О непрерывных подгруппах обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, А.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

1. Введение

Описание подгрупповой структуры обобщенной группы Пуанкаре $P(1,n)$ необходимо для решения ряда задач теоретической и математической физики: изучение физических систем с переменной массой и спином [1–3], построение точных частных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений [4], редукция представлений группы $P(1,n)$ на ее подгруппы [5].

Систематическое изучение непрерывных подгрупп неоднородных групп преобразований квантовой механики начато в работе [6], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечномерной алгебры Ли L с нетривиальным абелевым идеалом N, являющимся полупрямым слагаемым: $L = N \supset\!\!\!\!+ L_1$. Этим методом проведена классификация подалгебр алгебр Ли групп Пуанкаре $P(1,3)$ [6], $P(1,4)$ [7, 8] и групп Евклида $E(3)$ [9], $E(4)$ [10]. В силу чрезвычайной общности метод не всегда эффективно реализуется.

В настоящей работе для случая группы $P(1,n)$ дается дальнейшее развитие метода Патеры–Винтернитца–Цассенхауза [6], позволяющее свести проблему классификации относительно $P(1,n)$-сопряженности подалгебр алгебры Пуанкаре к описанию относительно $O(1,k)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(1,k)$ и к описанию относительно $O(k)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(k)$ $(k = 2,\dots,n)$.

2. Максимальные подалгебры

Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle X_1,\dots,X_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $X_1,\dots,X_s$; R^{n+1} — $n+1$-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U = U^{n+1}$ — $n+1$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X,Y) = x_0y_0 - x_1y_1 - \dots - x_ny_n; \tag{1}$$

$O(1,n)$ — группа линейных преобразований U^{n+1}, сохраняющих (X,X) для каждого $X \in U^{n+1}$. Будем предполагать, что $O(1,n)$ реализована в виде вещественных матриц порядка $n+1$.

Группой Пуанкаре $P(1,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in O(1,n)$, $Y \in R^{n+1}$.

Труды третьего международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике", Юрмала, 22–24 мая 1985 г., Москва, Наука, 1986, С. 169–176.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G.

Алгебра Пуанкаре $AP(1,n)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}&[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\ &[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}, \qquad [P_\alpha, P_\beta] = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

где $g_{00} = -g_{11} = \cdots = -g_{nn} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$.

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, а генераторы трансляций P_α порождают коммутативный идеал N, причем $AP(1,n) = N \subset\!\!\!\!+ AO(1,n)$.

Пусть C такая матрица порядка $n{+}2$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to CXC^{-1}$ является автоморфизмом $AP(1,n)$. Если $C \in G$, $G \subset P(1,n)$, то φ_C называется G-автоморфизмом. Если $C = \mathrm{diag}\,(\lambda E, 1)$ $(\lambda \in R,\ \lambda > 0)$, то автоморфизм φ_C называется гомотетией.

Подалгебры K и K' алгебры $AP(1,n)$ называются $P(1,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(K) = K'$ для некоторого $P(1,n)$-автоморфизма φ_C алгебры $AP(1,n)$.

Отождествим N с U, сопоставив P_i $n+1$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и с нулями на остальных местах $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Элементы $AO(1,n)$ считаем матрицами порядка $n+1$. При таком подходе $[X, Y] = X \cdot Y$ для любых $X \in AO(1,n)$, $Y \in N$.

Пусть W — невырожденное подпространство пространства U. Если F — подалгебра $AO(W)$, то тождественное отображение F является представлением F в $AO(W)$. Будем называть его тривиальным представлением F в $AO(W)$. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется неприводимой, если тривиальное представление F в $AO(W)$ является неприводимым. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

Теорема 1. *Максимальные подалгебры алгебры $AO(1,n)$ исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности максимальными неприводимыми подалгебрами и такими алгебрами: $AO(n)$; $AO(1,k) \oplus AO'(n-k)$, где $AO'(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = k+1, \ldots, n\rangle$, $k = 2, \ldots, n-1$; $\langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle)$, где $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, 2, \ldots, n-1)$.*

Доказательство. Пусть F — подалгебра алгебры $AO(1,n)$, U_1 — подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U_1 — вырожденное пространство, то оно содержит одномерное F-инвариантное изотропное подпространство W, сопряженное $\langle P_0 + P_n\rangle$. В этом случае F является подалгеброй алгебры $L = \{X \in AO(1,n) \mid (\forall\ Y \in W)(XY \in W)\}$. Нетрудно получить, что $L = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle)$. Если U_1 — невырожденное пространство, то оно является псевдоевклидовым или евклидовым пространством. На основании теоремы Витта нормализатор U_1 в $AO(1,n)$ сопряжен с одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,k) \oplus AO'(n-k)$. Теорема доказана.

