_{2m+s,i}P_{2m+s}$ $(i=2m+1,\ldots,2m+s)$, $L=\langle X_{2m+1},\ldots,X_{2m+s}\rangle$. Очевидно, $[X_i,X_j]=(\beta_{ji}-\beta_{ij})M$. Если L — абелева алгебра, то $\beta_{ij}=\beta_{ji}$. Отсюда вытекает, что $B=(\beta_{ij})$ $(i,j=2m+1,\ldots,2m+s)$ — симметрическая матрица. Поэтому существует такая матрица $U\in O(s)$, что $UBU^{-1}=\operatorname{diag}[\lambda_1,\ldots,\lambda_s]$. Отсюда следует, что с точностью до $P(1,n)$-сопряженности можно предполагать, что $X_{2m+j}=G_{2m+j}+\lambda_jP_{2m+j}$ $(j=1,\ldots,s)$. $O(n-1)$-автоморфизмы позволяют изменять нумерацию генераторов $G_{2m+1},\ldots,G_{2m+s}$. Поэтому можно считать, что $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_s$. Применяя автоморфизм $\exp(-\lambda_1P_0)$, получаем генераторы $G_{2m+j}+\mu_jP_{2m+j}$ $(j=1,\ldots,s)$, где $\mu_1=0$, $0\le\mu_2\cdots\le\mu_s$. Если $\mu_s>0$, то $\mu_s=\exp\theta$. Очевидно,

$$\exp(-\theta J_{0n})(G_{2m+j}+\mu_jP_{2m+j})\exp(\theta J_{0n})=$$
$$=e^\theta G_{2m+j}+\mu_jP_{2m+j}=e^\theta(G_{2m+j}+\mu_je^{-\theta}P_{2m+j}).$$

Поэтому при $\mu_s>0$ можно предполагать, что $\mu_s=1$.

Остальные утверждения теоремы вытекают из предложения 1.1 [10] о расщепляемости расширений вполне приводимой алгебры Ли линейных преобразований и теоремы Витта о подпространствах пространства $M(1,n)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\alpha_r \le \alpha_{r+1} \le \cdots \le \alpha_t$, $\alpha_r = 0$ и $\alpha_t = 1$ при $\alpha_t \ne 1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $AP(1,n)$ исчерпываются относительно $P(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$W(0,n)$; $\Delta(1,n-1)$; $\Delta(1,s)\oplus W(s+1,n-1)$ $(s=1,\dots,n-2)$;
$\langle G_1+P_0,M\rangle \oplus W(2,n-1)$; $W(1,n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$;
$AH(n-2)\oplus\langle G_{n-1}+P_0,M\rangle$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$;
$AH(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ $(n\equiv 1 \pmod 2)$;
$\langle P_0\rangle\oplus AH(n)$ $(n\equiv 0 \pmod 2)$;
$\langle P_0\rangle\oplus AH(2d)\oplus W(2d+1,n)$ $(d=1,\dots,[n-1/2])$;
$AH(2d)\oplus W(2d+1,n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ $(d=1,\dots,[n-2/2])$;
$AH(2d)\oplus\Delta(2d+1,n-1)$ $(d=1,\dots,[n-2/2])$;
$AH(2d)\oplus\Delta(2d+1,s)\oplus W(s+1,n-1)$ $(d=1,\dots,[n-3/2])$;
$AH(2d)\oplus\langle G_{2d+1}+P_0,M\rangle\oplus W(2d+2,n-1)$ $(d=1,\dots,[n-3/2])$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Следствие 2. *Пусть $n\ge 3$; $\alpha,\beta>0$; $r=2,\dots,[n-2/2]$ при $n\ge 6$; $s=2,\dots,[n-1/2]$ при $n\ge 5$; $t=2,\dots,[n/2]$ при $n\ge 4$; $X_t = J_{12}+\alpha_1 J_{34}+\cdots+\alpha_{t-1}J_{2t-1,2t}$, где $0<\alpha_1\le\cdots\le\alpha_{t-1}\le 1$. С точностью до $P(1,n)$-сопряженности одномерные подалгебры $AP(1,n)$ исчерпываются такими алгебрами:*

$L_1=\langle J_{12}\rangle$; $L_2^t=\langle X_t\rangle$; $L_3=\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$; $L_4^t=\langle X_t+\alpha P_0\rangle$; $L_5=\langle J_{12}+M\rangle$;
$L_6^s=\langle X_s+M\rangle$; $L_7=\langle J_{12}+\alpha J_{0n}\rangle$; $L_8^s=\langle X_s+\alpha J_{0n}\rangle$; $L_9=\langle J_{12}+\alpha P_3\rangle$;
$L_{10}^s=\langle X_s+\alpha P_{2s+1}\rangle$; $L_{11}=\langle J_{12}+\alpha P_3+\beta J_{0n}\rangle$ $(n\ge 4)$;
$L_{12}^r=\langle X_r+\alpha P_{2r+1}+\beta J_{0n}\rangle$; $L_{13}=\langle J_{12}+G_3\rangle$ $(n\ge 4)$; $L_{14}=\langle X_r+G_{2r+1}\rangle$;
$L_{15}=\langle J_{12}+G_3+\alpha P_4\rangle$ $(n\ge 5)$; $L_{16}^r=\langle X_r+G_{2r+1}+\beta P_{2r+2}\rangle$ $(r=[n-3/2])$;
$L_{17}=\langle P_0\rangle$; $L_{18}=\langle M\rangle$; $L_{19}=\langle P_1\rangle$; $L_{20}=\langle G_1\rangle$; $L_{21}=\langle G_1+P_2\rangle$; $L_{22}=\langle J_{0n}\rangle$;
$L_{23}=\langle J_{0n}+\alpha P_1\rangle$; $L_{24}=\langle G_1+P_0\rangle$; $L_{25}=\langle J_{12}+\alpha(G_3+P_0)\rangle$ $(n\ge 4)$;
$R_{26}^r=\langle X_r+\alpha(G_{2r+1}+P_0)\rangle$.

Описание ПСИ абелевых подалгебр алгебры $AP(1,n)$ содержится в доказываемых ниже предложениях.

Пусть

$$\mu(x;k_1,\dots,k_s)=\left(\sum_{i=1}^{s} g_{k_ik_i}x_{k_i}^2\right)^{1/2},\quad h(x;k_1,\dots,k_s)=\left(\sum_{i=1}^{s} x_{k_i}^2\right)^{1/2},$$

$$\varphi(k,x)=\left(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2\right)^{1/2},\quad \psi(k,x)=\arcsin\frac{x_{2k}}{\left(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2\right)^{1/2}}.$$

Предложение 1.1. *Пусть $X_a = J_{2a-1,2a}+\sum\limits_{j=r+1}^{m}\alpha_{aj}J_{2j-1,2j}$; $(a=1,\dots,r;\ m\le [n/2])$. ПСИ алгебры $L=\langle X_1,\dots,X_r\rangle$ составляют функции:*

$$\begin{aligned}&\varphi(d,x)\ (d=1,\dots,m),\quad x_0,\ x_{2m+1},\ \dots,\ x_n,\\ &\sum_{b=1}^{r}\alpha_{bq}\psi(b,x)-\psi(q,x)\quad (q=r+1,\dots,m).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем, что

$$J_{2d-1,2d}(\varphi(b,x))=0,\ J_{2d-1,2d}(\psi(c,x))=0 \text{ при } c\neq d,\ J_{2d-1,2d}(\psi(d,x))=-1.$$

Значит, функции (1.1) суть инвариантны алгебры L. Очевидно, codim $L=n+1-r$. Число функций (1.1) также равно $n+1-r$. Остается доказать их функциональную независимость.

Пусть $\Gamma(k)$ — функциональная матрица, соответствующая

$$\varphi(t,x)\ (t=1,\ldots,k),\quad \sum_{b=1}^{r}\alpha_{bl}\psi(b,x)-\psi(l,x)\ (l=r+1,\ldots,k).$$

Легко видеть, что с точностью до нумерации строк и столбцов

$$\Gamma(k+1)=\begin{pmatrix} \Gamma(k) & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{x_{2k+1}}{\left(x_{2k+1}^2+x_{2k+2}^2\right)^{1/2}} & \dfrac{x_{2k+2}}{\left(x_{2k+1}^2+x_{2k+2}^2\right)^{1/2}}\\ * & \dfrac{x_{2k+2}}{x_{2k+1}^2+x_{2k+2}^2} & -\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k+1}^2+x_{2k+2}^2}\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} x_{2k+1} & x_{2k+2}\\ -x_{2k+2} & x_{2k+1}\end{vmatrix}=x_{2k+1}^2+x_{2k+2}^2,$$

то ранг $\Gamma(k+1)=$ ранг $\Gamma(k)+2$. Очевидно, ранг $\Gamma(r+1)=r+2$. Следовательно, ранг $\Gamma(m)=2m-r$. Предложение доказано.

