Операторы Казимира для обобщенных групп Пуанкаре и группы Галилея

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

1. Введение

Изучение полиномиальных операторов Казимира группы Ли сводится к описанию инвариантов присоединенной группы [1]. Хорошо известны такие инварианты для однородных классических групп Ли [2]. Операторы Казимира и их спектры группы Пуанкаре $P(1,4)$ найдены в работах [3, 4]. Эта же задача решена для группы $ISL(6,C)$ [5] и для группы $IU(n)$ с различными подгруппами трансляций [6]. Обобщенные операторы Казимира (рациональные, трансцендентные) для подгрупп группы $P(1,3)$ найдены в [7], а для подгрупп оптической группы $Opt(1,3)$ в [8]. Изучению обобщенных операторов Казимира неоднородных групп произвольной размерности посвящена серия работ [9, 10]. В [11] дано описание инвариантов присоединенной группы для многих неоднородных классических групп.

В нашей работе найдены в явном виде максимальные системы алгебраически независимых полиномиальных операторов Казимира (основные операторы) обобщенных групп Пуанкаре $P(p,q)$, группы Галилея $G(n)$ и расширенной группы Галилея $\tilde{G}(n)$.

2. Операторы Казимира обобщенных групп Пуанкаре

Алгебра Пуанкаре $AP(p,q)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}&[J_{ab},J_{cd}]=g_{ad}J_{bc}+g_{bc}J_{ad}-g_{ac}J_{bd}-g_{bd}J_{ac},\\&[P_a,J_{bc}]=g_{ab}P_c-g_{ac}P_b,\quad J_{ba}=-J_{ab},\quad [P_a,P_b]=0,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$g=\mathrm{diag}\,\{\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}\}\quad (a,b,c,d=1,2,\ldots,n;\ n=p+q).$$

Пусть $\varepsilon_{a_1a_2\ldots a_n}$ — полностью антисимметрический тензор ранга n с условием $\varepsilon_{12\ldots n}=1$,

$$g^{ab}=\delta^{ak}\delta^{bl}g_{kl},\quad J^{ab}=\delta^{ak}\delta^{bl}J_{kl},\quad P^a=\delta^{ak}P_k.$$

Полагаем

$$\begin{aligned}&W_{a_1\ldots a_{n-1}}=\varepsilon_{a_1\ldots a_n}P^{a_n},\\&W_{a_1\ldots a_r}=W_{a_1\ldots a_r a_{r+1}a_{r+2}}J^{a_{r+1}a_{r+2}}\quad (r\le n-3),\\&W=W_{a_1a_2}J^{a_1a_2}\qquad \text{при нечетном } n.\end{aligned}$$

Труды третьего международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Юрмала, 22–24 мая 1985 г., Москва, Наука, 1986, С. 176–183.

На основании (1) можно установить справедливость соотношений:

$$
\begin{aligned}
&[J_{ab}, W_{d_1\ldots d_t}] = g_{aa}g_{bb}(g_{bd_1}W_{ad_2\ldots d_t} + \cdots + \\
&\qquad + g_{bd_t}W_{d_1d_2\ldots a} - g_{ad_1}W_{bd_2\ldots d_t} - \cdots - g_{ad_t}W_{d_1d_2\ldots b}), \\
&[P_a, W_{d_1\ldots d_t}] = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Теорема 1. *Пусть $n = p + q$, $n \geq 3$, $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Элементы*

$$
T_0 = g^{ab}P_aP_b,
$$

$$
T_k = \frac{1}{(n-2k-1)!2^{2k}(k!)^2}g^{a_1b_1}\cdots g^{a_{n-2k-1}b_{n-2k-1}}W_{a_1\ldots a_{n-2k-1}}W_{b_1\ldots b_{n-2k-1}}
$$

при $k < m$ или $k = m$ и четном n,

$$
T_m = \frac{1}{2^m m!}W \qquad \text{при нечетном } n
$$

образуют максимальную систему алгебраически независимых операторов Казимира алгебры $AP(p,q)$.