Пусть $AE(n) = \langle P_1, \ldots, P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ AO(n)$, $AE'(k) = \langle P_{k+1}, \ldots, P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ AO'(n-k)$, $A\tilde{G}(n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом: $M = P_0 + P_n$, $P_0, P_1, \ldots$, P_{n-1}, $G_1, \ldots, G_{n-1}$, J_{ab} $(a, b = 1, \ldots, n-1)$. Согласно теореме 1 описание подалгебр алгебры $AP(1,n)$ сводится к описанию относительно $P(1,n)$-сопряженности подалгебр алгебр $AE(n)$, $AP(1,k) \oplus AE'(n-k)$, $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}\rangle$, а также алгебр $U \subset\!\!\!\!+ F$, где F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$.

Пусть π — проектирование алгебры $AP(1,n)$ на $AO(1,n)$, F — подалгебра $AO(1,n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $AP(1,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$

$P(1,n)$-сопряжена алгебре $W \subset\!\!\!\!+ F$, где W есть F-инвариантное подпространство пространства U, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $AP(1,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset AP(1,n)$, удовлетворяющая условию$\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(1,n)$. Аналогично определяется расщепляемость подалгебр и для других алгебр неоднородных преобразований.

Предложение 1. *Пусть $L = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle)$, где $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, 2, \ldots, n-1)$. Подалгебра $F \subset AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle$ обладает только расщепляемыми расширениями в L тогда и только тогда, когда F — полупростая алгебра или F не сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-2)$.*

Нетрудно установить, что если n — нечетное число, то $AO(1,n)$ обладает относительно $O(1,n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$\langle G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2k-1,2k}, J_{0n}\rangle \quad (2k = n-1)$.

Если n — четное число, то $AO(1,n)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle$;

$\langle G_1, \ldots, G_{n-1}, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, J_{0n}\rangle$.

Отсюда и из предложения 1 получаем описание максимальных абелевых подалгебр алгебры $AO(1,n)$.

Предложение 2. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $AO(1,n)$ исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $n = 2k+1$: $\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-2,n-1}, J_{0n}\rangle$; $\langle G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\rangle$;
$\langle G_1, G_2, \ldots, G_{2m}, J_{2m+1,2m+2}, \ldots, J_{n-2,n-1}\rangle$ $(m = 1, \ldots, k-1)$;
2) $n = 2k$: $\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle$; $\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, J_{0n}\rangle$;
$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, G_{n-1}\rangle$; $\langle G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\rangle$;
$\langle G_1, \ldots, G_{2m}, G_{n-1}, J_{2m+1,2m+2}, \ldots, J_{n-3,n-2}\rangle$ $(m = 1, \ldots, k-1)$.

3. Вполне приводимые подалгебры

Теорема 2. *Если $n \geq 2$, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$ является полупростой и некомпактной.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Тогда $F = Z(F) \oplus Q$, где $Z(F)$ — центр, а Q — фактор Леви. Если F — абсолютно неприводимая алгебра, то в силу леммы Шура $Z(F) = 0$. Если F не является абсолютно неприводимой алгеброй, то при $Z(F) \neq 0$ получаем, что $\dim Z(F) = 1$ и квадрат ненулевой матрицы из $Z(F)$ совпадает с $(-\lambda^2)E$, $\lambda \neq 0$, где $\lambda \in R$. Последнее противоречит предложению 1. Значит, F — полупростая алгебра.

Если F — компактная алгебра, то существует такая симметрическая матрица $C \in GL(n+1, R)$, что $C^{-1}FC \subset AO(n+1)$. Так как $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1} \cdot \exp F \cdot C$, то в $O(n+1)$ существует неприводимая группа, которая одновременно сохраняет $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ и $\lambda_0^2 x_0^2 - \lambda_1^2 x_1^2 - \cdots - \lambda_n^2 x_n^2$ ($\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые вещественные числа). Полученное противоречие и доказывает вторую часть теоремы.

Предложение 3. *Приводимая подалгебра F алгебры $AO(1,n)$ является вполне приводимой тогда и только тогда, когда она сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(n-1) \oplus \langle J_{0n}\rangle$ или алгебре $L_1 \oplus L_2$, где L_1 — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,k)$ $(k > 1)$, а L_2 — подалгебра алгебры $AO'(n-k)$.*

Предложение 3 является следствием предложения 1, теоремы 2 и того факта, что G_a действует не вполне приводимо на пространстве $\langle P_0 + P_n, P_a\rangle$.