Предложение 1.2. *ПСИ алгебры*

$$L=\langle G_1, G_2+\alpha_2P_2,\ldots,G_t+\alpha_tP_t\rangle$$

составляют функции

$$x_0-x_n,\ x_{t+1},\ \ldots,\ x_{n-1},\ -x_0^2+x_1^2+\sum_{i=2}^{t}\frac{x_0-x_n}{x_0-x_n+\alpha_i}x_i^2+x_n^2. \tag{1.2}$$

Доказательство. Очевидно, $G_a(x_0-x_n)=0$, $(G_a+\alpha_aP_a)\left(x_n^2-x_0^2\right)=2x_a(x_n-x_0)$. Отсюда вытекает, что функция (1.2) суть инварианты алгебры L. Очевидно, эти инварианты являются функционально независимыми. Остается установить, что их число совпадает с codim L. Составляем матрицу Γ из функций при $\partial_0,\partial_1,\ldots,\partial_t,\partial_n$ в генераторах алгебры L:

$$\left(\begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_0-x_n & 0 & \cdots & 0 & x_1\\ x_2 & 0 & x_0-x_n+\alpha_2 & \cdots & 0 & x_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ x_t & 0 & \cdot & \cdots & x_0-x_n+\alpha_t & x_t\end{array}\right).$$

Обведенный минор порядка t равен

$$(x_0-x_n)(x_0-x_n+\alpha_2)\cdots(x_0-x_n+\alpha_t).$$

Значит, ранг $\Gamma=t$, а потому codim $L=n+1-t$. Предложение доказано.

Предложение 1.3. *Пусть*

$$X_i = G_i + \alpha_i P_i + \sum_{j=m+1}^{s} \beta_{ij} P_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

$L = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$. *ПСИ алгебры* L *составляют функции*

$$x_0 - x_n,\ x_{s+1},\ \dots,\ x_{n-1},\ -x_0^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \alpha_i} x_i^2 + x_n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_{ij} x_i}{x_0 - x_n + \alpha_i} - x_j \quad (j = m+1, \dots, s).$$

Предложение 1.4. *Пусть*

$$X_a = J_{2a-1,2a} + \sum_{j=2r+1}^{s} \alpha_{aj} (G_j + \alpha_j P_j) \quad (a = 1, \dots, r).$$

ПСИ алгебры $\langle X_1, \dots, X_r \rangle$ *составляют функции*

$$\varphi(a,x)\ (a = 1, \dots, r),\ x_0 - x_n,\ x_{s+1},\ \dots,\ x_{n-1},$$

$$\sum_{a=1}^{r} \alpha_{aq} (x_0 - x_n + \alpha_q) \psi(a,x) + x_q \quad (q = 2r+1, \dots, s),$$

$$-x_0^2 + \sum_{q=2r+1}^{s} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \alpha_q} x_q^2 + x_n^2.$$

Предложение 1.5. *Пусть*

$$X_a = J_{2a-1,2a} + \sum_{j=2r+s+1}^{t} \alpha_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, r),$$

$$Y_{b-2r} = G_b + \gamma_b P_b + \sum_{j=2r+s+1}^{t} \delta_{bj} P_j \quad (b = 2r+1, \dots, 2r+s).$$

ПСИ алгебры $\langle X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s \rangle$ *составляют функции*

$$\varphi(a,x)\ (a = 1, \dots, r);\ x_0 - x_n,\ x_{t+1},\ \dots,\ x_{n-1};$$

$$-x_0^2 + \sum_{b=2r+1}^{2r+s} \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n + \gamma_b} + x_n^2;$$

$$\sum_{a=1}^{r} \alpha_{aj} \psi(a,x) - \sum_{b=2r+1}^{2r+s} \delta_{bj} \frac{x_b}{x_0 - x_n + \gamma_b} + x_j \quad (j = 2r+s+1, \dots, t).$$

Предложение 1.6. *Пусть*

$$X_a = J_{2a-1,2a} + \alpha_a J_{0n} + \sum_{j=2r+1}^{s} \beta_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, r).$$

ПСИ алгебры $\langle X_1,\ldots,X_r\rangle$ составляют функции

$$\varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r);\ \mu(x;0,n);\ x_{s+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$$
$$\sum_{a=1}^{r}\alpha_a\psi(a,x)-\ln(x_0-x_n);\quad x_j+\sum_{a=1}^{r}\beta_{aj}\psi(a,x)\quad (j=2r+1,\ldots,s).$$

Предложение 1.7. *Пусть*

$$X_a=J_{2a-1,2a}+\sum_{j=2r+1}^{s}\alpha_{aj}P_j\quad (a=1,\ldots,r),\quad X=J_{0n}+\sum_{j=2r+1}^{s}\beta_jP_j.$$

ПСИ алгебры $\langle X_1,\ldots,X_r,X\rangle$ составляют функции

$$\varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\ \mu(x;0,n),\ x_{s+1},\ \ldots,\ x_{n-1},$$
$$\sum_{a=1}^{r}\alpha_{aj}\psi(a,x)+\beta_j\ln(x_0-x_n)+x_j\quad (j=2r+1,\ldots,s).$$

Предложение 1.8. *Полную систему инвариантов алгебры $\langle J_{0n}+\alpha P_1,P_2,\ldots,P_k\rangle$ составляют функции*

$$\mu(x;0,n),\ \alpha\ln(x_0-x_n)+x_1,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{n-1}.$$

Предложение 1.9. *Пусть $X_a=J_{2a-1,2a}$ $(a=1,\ldots,r)$,*

$$L=\langle M,X_1+\alpha_1(P_0+G_{2r+1}),\ldots,X_r+\alpha_r(P_0+G_{2r+1})\rangle.$$

ПСИ алгебры L составляют функции

$$\varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\quad \sum_{a=1}^{r}\alpha_a\psi(a,x)+x_0-x_n,$$
$$(x_0-x_n)^2-2x_{2r+1},\quad x_{2r+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$$

ПСИ алгебры $L/\langle M\rangle$ составляют основные инварианты алгебры L и

$$(x_0-x_n)^3-3(x_0-x_n)x_{2r+1}+3x_n.$$

Предложение 1.10. *Пусть*

$$L=\langle M,X_1+\alpha_1P_0,\ldots,X_r+\alpha_rP_0\rangle,\quad X_a=J_{2a-1,2a}\ (a=1,\ldots,r).$$

ПСИ алгебры L составляют функции

$$\varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\quad \sum_{a=1}^{r}\alpha_a\psi(a,x)+x_0-x_n,\quad x_{2r+1},\ldots,x_{n-1};$$

ПСИ алгебры $L/\langle M\rangle$ составляют функции

$$\varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\quad \sum_{a=1}^{r}\alpha_a\psi(a,x)+x_0,\quad x_{2r+1},\ldots,x_{n-1},x_n.$$

Теорема 1.2. *Пусть L_j $(j = 1, \ldots, 26)$ — система представителей классов сопряженных одномерных подалгебр алгебры $AP(1, n)$, выписанная в следствии 2 из теоремы 1.1. Полную систему инвариантов алгебры L_j составляют такие функции:*