Инвариантность записанных операторов вытекает из соотношений (2). Их независимость следует из независимости симметризованных операторов Казимира группы $P(p,q)$, построенных по аналогичному правилу.

В качестве примера выпишем основные операторы Казимира для группы $P(1,6)$:

$$
P_1^2 - P_2^2 - \cdots - P_7^2;
$$

$$
\frac{1}{96}g^{a_1b_1}\cdots g^{a_4b_4}\varepsilon_{a_1\ldots a_7}\varepsilon_{b_1\ldots b_7}J^{a_5a_6}P^{a_7}J^{b_5b_6}P^{b_7};
$$

$$
\frac{1}{128}g^{a_1b_1}g^{a_2b_2}\varepsilon_{a_1\ldots a_7}\varepsilon_{b_1\ldots b_7}J^{a_3a_4}J^{a_5a_6}P^{a_7}J:b_3b_4J^{b_5b_6}P^{b_7};
$$

$$
\frac{1}{48}\varepsilon_{a_1\ldots a_7}J^{a_1a_2}J^{a_3a_4}J^{a_5a_6}P^{a_7}.
$$

3. Операторы Казимира расширенной группы Галилея

Алгебра Ли $A\tilde{G}(n)$ расширенной группы Галилея $\tilde{G}(n)$ n-мерного евклидова пространства определяется как вещественная алгебра с такими коммутационными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \\
&[P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \\
&[P_0, J_{bc}] = [P_0, P_a] = 0, \quad [G_a, P_0] = P_a, \quad [G_a, P_b] = \delta_{ab}M, \\
&[M, J_{ab}] = [M, P_0] = [M, P_a] = [M, G_a] = 0 \quad (a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n;\ n \geq 3).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Пусть $\tilde{U} = U(A\tilde{G}(n))$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $A\tilde{G}(n)$, $Z\tilde{U}$ — центр $\tilde{U}$.

Теорема 2. *Пусть $m = [n/2]$, $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — система однородных алгебраически независимых инвариантных операторов алгебры $U(AO(n,R))$, $\Gamma_{ab} = MJ_{ab} - (P_aG_b - P_bG_a)$, $\tilde{C}_j$ — элемент $\tilde{U}$, получаемый из C_j в результате замены J_{ab} на Γ_{ab}. Максимальную систему алгебраически независимы элементов $Z\tilde{U}$ образуют элементы:*

$$
M,\ \tilde{C}_0 = 2MP_0 - \delta^{ab}P_aP_b,\ \tilde{C}_1,\ \ldots,\ \tilde{C}_m.
$$

Доказательство. Из коммутационных соотношений (3) вытекает, что

$$\begin{aligned}
&[P_0, \Gamma_{bc}] = [P_a, \Gamma_{bc}] = [G_a, \Gamma_{bc}] = 0, \quad \Gamma_{ba} = -\Gamma_{ab}, \\
&[J_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{bc}\Gamma_{ad} - \delta_{ac}\Gamma_{bd} - \delta_{bd}\Gamma_{ac}, \\
&[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = M(\delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{bc}\Gamma_{ad} - \delta_{ac}\Gamma_{bd} - \delta_{bd}\Gamma_{ac}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть

$$\hat{P}_a = M^{-1}P_a, \quad \hat{J}_{ab} = M^{-1}\Gamma_{ab} = J_{ab} - (\hat{P}_a G_b - \hat{P}_b G_a),$$

Q — R-подалгебра обертывающего тела алгебры $A\tilde{G}(n)$, порожденная 1, P_0, $\hat{P}_a$, G_b, M, $\hat{J}_{ab}$ (R — поле вещественных чисел). Так как в силу (4) элементы $\hat{J}_{ab}$ $(a, b = 1, \ldots, n)$ порождают $AO(n, R)$ и

$$[G_a, \hat{P}_b] = \delta_{ab}, \quad [\hat{P}_a, \hat{J}_{cd}] = 0, \quad [G_a, \hat{J}_{cd}] = 0, \quad [G_a, P_0] = M\hat{P}_a,$$