Предложение 4. *Вполне приводимая подалгебра F алгебры $AO(1,n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(1,n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,n-1)$.*

Пусть Γ — тривиальное представление вполне приводимой подалгебры F алгебры $AO(1,n)$, не сопряженной подалгебре алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_m$, где Γ_i — неприводимое представление F в $AO(W_i)$ $(i = 1,\ldots,m)$. Положим $F_i = \{\mathrm{diag}\,(O,\ldots,\Gamma_i(X),\ldots,O \mid X \in F\}$. Тогда F_i — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W_i)$. Если $F_i \neq 0$, то алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Если Γ_i и Γ_j суть эквивалентные представления, то будем предполагать, что для любого $X \in F$ имеет место равенство $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$. Объединив эквивалентные ненулевые подпредставления, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры $AO(1,n)$, построенные по тому же правилу что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F.

Теорема 3. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части ненулевой вполне приводимой подалгебры F алгебры $AO(1,n)$, V — подпространство U, инвариантное относительно F. Тогда $V = V_1 \oplus\cdots\oplus V_q \oplus \tilde V$, где $V_i = [K_i, V_i] = [K_i, V]$, $[K_j, V_i] = 0$ при $j \neq i$, $\tilde V = \{X \in V \mid [F,X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$, то относительно $O(1,n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства U с условием $[K,W] = W$ исчерпываются пространствами: $W_1, W_1 \oplus W_2, \ldots, W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Доказательство. Разложение $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde V$ вытекает из теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли. Пусть K — примарная часть алгебры F. В силу предложения 3 можно предполагать, что K — примарная подалгебра алгебры $AO(n)$. На основании леммы Шура нетрудно доказать, что если Q — неприводимая подалгебра алгебры $AO(m)$, то группа автоморфизмов алгебры $\langle P_1,\ldots,P_m\rangle \subset\!\!\!\!+ Q$ разлагается в прямое произведение группы $E(m)$-автоморфизмов и группы гомотетий. Отсюда вытекает второе утверждение теоремы.

На основании теоремы 3 описание подалгебр $\hat F \subset AP(1,n)$, для которых $\pi(\hat F)$ — вполне приводимая алгебра, не сопряженная подалгебре алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$, сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр $AO(1,k)$ и $AO(k)$ $(k = 2,3,\ldots,n)$. Остальные случаи сводятся к случаю алгебры $A\tilde G(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}\rangle$.

4. Подалгебры алгебры Галилея

Алгебра Галилея $AG(n)$ определяется такими коммутационными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b,\\
[P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = 0,\\
[P_0, J_{ab}] = [P_0, P_a] = 0, \quad [G_a, P_0] = P_a \quad (a,b,c,d = 1,2,\ldots,n).
\end{gathered}
$$

Эта алгебра является факторалгеброй расширенной алгебры Галилея $A\tilde G(n)$ по центру $\langle M\rangle$. Через $A\bar G(n)$ обозначим изохронную алгебру Галилея, т.е. алгебру, получаемую из $AG(n)$ в результате удаления P_0.

Предложение 5. *Подалгебра $F \subset AO(n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\bar{G}(n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-1)$.*

Алгебра $A\bar{G}(n)$ является подпрямой суммой двух алгебр Евклида $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle \dotplus AO(n)$, $\langle G_1, \ldots, G_n\rangle \dotplus AO(n)$. Поэтому справедливость предложения 5 вытекает из предложения 1.

Предложение 6. *Пусть $m = [n/2]$, $\delta = 0$ при $n = 2m$, $\delta = 1$ при $n = 2m+1$. Максимальные абелевые подалгебры алгебры $AG(n)$ исчерпываются относительно $G(n)$-сопряженности такими алгебрами:*
$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n\rangle$; $\langle G_1 + \alpha P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle G_1, \ldots, G_n, P_1, \ldots, P_n\rangle$; $\langle P_0, \delta P_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle G_n, P_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$ $(n = 2m+1)$;
$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_0, P_{2a+1}, \ldots, P_n\rangle$ $(a = 1, \ldots, m-1)$;
$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n, G_{2a+1}, \ldots, G_n\rangle$ $(a = 1, \ldots, m-1)$;
$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+1}, \ldots, P_n\rangle$ $(\alpha > 0,\ a = 1, \ldots, m-1)$.