$$
\begin{array}{rl}
L_1: & \varphi(1,x),\ x_0,\ x_3,\ \ldots,\ x_n;\\
L_2^t: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,t),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,t-1),\\
 & x_0,\ x_{2t+1},\ \ldots, x_n;\\
L_3: & \varphi(1,x),\ \alpha\psi(1,x)+x_0,\ x_3,\ \ldots,\ x_n;\\
L_4^t: & \varphi(a,x)(a=1,\ldots,t),\ \alpha\psi(1,x)+x_0,\ x_{2t+1},\ \ldots,\ x_n,\\
 & \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,t-1);\\
L_5: & \varphi(1,x),\ x_0-x_n,\ 2\psi(1,x)+x_0+x_n,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_6^s: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,s),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,s-1),\\
 & x_0-x_n,\ 2\psi(1,x)+x_0+x_n,\ x_{2s+1},\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_7: & \varphi(1,x),\ \mu(x;0,n),\ \alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n),\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_8^s: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,s),\ \mu(x;0,n),\ \alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n),\\
 & \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,s-1),\ x_{2s+1},\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_9: & \varphi(1,x),\ \alpha\psi(1,x)+x_3,\ x_0,\ x_4,\ \ldots,\ x_n;\\
L_{10}^s: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,s),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,s-1),\\
 & \alpha\psi(1,x)+x_{2s+1},\ x_0,\ x_{2s+2},\ \ldots,\ x_n;\\
L_{11}: & \varphi(1,x),\ \alpha\psi(1,x)+x_3,\ \mu(x;0,n),\\
 & \beta\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n),\ x_4,\ \ldots, x_{n-1};\\
L_{12}^r: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\ \alpha\psi(1,x)+x_{2r+1},\ \mu(x;0,n),\\
 & \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,r-1),\ \beta\psi(1,x)+\ln(x_0+x_n),\\
 & x_{2r+2},\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{13}: & \varphi(1,x),\ x_0-x_n,\ (x_0-x_n)\psi(1,x)+x_3,\ \mu(x;0,3,n),\ x_4,\ \ldots, x_{n-1};\\
L_{14}^r: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,r-1),\\
 & x_0-x_n,\ (x_0-x_n)\psi(1,x)+x_{2r+1},\ \mu(x;0,2r+1,n),\ x_{2r+2},\ \ldots, x_{n-1};\\
L_{15}: & \varphi(1,x),\ x_0-x_n,\ (x_0-x_n)\psi(1,x)+x_3,\ \mu(x;0,3,n),\\
 & \alpha\psi(1,x)+x_4,\ x_5,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{16}^r: & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,r-1),\\
 & x_0-x_n,\ (x_0-x_n)\psi(1,x)+x_{2r+1},\ \mu(x;0,2r+1,n),\\
 & \beta\psi(1,x)+x_{2r+2},\ x_{2r+3},\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{17}: & x_1,\ \ldots,\ x_n;\\
L_{18}: & x_0-x_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{19}: & x_0,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\\
L_{20}: & x_0-x_n,\ \mu(x;0,1,n),\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{21}: & x_0-x_n,\ \mu(x;0,1,n),\ (x_0-x_n)^{-1}x_1-x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{22}: & \mu(x;0,n),\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{23}: & \mu(x;0,n),\ \alpha\ln(x_0+x_n)-x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1};
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{24}:\quad & (x_0-x_n)^2-2x_1,\ (x_0-x_n)^3-3x_1(x_0-x_n)+3x_n,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1};\\
L_{25}:\quad & \varphi(1,x),\ (x_0-x_n)^2-2x_3, x_4,\ \ldots,\ x_{n-1},\\
& (x_0-x_n)^3-3x_3(x_0-x_n)+3x_n,\ \alpha\psi(1,x)+x_0-x_n;\\
L_{26}:\quad & \varphi(a,x)\ (a=1,\ldots,r),\ \alpha_j\psi(1,x)-\psi(j+1,x)\ (j=1,\ldots,r-1),\\
& (x_0-x_n)^2-2x_{2r+1},\ (x_0-x_n)^3-3x_{2r+1}(x_0-x_n)+3x_n,\\
& \alpha\psi(1,x)+x_0-x_n,\ x_{2r+2},\ \ldots,\ x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

§ 2. Разрешие подалгебры и их инварианты

Если n — нечетное число, то $AO(1,n)$ обладает относительно $O(1,n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй $V(1,n-1)\supset\!\!\!+ (AH(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$. Если n — четное число, то $AO(1,n)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами: $AH(n)$, $V(1,n-1)\supset\!\!\!+ (AH(n-2)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(1,n)$ имеют вид $W(0,n)\supset\!\!\!+ F$, где F — максимальная разрешимая подалгебра алгебры$AO(1,n)$.

В дальнейшем будем предполагать, что каждая рассматриваемая разрешимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$ содержится в одной из выписанных максимальных разрешимых подалгебр.

Пусть $\hat{F}$ — подалгебра $AP(1,n)$. Если $M\in\hat{F}$, то для инварианта $f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ алгебры $\hat{F}$ выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}+\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Произведем замену переменных: $x_0=y_0+y_n$, $x_n=y_n$, $x_i=y_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$. Очевидно,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_0}+\frac{\partial}{\partial x_n}=\frac{\partial}{\partial y_n},\quad P_0=\frac{\partial}{\partial y_0},\quad P_i=\frac{\partial}{\partial y_i},\\
&G_i=y_0\frac{\partial}{\partial y_i}+y_i\frac{\partial}{\partial y_n},\quad J_{0n}=-y_0\frac{\partial}{\partial y_0}+(y_0+y_n)\frac{\partial}{\partial y_n}.
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y_n}=0,$$

то инварианты $\hat{F}$ суть функции от $x_0-x_n,x_1,\ldots,x_{n-1}$. Следовательно, при нахождении инвариантов алгебры $\hat{F}$ можно допускать, что

$$
\begin{aligned}
&G_a=y_0\frac{\partial}{\partial y_a},\quad J_{0n}=-y_0\frac{\partial}{\partial y_0},\quad J_{ab}=y_b\frac{\partial}{\partial y_a}-y_a\frac{\partial}{\partial y_b},\\
&P_0=\frac{\partial}{\partial y_0},\quad P_a=\frac{\partial}{\partial y_a}\quad (a,b=1,\ldots,n-1).
\end{aligned}
$$

Если $L=N\supset\!\!\!+ K$, то фактор-алгебру L/N будем отождествлять с алгеброй K.

Предложение 2.1. *Пусть $1\le m\le[n-1/2]$, L — ненулевая разрешимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ отлична от 0, то L $O(1,n)$-сопряжена алгебре $U\supset\!\!\!+ F$, где $U=0$ или $U=V(1,s)$, а F — подпрямая сумма $\langle J_{0n}\rangle$ и подалгебры алгебры $AH(2m)$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ равна*

0, то L $O(1,n)$-сопряжена алгебре $U \inplus F$, где $U = 0$ или $U = V(1,s)$, а F — подалгебра $AH(2m)$ или F — подпрямая сумма подалгебры алгебры $AH(2l)$ и $V(2l+1,t)$, причем $F \cap V(2l+1,t) = 0$ ($l \leq [n-2/2]$, $t \leq n-1$).

Предложение 2.1 доказывается на основании предложения 1.1 из [10] и теоремы Витта о подпространствах псевдоевклидова пространства.

Предложение 2.2. *Пусть $L = U \inplus F$ — одна из разрешимых подалгебр алгебры $AO(1,n)$, описанных в предложении 2.1. Если $U = V(1,s)$ и проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ совпадает с $\langle J_{0n}\rangle$, то ПСИ алгебры L составляют $\mu(x;0,\ldots,s,n)$ и основные инварианты абелевой алгебры $L + AH(s)/U + AH(s)$ от переменных $x_0 - x_n, x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}$. Если $U = V(1,s)$ и проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0, то ПСИ алгебры L составляют $x_0 - x_n$, $\mu(x;0,1,\ldots,n)$ и основные инварианты абелевой алгебры $L + AH(s)/U + AH(s)$ от переменных $x_0 - x_n, x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}$.*

Доказательство. Ранг алгебры $V(1,s)$ равен s. Генераторы этой алгебры действуют нетривиально в пространстве функций от $s+2$ переменных $x_0, x_1, \ldots, x_s, x_n$. Допустим, что L содержит подпрямую сумму Γ алгебр $V(1,s)$, $\langle J_{0n}\rangle$ и проекции F на $AH(s)$. Поскольку ранг Γ равен $s+1$, то алгебра Γ, а значит и алгебра L, имеет только один основной инвариант, зависящий от $x_0, x_1, \ldots, x_s, x_n$. Им является функция $\mu(x;0,1,\ldots,s,n)$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ отлична от 0, но L не содержит Γ и $J_{0n} \notin L$, то согласно предложению 1.6 инвариантом алгебры L является функция вида

$$\sum_{a=[s+2/2]}^{[n-1/2]} \alpha_a \psi(a,x) - \ln(x_0 - x_n).$$

Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0, то $x_0 - x_n$ также будет инвариантом алгебры L. Во всех случаях остальные инварианты суть функции от переменных $x_0 - x_n, x_{s+1}, \ldots, x_{n-1}$. Предложение доказано.

Пусть

$$\begin{aligned} &\Phi(0) = \langle M\rangle, \quad \Phi(i) = \langle M, P_1, \ldots, P_i\rangle, \\ &\Omega(0) = \langle M, P_0\rangle, \quad \Omega(i) = \langle M, P_0, P_1, \ldots, P_i\rangle, \\ &\Lambda_{r+1,k+1}(j) = \langle P_{r+d} + \lambda_d P_{k+d} \mid d = 1, 2, \ldots, \rangle, \end{aligned}$$

где $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_j$ $(1 \leq j \leq k-r)$.

Предложение 2.3. *Пусть $L = V(1,k)$. Подпространства пространства $W(0,n)$, инвариантные относительно L исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности такими пространствами:*

$$\begin{aligned} &O,\ \Phi(i),\ \Omega(k),\ W(k+1,t),\ \Phi(i) \oplus W(k+1,t),\ \Omega(k) \oplus W(k+1,t), \\ &\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1,k+1}(j),\ \Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1,k+1}(j) \oplus W(k+j+1,s), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $i = 0,1,\ldots,k$; $t = k+1,\ldots,n-1$; $r = 0,1,\ldots,k-1$; $j = 1,\ldots,k-r$; $s = k+j+1,\ldots,n-1$.

