О симметрии некоторых уравнений идеальной жидкости

В.И. ФУЩИЧ, С.Л. СЛАВУЦКИЙ

Групповые свойства основных уравнений движения жидкости — Эйлера и Навье–Стокса — хорошо изучены [1–4]. Однако в различных вопросах гидродинамики используется ряд других уравнений (уравнения в лагранжевых переменных, уравнения движения релятивистской жидкости, сверхтекучей жидкости и др.), симметрийные свойства которых не исследованы.

Цель данной работы — изучить групповые свойства таких уравнений и предложить другие уравнения для описания жидкости, допустимые с симметрийной точки зрения [9].

1. Для описания турбулентной диффузии, деформации материальных поверхностей в турбулентном потоке используется уравнение движения идеальной жидкости в форме Лагранжа [4]:

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}+\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial p}{\partial x_i}=0, \tag{1}$$

где u^k — компоненты вектора смещения, x_i — лагранжевы переменные, p — давление, которое полагаем постоянным, $\lambda=\text{const}$, $i,k=\overline{1,3}$, по повторяющимся индексам всюду подразумевается суммирование. Полную информацию о локальных групповых свойствах уравнения (1) дает

Теорема 1. *Максимальной алгеброй инвариантности (МАИ), в смысле С. Ли, уравнения (1) является 15-мерная алгебра Ли $A(15)$, базисные элементы которой задаются формулами*

$$p_a=\frac{\partial}{\partial x_a},\quad D_1=2x_ap_a+(u^a-x_a)\tilde p_a,\quad D_2=x_0p_0, \tag{2}$$

$$p_0=\frac{\partial}{\partial x_0},\quad \tilde p_a=\frac{\partial}{\partial u^a},\quad G_a=x_0\tilde p_a,\quad I_a=\varepsilon_{abc}(u^b-x_b)\tilde p_c, \tag{3}$$

где $x_0\equiv t$, ε_{abc} — символ Леви–Чивита, $a,b,c=\overline{1,3}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем лиевский алгоритм, подробно описанный в работе [5]. Он состоит в определении всех дифференциальных операторов 1-го порядка вида

$$\begin{gathered}Q=\xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu},\\ x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m,\quad \mu=\overline{0,n-1},\quad \nu=\overline{0,m-1},\end{gathered} \tag{4}$$

Сборник научных трудов “Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред”, Киев, Наукова думка, 1986, С. 161–165.

порождающих группу инвариантности уравнения (1). Лиевское условие инвариантности произвольного дифференциального уравнения s-го порядка

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0,$$
$$\underset{k}{u} = \left\{ \frac{\partial^k u^\alpha}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right\}, \quad k = \overline{1, s}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \quad i_1, \ldots, i_k = \overline{0, n-1}, \tag{5}$$

имеет вид

$$\underset{s}{Q} F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})|_{F=0} = 0, \tag{6}$$

где $\underset{s}{Q}$ — s-е продолжение оператора (4), которое строится по формулам Ли [5].

Для уравнения (1) условие инвариантности (6) сводится к следующим определяющим уравнениям относительно коэффициентных функций $\xi^\mu(x, u)$ и $\eta^a(x, u)$ в операторе (4):

$$\begin{gathered}
\xi^\mu_{u^a} = \xi^a_0 = \xi^0_a = 0, \qquad \eta^a_{u^b u^b} = \eta^a_{00} = \eta^a_{u^b 0} = 0, \\
\xi^a_b = 0, \quad a \neq b, \qquad \eta^a_{u^b} + \eta^b_{u^a} = 0, \quad a \neq b, \\
2\eta^i_{u^i b} - \xi^0_{00} = 0, \qquad 2\eta^j_{u^j} - \xi^i_i = 0, \\
\eta^a_{u^b} + \eta^b_a = 0, \qquad \mu = \overline{0, 3}, \quad i, j, a, b = \overline{1, 3}.
\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $\xi^\mu_{u^k} \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial u^k}$, $\xi^\mu_k \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x_k}$ и т.д., по индексам i, j суммирования нет.

Общим решением сильно переопределенной системы уравнений (7) являются функции

$$\begin{gathered}
\xi^0 = c_{00} x_0 + d_0, \qquad \xi^a = 2c_{11} x_a + d_a, \\
\eta^a = c_{ab}(u^b - x_b) + D_a x_0 + f_a, \\
c_{ab} = -c_{ba}, \quad a \neq b, \qquad c_{11} = c_{22} = c_{33},
\end{gathered} \tag{8}$$

где c_{ab}, D_a, f_a, d_μ — произвольные постоянные. Выбирая базис во множестве операторов (4) с коэффициентами (8), получаем операторы (2), (3).

Замечание 1. Десятимерная подалгебра $A(10)$ алгебры $A(15)$ (2), (3), порожденная операторами (3), локально изоморфна алгебре Галилея $G(1, 3)$ [8]. Однако конечные преобразования, порождаемые операторами (3), не совпадают с преобразованиями, определяющими группу Галилея, и имеют вид

$$\begin{gathered}
x_0 \to x_0' = x_0 + a_0, \qquad x_i \to x_i' = x_i, \\
u^i \to u^{i\prime} = R_{ik}(u^k - x_k) + v_i x_0 + a_i,
\end{gathered} \tag{9}$$

где R_{ik} — оператор 3-мерного поворота, a_μ, v_i — действительные параметры. Отметим также, что групповые свойства уравнения (1) и уравнений Эйлера и Навье–Стокса принципиально различны.