то

$$Q \cong Q_1 \otimes_R Q_2 \otimes_R Q_3 \otimes_R U(AO(n, R)), \tag{5}$$

где Q_1 — R-алгебра, порожденная 1 и M, Q_2 — R-алгебра, порожденная 1 и $2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a$, а Q_3 есть R-алгебра, порожденная 1, $\hat{P}_a$, G_b $(a, b = 1, \ldots, n)$. Q_3 является алгеброй Вейля, поэтому ее центр совпадает с полем R. На основании (5) и результатов о центре $U(AO(n, R))$ заключаем, что степень трансцендентности центра алгебры Q равна $m+2$ и что элементы M, $2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a$, C_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ являются алгебраически независимыми.

Поскольку $\tilde{U} \subset Q$ и $M \in ZQ$, то $Z\tilde{U} \subset ZQ$ (ZQ — центр Q). Отсюда вытекает, что в $Z\tilde{U}$ существует не более $m + 2$ алгебраически независимых элементов. В то же время

$$M, \ M(2P_0 - M\hat{P}_a\hat{P}^a), \ M^{t_j}C_j,$$

где t_j — степень однородности C_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, принадлежит $Z\tilde{U}$ и алгебраически независимы. Теорема доказана.

4. Операторы Казимира группы Галилея

Коммутационные соотношения для базисных элементов алгебры Галилея $AG(n)$ получаем из (3), полагая $M = 0$. Сохраним те же обозначения для базисных элементов.

Пусть $\{C_{ij}^k \mid i, j, k = 1, \ldots, s\}$ — структурные константы алгебры Ли L,

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{s} C_{ij}^k Z_k, \quad B = (B_{ij}), \quad r(L) = \sup_{(Z_1, \ldots, Z_s)} \operatorname{rank} B.$$

На основании [1] и результатов о числе фундаментальных решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных получаем, что степень трансцендентности центра обертывающей алгебры алгебры L не превышает $\dim L - r(L)$.

Лемма. $r(AG(n)) \geq \dfrac{1}{2}\left(n^2 + 3n\right) - [n/2]$.

Доказательство. Базисные элементы алгебры $AG(n)$ расположим в такой последовательности:

$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}; G_1, \ldots, G_{n-1}; J_{12}, \ldots, J_{1,n-1}; J_{23}, \ldots, J_{2,n-1}; \ldots, J_{n-2,n-1}; P_n$, $G_n, J_{1n}, J_{2n}, \ldots, J_{n-1,n}$.

Базисным элементам сопоставим вещественные переменные:

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}; y_1, \ldots, y_{n-1}; z_{12}, \ldots, z_{1,n-1}; z_{23}, \ldots, z_{2,n-1}; \ldots, z_{n-2,n-1}; x_n, y_n$, $z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{n-1,n}$.

Положим $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$, $y_n = 0$, $z_{in} = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Матрица B имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & \left.\begin{matrix} 0 & -1 & & 0 \\ & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1\end{matrix}\right\} n \\ \hline
0 & B' & 0 \\ \hline
\begin{matrix} & 0 & \cdots & 0 \\ n\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix}1 & & 0\\ & -1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{matrix} \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & D & \\ 0 & & \end{matrix}
\end{array}\right),$$

где B' — матрица, соответствующая алгебре $AE(n-1)$, порожденной $G_1, \ldots$, $G_{n-1}, J_{12}, \ldots, J_{n-2,n-1}$. Известно, что

$$r(AE(n-1)) = \frac{1}{2}n(n-1) - \left[\frac{n}{2}\right].$$

Поэтому

$$r(AG(n)) \geq \frac{1}{2}n(n-1) - \left[\frac{n}{2}\right] + 2n = \frac{1}{2}n(n+3) - \left[\frac{n}{2}\right].$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть* $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, $K_{ab} = P_a G_b - P_b G_a$,

$W_{a_1 \ldots a_{n-2}} = \varepsilon_{a_1 \ldots a_n} K^{a_{n-1} a_n}$,

$W_{a_1 \ldots a_r} = W_{a_1 \ldots a_r a_{r+1} a_{r+2}} K^{a_{r+1} a_{r+2}}$ $\quad (r \leq n-4)$,

$W_{a_1} = W_{a_1 a_2 a_3} K^{a_2 a_3}$ *при нечетном* n,

$W = W_{a_1 a_2} K^{a_1 a_2}$ *при четном* n.