Пусть U — одно из пространств (2.1), $\hat{L} = U \inplus L$. ПСИ алгебры $\hat{L}$ составляют такие функции:

$L:\ x_0 - x_n,\ \mu(x;0,1,\ldots,k,n),\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{n-1}$;

$\Phi(i) \inplus L:\ x_0 - x_n,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{n-1}$;

$\Omega(k) \ni L:\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$
$W(k+1,t) \ni L:\ x_0 - x_n,\ \mu(x;0,1,\ldots,k,n),\ x_{t+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$
$(\Phi(i) \oplus W(k+1,t)) \ni L:\ x_0 - x_n,\ x_{t+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$
$(\Omega(k) \oplus W(k+1,t)) \ni L:\ x_{t+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$
$(\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1,k+1}(j)) \ni L:\ x_0 - x_n,\ x_{k+j+1},\ \ldots,\ x_{n-1};$
$(\Phi(r) \oplus \Lambda_{r+1,k+1}(j) \oplus W(k+j+1,s)) \ni L:\ x_0 - x_n,\ x_{s+1},\ \ldots,\ x_{n-1}.$

Первая часть предложения 2.3 доказана в [10]. Вторая часть доказывается по той же схеме, что и предложение 1.1.

Предложение 2.4. *Пусть $L = V(1,k)$, $K = L \ni \langle J_{0n}\rangle$. Подпространства пространства $W(0,n)$, инвариантные относительно K, исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности подпространствами, инвариантными относительно L. Пусть U — пространство вида (2.1), $\hat{L} = U \ni L$, $\hat{K} = U \ni K$. Если из ПСИ алгебры $\hat{L}$ исключить инвариант $x_0 - x_n$ (при его наличии), то получим ПСИ алгебры $\hat{K}$.*

Лемма 2.1. *Полную систему инвариантов алгебры*

$$\langle P_0 + G_k + \alpha G_{k+1}, G_1, \ldots, G_{k-1}, P_1, \ldots, P_{k-1}, P_{k+1}, M\rangle$$

составляют функции

$$(x_0 - x_n)^2 - 2x_k,\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_{n-1} \quad (\alpha \geq 0).$$

Предложение 2.5. *Пусть L — подалгебра алгебры $\mathfrak{M}(1,n-1)$, обладающая ненулевой проекцией на $\langle P_0\rangle$, и $\pi_1(L) = V(1,a)$. Если $P_0 \in L$, то с точностью до $P(1,n)$-сопряженности, сохраняющей $\pi_1(L)$, имеем $\pi_2(L) = \Omega(b)$, где $b \geq a$. ПСИ алгебры L составляют $x_{b+1}, \ldots, x_{n-1}$.*

Если $P_0 \notin L$ и $a > 1$, то L сопряжена алгебра

$$L' = K \ni \langle P_0 + G_a + \sum_{i=a+1}^{t} \alpha_i G_i\rangle,$$

где K (как векторное пространство) — подпрямая сумма $\Phi(a-1) + \mu W(a) + \gamma W(a+1,s)$ $(\mu,\gamma \in \{0,1\})$ и $V(1,a-1)$, причем $\Phi(a-1) \subset K$ и $\sum \alpha_i P_i \in \pi_2(K)$ $(i = a+1,\ldots,t)$. ПСИ алгебры L' составляют такие функции: $x_{s+1},\ldots,x_{n-1}$ при $\mu = \gamma = 1$; $x_{a+1},\ldots,x_{n-1}$ при $\mu = 1$, $\gamma = 0$; $(x_0 - x_n)^2 - 2x_a, x_{s+1},\ldots,x_{n-1}$ при $\mu = 0$, $\gamma = 1$; $(x_0 - x_n)^2 - 2x_a, x_{a+1},\ldots,x_{n-1}$ при $\mu = \gamma = 0$.

Если $P_0 \notin L$ и $a = 1$, то L сопряжена одной из алгебр

$$N' = (\Phi(0) + \mu W(1) + \gamma W(2,s)) \ni \langle P_0 + G_1 + \alpha G_2\rangle,$$

где $\mu,\gamma \in \{0,1\}$, $\alpha P_2 \in N'$;

$$N'' = \langle P_0 + G_1\rangle + \gamma W(2,s), \quad \gamma \in \{0,1\}.$$

Если в ПСИ алгебры L' положить $a = 1$, то получим ПСИ алгебры N'. ПСИ алгебры N'' составляют функции $(x_0 - x_n)^2 - 2x_1, (x_0 - x_n)^3 - 3(x_0 - x_n)x_1 + 3x_n, x_2,\ldots,x_{n-1}$ при $\gamma = 0$; $(x_0 - x_n)^2 - 2x_1, (x_0 - x_n)^3 - 3(x_0 - x_n)x_1 + 3x_n, x_{s+1},\ldots,x_{n-1}$ при $\gamma = 1$.

Доказательство предложения 2.5 проводим на основании предложения 3.2 из [10].

Теперь найдем основные инварианты алгебры $L = \langle X_1, \dots X_m \rangle$, где

$$X_a = G_a + \sum_{j=1}^{m+t} \alpha_{aj} P_j \quad (a = 1, \dots, m).$$

Если L — коммутативная алгебра, то в силу теоремы 1.1 можно предполагать, что $\alpha_{aj} = 0$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$ и не равных a. В этом случае ПСИ алгебры L описывает предложение 1.3. Теперь допустим, что L — некоммутативная алгебра. Тогда $M \in L$ и $\operatorname{codim} L = n - m$. Очевидно, инвариантами L являются функции $x_0 - x_n, x_{m+t+1}, \dots, x_{n-1}$, их число равно $n - m - t$. Для нахождения недостающих t инвариантов от переменных $x_0 - x_n, x_1, \dots, x_{m+t}$ перейдем в системе дифференциальных уравнений, соответствующей алгебре L, к новым переменным $y_0 = x_0 - x_n$, $y_n = x_n$, $y_i = x_i$ $(i = 1, \dots, m + t)$. Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m+t} \beta_{aj} \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 \quad (a = 1, \dots, m), \\ &\frac{\partial f}{\partial y_n} = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\beta_{aj} = \alpha_{aj}$ при $a \neq j$, $\beta_{aa} = \alpha_{aa} + y_0$. Решение системы (2.2) ищем в виде:

$$f = \sum_{j=1}^{m+t} \lambda_j y_j. \tag{2.3}$$

Подставив f в систему (2.2), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m+t} \beta_{aj} \lambda_j = 0 \quad (a = 1, \dots, m). \tag{2.4}$$

Существуют такие значения y_0, для которых ранг матрицы системы (2.4) равен m. В этом случае система (2.4) имеет t линейно независимых решений. Соответствующие им функции вида (2.3) являются искомыми основными инвариантами алгебры L.

Если U — невырожденное подпространство пространства $W(0, n)$, то через $AO(U)$ обозначим алгебру Ли группы $O(U)$ изометрий пространства U, а через $AH(U)$ — картановскую подалгебру алгебры $AO(U)$. Если $U \subset W(1, n)$, то будем предполагать, что $AH(U) \subset AH(n)$.

Пусть $\hat{L}$ — расщепляемая разрешимая подалгебра алгебры $AP(1, n)$. Предложения 2.3, 2.4 описывают ПСИ алгебры $\hat{L}$ в случае, когда проекция L алгебры $\hat{L}$ на $AO(1, n)$ имеет вид $V(1, k)$ или $V(1, k) \niplus \langle J_{0n} \rangle$. Пусть L — вполне приводимая алгебра. В силу предложения 2.3 из [10] $L \subset AH(2l)$ $(1 \leq l \leq [n/2])$ или L — подпрямая сумма $L_1 \subset AH(2m)$ и $\langle J_{0n} \rangle$ $(1 \leq m \leq [n - 1/2])$. Подпространство U пространства $W(0, n)$, инвариантное относительно L, совпадает с $U_1 \oplus U_2$, где $U_1 = 0$ или $U_1 = W(1, 2r)$, а U_2 — одно из таких пространств: 0, $W(0)$, $\Phi(0)$, $\Omega(0)$, $W(s, t)$, $W(0) \oplus W(s, t)$, $\Phi(0) \oplus W(s, t)$, $\Omega(0) \oplus W(s, t)$. Если $U = \langle M \rangle \oplus U'$ — вырожденное пространство, то ПСИ алгебры $\hat{L} = U \niplus L$ составляют основные инварианты абелевой алгебры $L+AH(U')/AH(U')\oplus\langle M\rangle$ от переменных x_0-x_n, x_a, где $a=1,\ldots,n-1$ и $P_a\notin U'$. Если U — невырожденное пространство, то ПСИ алгебры L составляют основные инварианты абелевой алгебры $L+AH(U)/AH(U)$ от переменных x_a, где $a=0,1,\ldots,n$ и $P_a\notin U$.