Доказательство. Относительно $G(n)$-сопряженности алгебра $AG(n)$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$K = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle.$$

Пусть L — максимальная абелевая подалгебра $AG(n)$. Тогда $L \subset K$. Если проекция L на $\langle P_0\rangle$ отлична от нуля, то $P_0 \in L$ и проекция L на $\langle G_1, \ldots, G_n\rangle$ является нулевой или проекция L на векторное пространство $\langle P_0, G_1, \ldots, G_n\rangle$ совпадает с $\langle G_{2s+1} + \alpha P_0\rangle$. Нетрудно получить, что проекция L на $\langle J_{2d-1,2d}, P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d}\rangle$ совпадает с $\langle J_{2d-1,2d}\rangle$ или с подалгеброй алгебры $\langle P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d}\rangle$. Значит, L сопряжена одной из алгебр, выписанных в формулировке предложения.

Каждая подалгебра F алгебры $AO(n)$ является вполне приводимой алгеброй Ли линейных преобразований пространства $\langle P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n\rangle$. Как и в теореме 3, получаем, что описание подалгебр алгебры $A\bar{G}(n)$ сводится к нахождению неприводимых подалгебр алгебр $AO(m)$ $(m = 2, \ldots, n)$ и к классификации пространств, получаемых склеиванием неприводимых относительно данной алгебры $F \subset AO(m)$ подпространств соответственно пространств $\langle P_1, \ldots, P_n\rangle$, $\langle G_1, \ldots, G_n\rangle$.

Отметим, что в [11] описаны относительно $G(3)$-сопряженности все подалгебры алгебр Галилея $AG(3)$. Получена также классификация подалгебр расширенной алгебра Галилея. Эти результаты уточняют классификацию, проведенную в [12].

Вместо $S_1 \dotplus F, \ldots, S_m \dotplus F$ будем употреблять запись $F : S_1, \ldots, S_m$. Пусть $V_a^b = \langle P_a, \ldots, P_b\rangle$, $W_a^b = \langle G_a, \ldots, G_b\rangle$, $N_{a,b}^{\alpha} = \langle G_a + \alpha P_b, G_b - \alpha P_a\rangle$.

Теорема 4. *Пусть F — проекция $\hat{F} \subset AG(4)$ на $AO(4)$. Подалгебры $\hat{F}$ алгебры $AG(4)$ с условием $\dim F \geq 3$ исчерпываются относительно $G(4)$-сопряженности подалгебрами алгебры $AG(3)$ и такими алгебрами:*

$AO(4)$: O, $\langle P_0\rangle$, V_0^4, V_1^4, W_1^4, $V_1^4 + W_1^4$, $V_0^4 + W_1^4$;

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{12} - J_{34}\rangle$: O, $\langle P_0\rangle$, V_0^4, V_1^4, W_1^4, $N_{1,2}^{\alpha} + N_{3,4}^{-\alpha}$, $V_1^4 + W_1^4$, $V_0^4 + W_1^4$ $(\alpha \neq 0)$;

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{12} - J_{34} + \alpha P_0\rangle$: O, V_1^4, $V_1^4 + W_1^4$ $(\alpha \neq 0)$;

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}\rangle$: O, $\langle P_0\rangle$, V_0^4, V_1^4, W_1^4, $N_{1,2}^{\alpha} + N_{3,4}^{-\alpha}$, $V_1^4 + W_1^4$, $V_0^4 + W_1^4$ $(\alpha \neq 0)$;

$AO(3) \in\!\!\!\!+ \langle G_1, G_2, G_3, G_4 + \lambda P_4\rangle$ $(\lambda \neq 0)$;

$AO(3)$: S_j, $V_0^3 + S_j$ $(j = 1, 2, 6)$, $V_1^3 + S_j$ $(j \neq 4, 7)$, $W_1^3 + S_j$ $(j = 1, 2, 6)$, $V_1^3 + W_1^3 + S_j$, где S_j совпадает с одним из пространств: $\langle P_4\rangle$, $\langle G_4\rangle$, $\langle P_0 + \alpha G_4\rangle$, $\langle P_0, P_4\rangle$, $\langle P_0 + \alpha G_4, P_4\rangle$, $\langle P_4, G_4\rangle$, $\langle P_0, P_4, G_4\rangle$ $(\alpha > 0;\ j = 1, \ldots, 7)$.

1. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
2. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 573.
3. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **10**, 163.
4. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4.
5. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., *ТМФ*, 1976, **26**, 206.
6. Patera J., Winternitz P., Zassenheus H., *J. Math. Phys.*, 1975, **8**, 1597.
7. Федорчук В.М., *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, 717.
8. Федорчук В.М., *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, 696.
9. Beckers J., Patera J., Perroud K., Winternitz P., *J. Math. Phys.*, 1977, *18*, 72.
10. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119.
11. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Препринт № 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 25 с.
12. Sorba P., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, 941.