Элементы

$$T_0 = P_a P^a, \ T_1 = W_{a_1 \ldots a_{n-2}} W^{a_1 \ldots a_{n-2}}, \ \ldots, \ T_m = W_{a_1} W^{a_1} \quad (\textit{или } W)$$

составляют максимальную систему алгебраически независимых инвариантных операторов алгебры Галилея $AG(n)$.

Теорема доказывается на основании леммы такими же рассуждениями как и теорема 2.

Предложение 1. *Пусть* $m = [n/2]$, $n \geq 3$, $C_1, \ldots, C_m$ *— однородные образующие центра* $U(AO(n,R))$, $\tilde{C}_j$ *— элемент* $U(A\tilde{G}(n))$, *получаемый из* C_j *в результате замены* J_{ab} *на* Γ_{ab}. *Элементы*

$$M, \ \tilde{C}_0 = 2MP_0 - \delta^{ab} P_a P_b, \ \tilde{C}_1, \ \ldots, \ \tilde{C}_m \tag{6}$$

составляют систему образующих $ZU(A\tilde{G}(n))$.

Доказательство. Обозначим через $\langle M\rangle$ двусторонний идеал алгебры, порожденный M. Известно, что

$$U(A\tilde{G}(n))/\langle M\rangle \cong U(AG(n)).$$

Отождествляя соответствующие элементы, можно считать, что базис $AG(n)$ состоит из таких элементов: $\bar{P}_a = P_a + \langle M\rangle$, $\bar{G}_b = G_b + \langle M\rangle$, $\bar{P}_0 = P_0 + \langle M\rangle$, $\bar{J}_{ab} = J_{ab} + \langle M\rangle$. Пусть $\bar{C}_j$ — элемент $U(AG(n))$, получаемый из C_j при замене J_{ab} на $K_{ab} = \bar{P}_a\bar{G}_b - \bar{P}_b\bar{G}_a$. Тогда $\bar{C}_j = \tilde{C}_j + \langle M\rangle$, а значит,

$$\delta^{ab}\bar{P}_a\bar{P}_b,\ \bar{C}_a,\ \ldots,\ \bar{C}_m \tag{7}$$

принадлежат центру алгебры $U(AG(n))$. Так как построенные в теореме 3 операторы $T_1, T_2, \ldots, T_m$ можно получить из операторов Казимира алгебры $AO(n,R)$ при замене J_{ab} на K_{ab}, то $T_j = f_j(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_m)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Отсюда в силу алгебраической независимости $T_0, T_1, \ldots, T_m$ вытекает, что операторы (7) являются алгебраически независимыми.

На основании рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2, каждый элемент центра алгебры $U(A\tilde{G}(n))$ можно записать в виде $M^{-k}f(M, \tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_m)$. Если бы элементы (6) не порождали $ZU(A\tilde{G}(n))$, то для некоторого ненулевого многочлена $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными коэффициентами

$$M^{-1}\cdot\varphi(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_m) \in ZU(A\tilde{G}(n)).$$

Отсюда следует, что $\varphi(\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_m) \in \langle M\rangle$, а значит

$$\varphi(\delta^{ab} bar P_a\bar{P}_b, \bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_m) = 0.$$

Полученное противоречие и доказывает предложение 1.