Если речь идет о расщепляемых подалгебрах $U_1\supset\!\!\!\!+\, F_i, U_2\supset\!\!\!\!+\, F_i,\ldots,U_s\supset\!\!\!\!+\, F_i$ алгебры $U\supset\!\!\!\!+\, F$, то будем употреблять обозначение $F_{ij}=F_i:U_1,\ldots,U_s$ $(j=1,\ldots,s)$. Пусть $\tilde F_i$ — такая подалгебра алгебры $U\supset\!\!\!\!+\, F$, что ее проекция на F совпадает с F_i. Запись $\tilde F_i+U_j$ означает, что $U_j\subset U$, $[F_i,U_j]\subset U_j$ и $\tilde F_i\cap U\subset U_j$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\tilde F_i+U_1,\ldots,\tilde F_i+U_s$, то будем употреблять обозначение $\tilde F_{ij}=\tilde F_i:U_1,\ldots,U_s$ $(j=1,\ldots,s)$.

Предложение 2.6. *Пусть*

$$G_a=J_{0a}-J_{a5}\ (a=1,2,3,4),\quad A\tilde E(4)=V(1,4)\supset\!\!\!\!+\,(AO(4)\oplus\langle J_{05}\rangle).$$

Подалгебры алгебры $A\tilde E(4)$ исчерпываются относительно $O(1,5)$-сопряженности такими алгебрами:

$L_{0j}=\langle O\rangle:\ O,\ V(1),\ V(1,2),\ V(1,3),\ V(1,4),\ (j=1,\ldots,5);$
$L_{1j}=\langle J_{12}\rangle:\ O,\ V(3),\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,3),\ V(1,4)\ (j=1,\ldots,6);$
$\tilde L_{1j}=\langle J_{12}+G_3\rangle:O,\ V(4),\ V(1,2),\ V(1,2)\oplus V(4)\ (j=1,\ldots,4);$
$L_{2j}=\langle J_{12}+J_{34}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(,1,4)\ (j=1,2,3);$
$L_{3j}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(3,4),V(1,4)\ (0<\alpha<1;\ j=1,\ldots,4);$
$L_{4j}=\langle J_{05}\rangle:\ O,\ V(1),\ V(1,2),\ V(1,3),\ V(1,4)\ (j=1,\ldots,5);$
$L_{5j}=\langle J_{12}+\beta J_{05}\rangle:\ O,\ V(3),\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,3),\ V(1,4)$
$(\beta>0;\ j=1,\ldots,6);$
$L_{6j}=\langle J_{12}+J_{34}+\alpha J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(1,4)\ (\alpha>0;\ j=1,2,3);$
$L_{7j}=\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,4)$
$(0<\alpha<1;\ \beta>0;\ j=1,2,3,4);$
$L_{8j}=\langle J_{12},J_{34}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(1,4)\ (j=1,2,3);$
$L_{9j}=\langle J_{12},J_{05}\rangle:\ O,\ V(3),\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,3),\ V(1,4)\ (j=1,\ldots,6);$
$L_{10j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(1,4)\ (j=1,2,3);$
$L_{11j}=\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,4)\ (0<\alpha<1;\ j=1,2,3,4);$
$L_{12j}=\langle J_{12}+\alpha J_{05},J_{34}+\beta J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(3,4),\ V(1,4)$
$(\alpha>0;\ \beta\ge 0;\ \alpha>\beta;\ j=1,2,3,4);$
$L'_{12j}=\langle J_{12}+\alpha J_{05},J_{34}+\alpha J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(1,4)\ (\alpha>0;\ j=1,2,3);$
$L_{13j}=\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle:\ O,\ V(4),\ V(1,3),\ V(1,4)\ (j=1,2,3,4);$
$L_{14j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle:\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2);$
$L_{15j}=\langle J_{12},J_{34},J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,2),\ V(1,4)\ (j=1,2,3);$
$L_{16j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle\oplus\langle J_{12}-J_{34}\rangle:\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2);$
$L_{17j}=\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{05}\rangle:\ O,\ V(4),\ V(1,3),\ V(1,4)\ (j=1,\ldots,4);$
$L_{18j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14},J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2);$
$L_{19j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle\oplus\langle J_{12}-J_{34}+\alpha J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,4)$
$(\alpha\neq 0;\ j=1,2);$
$L_{20j}=\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle\oplus\langle J_{12}-J_{34},J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2);$
$L_{21j}=AO(4):\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2);$
$L_{22j}=AO(4)\oplus\langle J_{05}\rangle:\ O,\ V(1,4)\ (j=1,2).$

Предложение 2.6 вытекает из леммы 3.4 [10] и теоремы 3 [11].

Предложение 2.7. *Пусть L — одна из алгебр, выписанных в предложении 2.6. ПСИ алгебры L в пространстве $M(1,5)$ составляют следующие функции:*

$L_{4,5}$, $L_{5,6}$, $L_{6,3}$, $L_{7,4}$, $L_{9,6}$, $L_{10,3}$, $L_{11,4}$, $L_{12,4}$, $L_{15,3}$, $L_{17,4}$, $L_{18,2}$, $L_{19,2}$, $L_{20,2}$, $L_{22,2}$: $\mu(x;0,1,\ldots,5)$;

$L_{0,5}$, $L_{1,6}$, $\tilde{L}_{1,4}$, $L_{2,3}$, $L_{3,4}$, $L_{8,3}$, $L_{13,4}$, $L_{14,2}$, $L_{16,2}$, $L_{21,2}$: x_0-x_5, $\mu(x;0,1,\ldots,5)$;

$L_{4,4}$, $L_{5,5}$, $L_{9,5}$, $L_{17,3}$: $\mu(x;0,1,2,3,5)$, x_4;

$L_{9,4}$, $L_{11,3}$, $L_{12,3}$ $(\beta>0)$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5)$;

$L_{10,2}$, $L_{11,2}$, $L_{12,2}$, $L_{15,2}$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5)$;

$L_{17,2}$: $h(x;1,2,3)$, $\mu(x;0,4,5)$;

$L_{18,1}$, $L_{19,1}$, $L_{20,1}$, $L_{22,1}$: $h(x;1,2,3,4)$, $\mu(x;0,5)$;

$L_{0,4}$, $L_{1,5}$, $L_{13,3}$: x_0-x_5, x_4, $\mu(x;0,1,2,3,5)$;

$\tilde{L}_{1,3}$: x_0-x_5, $\mu(x;0,1,2,3,5)$, x_4;

$L_{2,2}$, $L_{3,2}$, $L_{8,2}$: $\mu(x;0,1,2,5)$, x_0-x_5, $\varphi(2,x)$;

$L_{4,3}$, $L_{5,3}$, $L_{9,3}$: $\mu(x;0,1,2,5)$, x_3, x_4;

$L_{5,4}$, $L_{7,3}$: $\mu(x;0,3,4,5)$, $\varphi(1,x)$, $\beta\psi(1,x)-\ln(x_0-x_5)$;

$L_{12,3}$ $(\beta=0)$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5)$, $\alpha\psi(1,x)-\ln(x_0-x_5)$;

$L_{6,2}$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5)$, $\alpha\psi(2,x)-\ln(x_0-x_5)$;

$L_{7,2}$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5)$, $\beta\psi(2,x)-\alpha\ln(x_0-x_5)$;

$L_{9,2}$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,5)$, x_4;

$L_{13,2}$: x_0-x_5, $h(x;1,2,3)$, $\mu(x;0,4,5)$;

$L_{14,1}$, $L_{16,1}$, $L_{21,1}$: $h(x;1,2,3,4)$, x_0, x_5;

$L_{15,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5)$;

$L_{17,1}$: $h(x;1,2,3)$, $\mu(x;0,5)$, x_4;

$L_{0,3}$, $L_{1,3}$: x_0-x_5, $\mu(x;0,1,2,5)$, x_3, x_4;

$L_{1,2}$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_5, $\mu(x;0,3,5)$, x_4;

$\tilde{L}_{1,2}$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_5, $\mu(x;0,3,4,5)$, $(x_0-x_5)\psi(1,x)+x_3$;

$L_{4,2}$: $\mu(x;0,1,5)$, x_2, x_3, x_4;

$L_{5,2}$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,5)$, x_4, $\beta\psi(1,x)-\ln(x_0-x_5)$;

$L_{8,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, x_0, x_5;

$L_{9,1}$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,5)$, x_3, x_4;

$L_{10,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\mu(x;0,5)$;

$L_{11,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\mu(x;0,5)$;

$L_{12,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5)$, $\alpha\psi(1,x)+\beta\psi(2,x)-\ln(x_0-x_5)$;

$L_{13,1}$: $h(x;1,2,3)$, x_0, x_4, x_5;

$L_{0,2}$: x_0-x_5, $\mu(x;0,1,5)$, x_2, x_3, x_4;

$L_{1,1}$: $\varphi(1,x)$, x_0, x_3, x_4, x_5;

$\tilde{L}_{1,1}$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_5, $\mu(x;0,3,5)$, x_4, $(x_0-x_5)\psi(1,x)+x_3$;

$L_{2,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\psi(1,x)-\psi(2,x)$, x_0, x_5;

$L_{3,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, x_0, x_5;

$L_{4,1}$: $\mu(x;0,5)$, x_1, x_2, x_3, x_4;

$L_{5,1}$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,5)$, $\beta\psi(1,x)+\ln(x_0+x_5)$, x_3, x_4;

$L_{6,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5)$, $\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\alpha\psi(1,x)+\ln(x_0+x_5)$;

$L_{7,1}$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\beta\psi(1,x)+\ln(x_0+x_5)$.

