Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для электромагнитного поля

В.И. ФУЩИЧ, И.М. ЦИФРА

Известно, что одних уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \\ &\frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \tilde{H}_{\alpha\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \end{aligned} \tag{0.1}$$

недостаточно, чтобы определить электромагнитное поле в различных средах. Для описания электромагнитного поля в конкретной среде к уравнениям (0.1) добавляют материальные уравнения. Мы используем принцип симметрии в качестве отбора этих дополнительных соотношений.

1. Симметрия уравнений (0.1)

Система (0.1) является недоопределенной системой дифференциальных уравнений в частных производных. По этой причине следует ожидать, что система (0.1) будет иметь более широкую симметрию, чем уравнения Максвелла в вакууме. Симметрийные свойства уравнений (0.1) устанавливаются следующей теоремой

Теорема 1. *Алгеброй инвариантности системы (0.1) является бесконечномерная алгебра, любой элемент которой задается формулами*

$$X_1 = \xi^\mu(x)\partial_\mu + \eta_{F_{\mu\nu}}\partial_{F_{\mu\nu}} + \eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \tag{1.1}$$

$$X_2 = F_{\mu\nu}\partial_{F_{\mu\nu}}, \tag{1.2}$$

$$X_3 = \tilde{H}_{\mu\nu}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \tag{1.3}$$

$$X_4 = F_{\mu\nu}\partial_{\tilde{H}_{\mu\nu}}, \tag{1.4}$$

$$X_5 = \tilde{H}_{\mu\nu}\partial_{F_{\mu\nu}}, \tag{1.5}$$

где $\xi^\mu(x)$ произвольные дифференцируемые функции;

$$\begin{aligned} &\eta_{F_{\mu\nu}} = -F_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - F_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu, \\ &\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}} = -\tilde{H}_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - \tilde{H}_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Ли [1] и ввиду его громоздкости здесь не приводится. Из теоремы 1 получаем важное следствие.

Труды третьего международного семинара “Теоретико-групповые методы в физике”, Юрмала, 22–24 мая 1985 г., Москва, Наука, 1986, Т.1, С. 501–505.

Теорема 2. *Система (0.1) инвариантна относительно 20-мерной алгебры Ли группы $IGL(4,R)$, содержащей в качестве подалгебры алгебру Пуанкаре $P(1,3)$ и алгебру Галилея $G(1,3)$.*

Базисные элементы алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ имеют такой вид:

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\partial_{x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + (S_{\mu\nu}\Psi)_n\partial_{\Psi_n}, \tag{1.7}$$

где по n подразумевается суммирование от 1 до 12, Ψ — столбец $(\vec{E},\vec{B},\vec{D},\vec{H})$, матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид:

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = \varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{-}S_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$
$$\hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{0}$ — нулевые 3×3 матрицы [2].

Генераторы группы Галилея имеют вид:

$$\begin{aligned} &P_0 = i\partial_{x_0}, \qquad P_a = -i\partial_{x_a}, \qquad a,b = 1,2,3, \\ &J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + (S_{ab}\Psi)_n\partial_{\Psi_n}, \\ &G_a = tP_a + (M\Psi)_n\partial_{\Psi_n}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

Среди множества операторов (1.1) содержатся генераторы конформной группы $C(1,3)$. Совокупность операторов (1.7) и операторов

$$\begin{aligned} &D = x_\nu P^\nu + 2i\Psi_n\partial_{\Psi_n}, \\ &K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu}\Psi)_n\partial_{\Psi_n}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

образуют базис конформной алгебры $C(1,3)$.

Таким образом, мы установили, что для системы (0.1), без материальных уравнений, выполняются как принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна, так и принцип относительности Галилея.

2. Пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные нелинейные материальные уравнения

Рассмотрим материальные уравнения в следующем виде:

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(F_{01}, F_{02}, F_{03}, \ldots, F_{23}) \equiv \Phi_{\mu\nu}(F), \tag{2.1}$$

где $\Phi_{\mu\nu}$ — произвольные гладкие функции $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$, $\Phi_{\mu\nu} = 0$.