Предложение 2. *Пусть* $m = [n/2]$, $n \geq 3$, $\bar{C}$ *— элемент* $U(AG(n))$, *получаемый из* $C \in U(AO(n,R))$ *при замене* J_{ab} *на* $P_aG_b - P_bG_a$. *Для любой системы* $C_1, \ldots, C_m$ *алгебраически независимых однородных операторов Казимира группы* $O(n,R)$ *элементы* $\delta^{ab}P_aP_b$, $\bar{C}_1$, ..., $\bar{C}_m$ *составляют максимальную систему алгебраически независимых операторов Казимира группы* $G(n)$.

Выпишем основные операторы Казимира для групп $\tilde{G}(n)$ и $G(n)$ при $n = 3, 4, 5, 6$.

$$\tilde{G}(3):\ M,\ 2MP_0 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2,\ \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2;$$

$$\tilde{G}(4):\ M,\ 2MP_0 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 - P_4^2,\ \sum_{a_1,a_2}\Gamma_{a_1a_2}\Gamma_{a_2a_1},\ \varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}\Gamma^{a_1a_2}\Gamma^{a_3a_4};$$

$$\tilde{G}(5):\ M,\ 2MP_0 - P_1^2 - \cdots - P_5^2,\ \sum_{a_1,a_2}\Gamma_{a_1a_2}\Gamma_{a_2a_1},$$

$$\sum_{a_1,a_2,a_3,a_4}\Gamma_{a_1a_2}\Gamma_{a_2a_3}\Gamma_{a_3a_4}\Gamma_{a_4a_1};$$

$$\tilde{G}(6): \ M, \ 2MP_0 - P_1^2 - \cdots - P_6^2, \ \sum_{a_1,a_2} \Gamma_{a_1a_2}\Gamma_{a_2a_1},$$

$$\sum_{a_1,a_2,a_3,a_4} \Gamma_{a_1a_2}\Gamma_{a_2a_3}\Gamma_{a_3a_4}\Gamma_{a_4a_1}, \ \varepsilon_{a_1\ldots a_6}\Gamma^{a_1a_2}\Gamma^{a_3a_4}\Gamma^{a_5a_6};$$

$$G(3): \ P_1^2 + P_2^2 + P_3^2, \ K_{12}^2 + K_{13}^2 + K_{23}^2;$$

$$G(4): \ P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2, \sum_{a_1,a_2} K_{a_1a_2}K_{a_2a_1}, \ \varepsilon_{a_1a_2a_3a_4}K^{a_1a_2}K^{a_3a_4};$$

$$G(5): \ P_1^2 + \cdots + P_5^2, \sum_{a_1,a_2} K_{a_1a_2}K_{a_2a_1}, \quad \sum_{a_1,a_2,a_3,a_4} K_{a_1a_2}K_{a_2a_3}K_{a_3a_4}K_{a_4a_1};$$

$$G(6): \ P_1^2 + \cdots + P_6^2, \sum_{a_1,a_2} K_{a_1a_2}K_{a_2a_1}, \quad \sum_{a_1,a_2,a_3,a_4} K_{a_1a_2}K_{a_2a_3}K_{a_3a_4}K_{a_4a_1},$$

$$\varepsilon_{a_1\ldots a_6}K^{a_1a_2}K^{a_3a_4}K^{a_5a_6}.$$

1. Гельфанд И.М., *Мат. сб.*, 1950, **26**, 103.
2. Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, М., Мир, 1980, Т. 1, 456 с., Т. 2. 396 с.
3. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 321.
4. Фущич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
5. Кадышевский В.Г., Тодоров И.Т., *ЯФ*, 1966, **3**, 135.
6. Mirman R., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 39.
7. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 977.
8. Burdel G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, 1758.
9. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф., *Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия*, 1980, **21**, № 2, 3; **21**, № 2, 7; **21**, № 4, 23.
10. Демичев А.П., Нелипа Н.Ф., Чайчиан М., *Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия*, 1980, **21**, № 4, 27; **21**, № 5, 20.
11. Perroud M., *J. Math. Phys.*, 1983, **24**, 1381.