Предложение 2.8. *Пусть* $G_a=J_{0a}-J_{a6}$ $(a=1,\ldots,5)$, $A\tilde{E}(5)=V(1,5)\supset\!\!\!+(AO(5)\oplus\langle J_{06}\rangle)$. *Подалгебры алгебры* $A\tilde{E}(5)$ *исчерпываются относительно*

$O(1,6)$-сопряженности подалгебрами алгебры $A\tilde{E}(4) = V(1,4) \niplus (AO(4) \oplus \langle J_{06}\rangle)$ и такими алгебрами:

$V(1,5)$, $V(1,5) \niplus \langle J_{06}\rangle$; $\langle J_{12}\rangle$: $V(3,5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+G_5\rangle$: $V(3,4)$, $V(1,4)$; $\langle J_{12}+\alpha J_{06}\rangle$: $V(3,5)$, $V(1,5)$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(1,5)$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(3,5)$, $V(1,5)$ $(0<\alpha<1,\ \beta\geq 0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}+G_5\rangle$: O, $V(1,2)$, $V(1,4)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+G_5\rangle$: O, $V(1,2)$, $V(3,4)$, $V(1,4)$ $(0<\alpha<1)$;
$\langle J_{12},J_{06}\rangle$: $V(3,5)$, $V(1,5)$; $\langle J_{12}+G_5, J_{34}+G_5\rangle$: O, $V(1,2)$, $V(1,4)$;
$\langle J_{12}+J_{34},J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(3,5)$, $V(1,5)$ $(0<\alpha<1)$;
$\langle J_{12},J_{34}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{06}, J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(3,5)$, $V(1,5)$ $(\alpha>0,\ \beta\geq 0,\ \alpha>\beta)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{06}, J_{34}+\alpha J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(1,5)$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{12}+G_5, J_{34}+\alpha G_5\rangle$: $V(1,2)$, $V(3,4)$, $V(1,4)$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha\neq 1)$;
$\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: $V(4,5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12},J_{34},J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,2)\oplus V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}\rangle$: $V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45}, J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle$: O, $V(1,5)$;
$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{06}\rangle$: $V(4,5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45}, J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}, J_{06}\rangle$: O, $V(1,5)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{12}-J_{34}+\alpha J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,5)$ $(\alpha\in R)$;
$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{45}+\alpha J_{06}\rangle$: O, $V(4,5)$, $V(1,3)$, $V(1,5)$ $(\alpha\geq 0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{12}-J_{34}+G_5\rangle$: O, $V(1,4)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{14}+J_{23}, J_{12}-J_{34}, J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,5)$;
$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{45},J_{06}\rangle$: O, $V(4,5)$, $V(1,3)$, $V(1,5)$;
$AO(4)$: $V(5)$, $V(1,5)$; $AO(4)\oplus\langle J_{06}\rangle$: $V(5)$, $V(1,5)$;
$AO(5)\rangle$: O, $V(1,5)$; $AO(5)\oplus\langle J_{06}\rangle$: O, $V(1,5)$.

Предложение 2.8 доказывается на основании теоремы 3 из [11] и леммы 3.4 из [10].

Предложение 2.8 описывает все те подалгебры алгебры $AO(1,6)$, которые оставляют неизменным изотропное подпространство $\langle P_0+P_6\rangle$ пространства $M(1,6)$. Остальные подалгебры алгебры $AO(1,6)$ исчерпываются относительно $O(1,6)$-сопряженности подалгебрами алгебры $AO(6)$, несопряженными подалгебрам алгебры $AO(5)$, неприводимыми подалгебрами алгебр $AO(1,5)$ и $AO(1,6)$, а также такими алгебрами: $AO(1,2)\oplus L_1$, $L_1\subset AO(4)$; $AO(1,3)\oplus L_2$, $L_2\subset AO(3)$; $AO(1,4)\oplus L_3$, $L_3\subset AO(2)$.

Предложение 2.9. *Пусть L пробегает множество представителей классов сопряженных разрешимых подалгебр алгебры $AO(1,6)$, не содержащих подалгебры алгебры $A\tilde{E}(4)$. ПСИ алгебры L образуют следующие функции:*

$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{56}\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2,3)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\beta\psi(1,x)-\psi(3,x)$, x_0, $(0<\alpha\leq\beta\leq 1)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{56}, J_{34}+\beta J_{56}\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2,3)$, x_0, $\alpha\psi(1,x)+\beta\psi(2,x)-\psi(3,x)$ $(0\leq\beta\leq\alpha\leq 1;\ \alpha>0)$;
$\langle J_{12},J_{34},J_{56}\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2,3)$, x_0;

$V(1,5)$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$; $V(1,5)\niplus\langle J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$;
$V(3,5)\oplus\langle J_{12}\rangle$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,3,4,5,6)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$;
$V(3,4)\niplus\langle J_{12}+G_5\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$, x_0-x_6, $(x_0-x_6)\psi(1,x)+x_5$;
$V(1,4)\niplus\langle J_{12}+G_5\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{06}\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$, $\alpha\psi(1,x)-\ln(x_0-x_6)$ $(\alpha>0)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$ $(\alpha>0)$;
$V(5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, x_0-x_6, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\mu(x;0,5,6)$ $(0<\alpha\le 0)$;
$(V(1,2)\oplus V(5))\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: $\varphi(2,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,1,2,5,6)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,3,4,5,6)$ $(0<\alpha<1)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34}+G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, x_0-x_6, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\mu(x;0,5,6)$, $(x_0-x_6)\psi(1,x)+x_5$ $(0<\alpha\le 1)$;
$V(1,2)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}+G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,1,2,5,6)$, $(x_0-x_6)\psi(2,x)+\alpha x_5$ $(0<\alpha\le 1)$;
$V(3,4)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}+G_5\rangle$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,3,4,5,6)$, $(x_0-x_6)\psi(1,x)+x_5$ $(0<\alpha<1)$;
$V(1,4)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}+G_5\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$\langle G_5,J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$, $\mu(x;0,5,6)$, $\beta\psi(1,x)-\ln(x_0-x_6)$ $(0<\alpha\le 1;\ \beta>0)$;
$\langle G_1,G_2,G_5,J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,1,2,5,6)$, $\varphi(2,x)$, $\beta\psi(2,x)-\alpha\ln(x_0-x_6)$ $(0<\alpha\le 1;\ \beta>0)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,3,4,5,6)$, $\varphi(1,x)$, $\beta\psi(1,x)-\ln(x_0-x_6)$ $(0<\alpha<1;\ \beta>0)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$ $(0<\alpha\le 1;\ \beta>0)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12},J_{06}\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$; $V(1,5)\niplus\langle J_{12},J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{06},G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5,6)$, $\alpha\psi(1,x)-\psi(2,x)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{06},G_1,G_2,G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5,6)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{06}\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$ $(0<\alpha<1)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{34},J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$ $(0<\alpha\le 1)$;
$\langle J_{12},J_{34},G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,5,6)$;
$\langle J_{12},J_{34},G_1,G_2,G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,1,2,5,6)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12},J_{34}\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{06},J_{34}+\beta J_{06},G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5,6)$, $\alpha\psi(1,x)+\beta\psi(2,x)-\ln(x_0-x_6)$ $(\alpha>0,\ \beta\ge 0)$;
$\langle J_{12}+\alpha J_{06},J_{34}+\beta J_{06},G_1,G_2,G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5,6)$ $(\alpha>0,\ \beta\ge 0)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{06},J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$ $(\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha>\beta)$;
$V(3,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{06},J_{34}\rangle$: $\varphi(1,x)$, $\alpha\psi(1,x)-\ln(x_0-x_6)$, $\mu(x;0,3,4,5,6)$ $(\alpha>0)$;
$V(1,5)\niplus\langle J_{12}+\alpha J_{06},J_{34}+\beta J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$ $(\alpha>0,\ \beta\ge 0)$;
$\langle J_{12}+G_5,J_{34}+\alpha G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$, $(a=1,2)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,5,6)$, $(x_0-x_6)(\psi(1,x)+\alpha\psi(2,x))+x_5$ $(\alpha\ge 0)$;
$V(1,2)\niplus\langle J_{12}+G_5,J_{34}+\alpha G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,1,2,5,6)$ $(\alpha\ge 0)$;
$V(3,4)\niplus\langle J_{12}+G_5,J_{34}+\alpha G_5\rangle$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,3,4,5,6)$ $(\alpha>0,\ \alpha\ne 1)$;
$V(3,4)\niplus\langle J_{12}+G_5,J_{34}\rangle$: $\varphi(1,x)$, x_0-x_6, $\mu(x;0,3,4,5,6)$, $(x_0-x_6)\psi(1,x)+x_5$;
$V(1,4)\niplus\langle J_{12}+G_5,J_{34}+\alpha G_5\rangle$: x_0-x_6, $\mu(x;0,\dots,6)$ $(\alpha\ge 0)$;
$\langle J_{12},J_{34},J_{06},G_5\rangle$: $\varphi(a,x)$ $(a=1,2)$, $\mu(x;0,5,6)$;

$\langle J_{12}, J_{34}, J_{06}, G_1, G_2, G_5\rangle$: $\varphi(2,x)$, $\mu(x;0,1,2,5,6)$;
$V(1,5) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{12}, J_{34}, J_{06}\rangle$: $\mu(x;0,\dots,6)$.