Используя метод Ли, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Система уравнений (0.1), (2.1) инвариантна относительно группы Пуанкаре тогда и только тогда, когда*

$$H_{\mu\nu} = MF_{\mu\nu} + N\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

где $M = M(C_1, C_2)$, $N = N(C_1, C_2)$ — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов электромагнитного поля

$$C_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2, \qquad C_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} = \vec{B}\vec{E},$$

а $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, $\tilde{H}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$.

В терминах $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ формула (2.2) имеет вид

$$\vec{D} = M\vec{E} + N\vec{B}, \qquad \vec{H} = M\vec{B} - N\vec{E}. \tag{2.3}$$

Если в (2.3) положить

$$M = \frac{1}{L}, \quad N = \frac{\vec{B}\vec{E}}{L}, \quad L = \sqrt{1 + (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) - (\vec{B}\vec{E})^2},$$

то система (0.1) совместно с (2.3) совпадает с нелинейными уравнениями для электромагнитного поля, предложенными Борном [3] и известными в литературе как уравнения Борна–Инфельда. Для материальных уравнений частного вида

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{E}, \vec{H})\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu(\vec{E}, \vec{H})\vec{H}, \tag{2.4}$$

как это вытекает из теоремы 3, справедливо следующее утверждение:

Следствие. Система уравнений (0.1), (2.4) будет пуанкаре-инвариантна только тогда, когда

$$\varepsilon(\vec{E}, \vec{H})\mu(\vec{E}, \vec{H}) = 1$$

(используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$).

Теорема 4. *Система уравнений (0.1), (2.2) инвариантна относительно локальной конформной группы $C(1,3)$ только в том случае, если*

$$M = M\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \qquad N = N\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \tag{2.5}$$

где M, N — произвольные дифференцируемые функции, зависящие от отношения инвариантов C_1, C_2.

Если вектор-потенциал A_μ ввести стандартным образом, то система (0.1), (2.5) приводит к уравнениям, которые инвариантны не только относительно конформной группы, но и относительно градиентных преобразований.

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \lambda\partial^\nu\left\{\Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\right\}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{2.6}$$

где

$$I_1 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu),$$

$$I_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon^{ik\mu\nu}(\partial_i A_k - \partial_k A_i)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu),$$

Φ — произвольная дифференцируемая функция одного переменного.

Конформную симметрию можно использовать для нахождения точных решений нелинейных уравнений

$$\left\{i\gamma_\mu p^\mu + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{-1/3}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}\Psi = 0 \tag{2.7}$$

совместно с (0.1), (2.5), описывающих взаимодействие спинорного и электромагнитного полей.

Решение системы (0.1), (2.5), (2.7) ищем в виде

$$F_{\mu\nu} = \frac{f_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(f_{\mu k}x_\nu + f_{k\nu}x_\mu)x^k}{(x^2)^3}, \tag{2.8}$$

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{h}_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(\tilde{h}_{\mu k}x_\nu + \tilde{h}_{k\nu}x_\mu)x^k}{(x^2)^3}, \tag{2.9}$$

$$\Psi = \frac{\gamma\chi}{(x^2)^2}\varphi(\omega), \tag{2.10}$$

где $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$, $\tilde{h}_{\mu\nu} = -\tilde{h}_{\nu\mu}$ — зависящие от переменной w, β_μ — произвольные действительные константы. С помощью формул (2.8)–(2.10) получаем частные точные решения системы (0.1), (2.5), (2.7):

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \frac{b_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(b_{\mu k}x_\nu + b_{k\nu}x_\mu)x^k}{(x^2)^3}, \\
\tilde{H}_{\mu\nu} &= \frac{\tilde{c}_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2\frac{(\tilde{c}_{\mu k}x_\nu + \tilde{c}_{k\nu}x_\mu)x^k}{(x^2)^3}, \\
\Psi &= \frac{\gamma\chi}{(x^2)^2}\exp\left\{\frac{-i(\gamma\beta)(S_{\mu\nu}b^{\mu\nu})\omega}{\beta^2(\bar{\chi}\chi)^{-1/3}}\right\}\chi,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

зависящих от постоянных тензорных величин $b_{\mu\nu}$, $\tilde{c}_{\mu\nu}$.

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 197 с.
3. Born M., Infeld L., Foundations of the new field theory, *Proc. Roy. Soc. A*, 1934, **144**, № 852, 4225.