§ 3. Теоремы о редукции

Пусть $\hat{F}$ — подалгебра $AP(1,n)$, Q — фактор Леви алгебры $\pi(\hat{F})$. В силу леммы Уайтхеда предполагаем, что $Q \subset \hat{F}$. В дальнейшем условие $J_{0n} \notin \hat{F}$ будет означать, что J_{0n} не содержится ни в одной из алгебр, сопряженных алгебре $\hat{F}$. Аналогично мы понимаем условие $P_0 \notin \hat{F}$. Будем также предполагать, что каждая рассматриваемая ненулевая подалгебра алгебры $AO(n)$ является подпрямой суммой своих неприводимых частей [11]. Это же предполагается и относительно подалгебр алгебры $AO(1,n)$, не имеющих в $W(0,n)$ инвариантных изотропных подпространств [10].

Теорема 3.1. *Пусть $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $AP(1,n)$, что $\pi(\hat{F})$ не имеет в $W(0,n)$ инвариантных изотропных подпространств. Тогда $\hat{F}$ сопряжена $\hat{F}' = U \subset\!\!\!\!+ L$, где $L \cap W(0,n) = 0$, а U совпадает с одним из пространств: O, $W(0,k)$, $W(1,k)$. ПСИ алгебры $\hat{F}'$ составляют основные инварианты алгебры $\hat{F}' + AO(U)/U + AO(U)$ от переменных x_a, где a принимает такие значения, что $P_a \notin U$.*

Доказательство. Пусть $U = \hat{F} \cap W(0,n)$. По теореме Витта можно предполагать, что U совпадает с одним из пространств, записанных в формулировке теоремы. В [10] установлено, что если K — вполне приводимая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства V над полем R, V' — неприводимый K-подмодуль модуля V и $KV' \neq 0$, то алгебра K обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $V' \subset\!\!\!\!+ K$. В силу этого $\hat{F} \subset\!\!\!\!+ L$, где L — подпрямая сумма $\pi(\hat{F})$ и $\Omega \subset W(0,n)$, причем $[\pi(\hat{F}), \Omega] = 0$. Если $f(x)$ — инвариант $\hat{F}$ и $P_i \in U$, то $\partial_i f = 0$. Значит, $f(x)$ не зависит от x_i. Это и заканчивает доказательство теоремы.

Если $f(x)$ — инвариант алгебры $L \subset AP(1,n)$, то L будем называть алгеброй инвариантности функции $f(x)$.

Следствие. *Пусть $\hat{F} = U \subset\!\!\!\!+ L$ — алгебра, введенная в теореме 3.1. Если* $\operatorname{codim} \hat{F} = 1$, *то с точностью до $P(1,n)$-сопряженности инвариантом алгебры $\hat{F}$ является одна из следующих функций: x_0, x_n, $\mu(x;0,\dots,m)$, $h(x;1,\dots,m)$ $(m = 2,\dots,n)$. Максимальной алгеброй инвариантности для функции x_0 является алгебра $AE(n)$; для x_n — $AP(1,n-1)$; для $\mu(x;0,\dots,m)$ — $AO(1,m) \oplus (W(m+1,n) \subset\!\!\!\!+ AO(m+1 \uparrow n))$ $(m < n)$; для $\mu(x;0,\dots,n)$ — $AO(1,n)$; для $h(x;1,\dots,m)$ — $AO(m) \oplus (W(0) \oplus W(m+1,n) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{ab} \mid a,b = 0, m+1,\dots,n\rangle)$ $(m < n)$; для $h(x;1,\dots,n)$ — $AO(n) \oplus \langle P_0\rangle$.*

Теорема 3.2. *Пусть L — подалгебра алгебры $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}\rangle$, обладающая ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$. С точностью до $P(1,n)$-сопряженности $\pi_1(L) \subset L$, и выполняется одно из условий:*

1) проекции L на $\langle P_0\rangle$ и $\langle M\rangle$ суть нулевые;

2) $P_0, M \in L$;

3) $M \in L$ и проекция L на $\langle P_0\rangle$ равна 0.

Если проекции L на $\langle P_0\rangle$ суть нулевые, то L — подпрямая сумма алгебр L_1 и L_2, удовлетворяющих одному из следующих условий: $L_1 = 0$, L_2 — подалгебра алгебры $V(1,n-1) \subset\!\!\!\!+ (\langle J_{0n}\rangle \oplus AO(n-1))$; L_1 — подалгебра $W(1,n-1) \subset\!\!\!\!+ AO(n-1)$, $L_2 = \langle J_{0n}\rangle$; L_1 — подалгебра $W(1,k) \subset\!\!\!\!+ AO(k)$, L_2 — подалгебра $V(k+1,n-1) \subset\!\!\!\!+$

$(\langle J_{0n}\rangle \oplus AO(k+1\uparrow n-1))$ $(1\leq k\leq n-2)$. *Пусть* $U=W(1,m)=L\cap W(1,k)$. *ПСИ алгебры* $\Gamma=L+AO(m)/AO(m)+U$ *от переменных* $x_0,x_{m+1},\dots,x_n$ *является также полной системой инвариантов алгебры* L. *Алгебра* Γ *сопряжена алгебре* $T=V\subset\!\!\!+ F$, *где* $V=0$ *или* $V=V(k+1,l)$, *а* F *— подпрямая сумма* $F_1\subset W(m+1,k)\subset\!\!\!+ AO(m+1\uparrow k)$, $F_2\subset AO(k+1\uparrow d)$ *и* $\langle J_{0n}\rangle$.

Если $J_{0n}\in F$ *и* $V\neq 0$, *то ПСИ алгебры* T *от переменных* $x_0,x_{m+1},\dots,x_n$ *составляют* $\mu(x;0,k+1,\dots,n)$ *и основные инварианты от переменных* $x_{m+1},\dots,x_k,x_{l+1},\dots,x_{n-1}$ *алгебры* $T+AO(k+1\uparrow l)/AO(k+1\uparrow l)+\langle J_{0n}\rangle+V$.

Если $J_{0n}\notin F$ *и* $V\neq 0$, *то ПСИ алгебры* T *составляют* $\mu(x;0,k+1,\dots,n)$ *и ПСИ алгебры* $T+AO(k+1\uparrow l)/AO(k+1\uparrow l)+V$ *от переменных* $x_0-x_n,x_{m+1},\dots,x_k,x_{l+1},\dots,x_{n-1}$.

Если $P_0,M\in L$, $\pi_2(L\cap\mathfrak{M}(1,n-1))=\Omega(k)$, *то полной системой инвариантов алгебры* L *является ПСИ алгебры* $L+AO(k)+\langle J_{0n}\rangle+\mathfrak{M}(1,k)/AO(k)+\langle J_{0n}\rangle+\mathfrak{M}(1,k)$ *от переменных* $x_{k+1},\dots,x_{n-1}$.

Пусть $M\in L$ *и проекция* L *на* $\langle P_0\rangle$ *равна* 0. *Если* $[P_0,L\cap\mathfrak{M}(1,n-1)]+\pi_2(L\cap\mathfrak{M}(1,n-1))=\Phi(k)$, *то при* $J_{0n}\in L$ *полную систему инвариантов алгебры* L *составляют основные инварианты алгебры* $L+AO(k)+\overline{\mathfrak{M}}(1,k)/AO(k)+\langle J_{0n}\rangle+\overline{\mathfrak{M}}(1,k)$ *от переменных* $x_{k+1},\dots,x_{n-1}$, *а при* $J_{0n}\notin L$ *— основные инварианты алгебры* $L+AO(k)+\overline{\mathfrak{M}}(1,k)/AO(k)+\overline{\mathfrak{M}}(1,k)$ *от переменных* $x_0-x_n,x_{k+1},\dots,x_{n-1}$.

Доказательство. Любая подалгебра алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ с ненулевой проекцией на $\langle J_{0n}\rangle$ действует вполне приводимо на пространстве $\Omega=\langle M,P_0-P_n,G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$ и аннулирует в Ω только нулевое подпространство. Отсюда в силу предложения 1.1 [10] получаем, что проекция алгебры L на Ω принадлежит L. В силу теоремы 3.1 [10] можно предполагать, что $\pi_1(L)=V(s,t)$. Так как $[J_{0n},M]=-M$, $[J_{0n},G_a]=-G_a$, $[J_{0n},P_0-P_n]=P_0-P_n$, то проекция L на Ω разлагается в сумму проекций на $\Omega_1=\langle M,G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$ и на $\Omega_2=\langle P_0-P_n\rangle$. Если $G_a\in\pi_1(L)$, $P_0-P_n\in L$, то $P_a,M\in L$, а потому $P_0,M,P_a,G_a\in L$. Если $\pi_1(L)=0$ и $P_0-P_n\in L$, то, применяя $O(1,n)$-автоморфизм алгебры $AP(1,n)$, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} E_n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

получаем, что $M\in L$.

Теперь рассмотрим случай, когда проекция L на Ω_2 является нулевой. Пусть τ — проектирование $A\tilde{G}(n-1)\subset\!\!\!+\langle J_{0n}\rangle$ на $AO(n-1)$. Если $G_a+\gamma M\in\Omega_1$ и $[P_a,\tau(L)]=0$, то, применяя автоморфизм $\exp(\theta P_a)$, получаем, что $G_a\in L$. Если $[P_a,\tau(L)]\neq 0$, то G_a принадлежит $[L,G_a+\gamma M]\subset L$. Следовательно, $M\in L$ или проекция L на $\langle M\rangle$ является нулевой.

Пусть $\Delta=V(k+1,l)\subset\!\!\!+ K$, где K — подпрямая сумма $\langle J_{0n}\rangle$ и подалгебра алгебры $AO(k+1\uparrow l)$. Так как ранг $\Delta\geq l-k+1$, то ПСИ алгебры Δ от переменных $x_0,x_{k+1},\dots,x_l,x_n$ состоит из одной функции $\mu(x;0,k+1,\dots,l,n)$. Отсюда и из предложений 1.6, 1,8 вытекают утверждения теоремы об инвариантах алгебры T. Доказательства остальных утверждений аналогичны. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* L *— подалгебра алгебры* $A\tilde{G}(n-1)\subset\!\!\!+\langle J_{0n}\rangle$, *обладающая ненулевой проекцией на* $\langle J_{0n}\rangle$. *Если* $\operatorname{codim} L=1$, *то с точностью до* $P(1,n)$-

сопряженности инвариантом алгебры L является одна из функций: $\mu(x;0,n)$, $\mu(x;0,\ldots,m,n)$, $h(x;1,\ldots,m)$ $(m=1,\ldots,n-1)$, $\alpha\ln(x_0-x_n)+x_{n-1}$.

Максимальной алгеброй инвариантности в $A\tilde{G}(n-1)\dashv\!\!\!\supset\langle J_{0n}\rangle$ *для функции* $\mu(x;0,n)$ *является алгебра* $AE(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$*; для* $\mu(x;0,\ldots,m,n)$ $(m<n-1)$ — $V(1,m)\dashv\!\!\!\supset(AO(m)\oplus\langle J_{0n}\rangle))\oplus(W(m+1,n-1)\dashv\!\!\!\supset AO(m+1\uparrow n-1))$*; для* $h(x;1,\ldots,m)$ $(m<n-1)$ — $AO(m)\oplus\mathfrak{M}(m+1,n-1)\dashv\!\!\!\supset(AO(m+1\uparrow n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$*; для* $\alpha\ln(x_0-x_n)+x_{n-1}$ — $A\tilde{G}(n-2)\dashv\!\!\!\supset\langle J_{0n}+\alpha P_{n-1}\rangle$.

Доказательство. Пусть $M\in L$ и проекция L на $\langle P_0\rangle$ равна 0. При $J_{0n}\in L$ инвариантом алгебры L (с точностью до $P(1,n)$-сопряженности) является функция $h(x;1,\ldots,m)$ $(1\le m\le n-1)$. Если $J_{0n}\notin L$ и инвариант отличен от $h(x;1,\ldots,m)$, то согласно теореме 3.2 можно предполагать, что $L=\langle J_{0n}+\alpha P_{n-1},M\rangle$ $(\alpha>0)$. Инвариантом этой алгебры является функция $\alpha\ln(x_0-x_n)+x_{n-1}$.

В остальных случаях инвариантом алгебры L будет одна из функций: $\mu(x;0,n)$, $\mu(x;0,\ldots,m,n)$, $h(x;1,\ldots,m)$ $(m=1,\ldots,n-1)$. Следствие доказано.

Теорема 3.3. *Пусть* $\hat{F}$ *— подалгебра алгебры* $A\tilde{G}(n-1)$*, обладающая ненулевыми проекциями на* $AO(n-1)$ *и на* $\langle P_0\rangle$*. Тогда* $\hat{F}$ *сопряжена* $U+L$*, где* L *— подпрямая сумма алгебр* L_1 *и* L_2*, содержащихся в* $AO(k)$ *и* $\mathfrak{M}(k+1,n-1)$*, соответственно.* U *— подпространство пространства* $\mathfrak{M}(1,k)$*,* $[L_1,U]=U$*,* $[P_0,U]\subset U$*; при этом, если* $U\ne 0$*, то* $\pi_2(U)=W(1,d)$*.*

Если $U\ne 0$ *и* $\pi_1(U)=0$*, то ПСИ алгебры* $\hat{F}$ *составляют основные инварианты алгебры* $\hat{F}+AO(d)/U+AO(d)$ *от переменных* $x_0,x_{d+1},\ldots,x_n$*, а если* $\pi_1(U)\ne 0$*, то ПСИ алгебры* $\hat{F}$ *составляют основные инварианты алгебры* $\hat{F}+AO(d)/U+\langle M\rangle+AO(d)$ *от переменных* $x_0-x_n,x_{d+1},\ldots,x_{n-1}$*.*

Доказательство. На основании теоремы 2.3, леммы 3.1 из [12] и теоремы 3.1 из [10] алгебра $\hat{F}$ сопряжена $U+L$, где L — подпрямая сумма $L_1\subset AO(k)$ и $L_2\subset\mathfrak{M}(k+1,n-1)$, а $U\subset\mathfrak{M}(1,k)$ и $[L_1,U]=U$, $[P_0,U]\subset U$. Если $U\ne 0$, то в силу теоремы 3.1 [10] можно предполагать, что $\pi_2(U)=W(1,d)$. Поскольку $[P_0,U]\subset U$, то для любого инварианта $f(x)$ алгебры $U+L$ имеем $\partial_i f(x)=0$ для всех $i=1,\ldots,d$. Поэтому $f(x)$ не зависит от $x_1,\ldots,x_d$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* L *— подалгебра алгебры* $A\tilde{G}(n-1)$*, обладающая ненулевой проекцией на* $\langle P_0\rangle$*. Если* $\operatorname{codim} L=1$*, то с точностью до* $P(1,n)$*-сопряженности инвариантом алгебры* L *является одна из следующих функций:* $h(x;1,\ldots,m)$ $(m=1,\ldots,n-1)$, $(x_0-x_n)^2-2x_{n-1}$.

Максимальной алгеброй инвариантности в $A\tilde{G}(n-1)$ *для функции* $h(x;1,\ldots,m)$ *является алгебра* $AO(m)\oplus(\mathfrak{M}(m+1,n-1)\dashv\!\!\!\supset AO(m+1\uparrow n-1))$, $m<n-1$*, а для функции* $(x_0-x_n)^2-2x_{n-1}$ *— алгебра* $\overline{\mathfrak{M}}(1,n-2)\dashv\!\!\!\supset(AO(n-2)\oplus\langle P_0+G_{n-1}\rangle)$.

Доказательство. Если функция $h(x;1,\ldots,m)$ не является инвариантом алгебры L, то на основании предложения 2.5 и теоремы 3.3 можно допускать, что $L=\langle M,P_0+G_{n-1},P_2,\ldots,P_{n-2}\rangle$. Отсюда вытекает, что инвариантом алгебры L является функция $(x_0-x_n)^2-2x_{n-1}$. Следствие доказано.

Предложение 3.1. *Функция* x_0-x_n *является инвариантом каждой подалгебры алгебры* $A\tilde{G}(n-1)$*, имеющей нулевую проекцию на* $\langle P_0\rangle$*. Максимальная алгебра инвариантности для функции* x_0-x_n *в* $A\tilde{G}(n-1)$ *совпадает с* $\overline{\mathfrak{M}}(1,n-1)\dashv\!\!\!\supset AO(n-1)$*.*

1. Гурса Е., Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку, К., Рад. шк., 1941, 415 с.
2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн. Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
3. Фущич В.И., Серов Н.И., О точных решениях уравнения Борна–Инфельда, *Докл. АН СССР*, 1981, **263**, № 3, 582–586.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact colutions of the relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, 498–502.
5. Фущич В.И., Штелень В.И., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 271–277.
7. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, 3645–3646.
8. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, 791–806.
9. Фущич В.И., Серова М.М., О точных решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея, В кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 24–54.
10. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$, Препринт № 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
11. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, **38**, 67–72.
12. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт № 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.