Замечание 2. Уравнение (1) допускает релятивистское обобщение в виде уравнения

$$\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u^\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial \tau^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_\mu} = 0, \tag{10}$$

где τ — собственное время, $\mu, \nu = \overline{0, 3}$.

2. Свободно движущуюся идеальную несжимаемую релятивистскую жидкость описывают системой уравнений [6]

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \tag{11}$$

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 1, \tag{12}$$

$$\partial_\mu u^\mu = 0. \tag{13}$$

Здесь u^μ — компоненты 4-мерного вектора скорости, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$.

Теорема 2. *МАИ системы (11)–(13) является расширенная алгебра Пуанкаре* $\bar{P}(1,3)$ *с базисными элементами*

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad D = x^\mu p_\mu, \qquad I_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{14}$$

где

$$S_{\mu\nu} = u^\mu \tilde{p}_\nu - u^\nu \tilde{p}_\mu, \qquad \tilde{p}_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^\nu}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему. Выпишем здесь только определяющие уравнения для определения $\xi^\mu(x,u)$, $\eta^\nu(x,u)$, $x = \{x_0, \boldsymbol{x}\}$, $u = \{u^0, \boldsymbol{u}\}$:

$$\begin{gathered} \xi^\mu_{u^\nu} = 0, \qquad u^\mu \eta^\nu_\mu = 0, \qquad \eta^\mu - u^\nu \xi^\mu_\nu = A(x,u), \\ \eta^0_{u^0} - \xi^0_0 = \eta^1_{u^1} - \xi^1_1 = \eta^2_{u^2} - \xi^2_2 = \eta^3_{u^3} - \xi^3_3, \qquad g_{\mu\nu}(\eta^\nu u^\mu + u^\nu \eta^\mu) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Общим решением (15) являются функции

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x_\nu + d x_\mu + f_\mu, \qquad \eta^\mu = c_{\mu\nu} u^\nu, \qquad c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}, \tag{16}$$

где $c_{\mu\nu}$, f_μ, d — произвольные постоянные.

Замечание 3. Из явного вида базисных элементов алгебры $\bar{P}(1,3)$ (14) следует, что релятивистскую жидкость, описываемую уравнениями (11)–(13), можно интерпретировать как движение частицы с переменной массой ($p_\mu p^\mu \neq \text{const}$) и бесконечным набором спинов $s = 0, 1, 2, \ldots$ Более подробно об этом описано в работах [10, 11].

Замечание 4. Наряду с системой уравнений (11)–(13) с симметрийной точки зрения допустимы системы уравнений

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \qquad \partial_\mu \partial^\mu \partial_\alpha u^\alpha = 0, \tag{17}$$

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \qquad \partial_\mu (u^\mu u_\alpha u^\alpha) = 0, \tag{18}$$

$$\Box u^\nu + \lambda u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0, \qquad u_\mu u^\mu = 1, \qquad \partial_\alpha (u^\mu \partial_\mu u^\alpha) = 0, \qquad \lambda = \text{const}, \tag{19}$$

симметрия которых во всяком случае не уже, чем симметрия уравнений (11)–(13).

Замечание 5. Алгебра инвариантности уравнений (11), (12) бесконечномерна и содержит, в частности, конформную алгебру $C(1,3)$, порождаемую операторами

$$K_\mu = x_\mu x^\nu p_\nu + u^\mu (u^\nu u^\alpha x_\alpha - x^\nu) \tilde{p}_\nu.$$

3. Движение идеальной несжимаемой сверхтекучей жидкости описывается системой уравнений Эйлера с дополнительным членом Ландау

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_s^i}{\partial t}+v_s^k\frac{\partial v_s^i}{\partial x_k}=0,\\
&\frac{\partial v_n^i}{\partial t}+v_n^k\frac{\partial v_n^i}{\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)^2=0,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{v}_s=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}_n=0,
\end{aligned}\tag{20}$$

где $\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{v}_s$ — векторы скорости нормальной и сверхтекучей компонент жидкости; по индексам s, n суммирования нет.

Теорема 3. *МАИ уравнений (20) является 13-мерная алгебра Ли $A(13)$, базисные элементы которой задаются формулами*

$$\begin{aligned}
&p_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu},\qquad I_a=\varepsilon_{abc}(x_bp_c+u^b\tilde{p}_c+v^b\tilde{\tilde{p}}_c),\qquad x_0p_a+\tilde{p}_a+\tilde{\tilde{p}}_a,\\
&A=x_0(x_\mu p_\mu)+(x_a-2x_0u^a)\tilde{p}_a+(x_a-2x_0v^a)\tilde{\tilde{p}}_a,\\
&D_1=x_ap_a+u^a\tilde{p}_a+v^a\tilde{\tilde{p}}_a,\qquad D_2=x_0p_0-u^a\tilde{p}_a-v^a\tilde{\tilde{p}}_a,
\end{aligned}\tag{21}$$

где приняты обозначения $\tilde{p}_a=\frac{\partial}{\partial u^a}$, $\tilde{\tilde{p}}_a=\frac{\partial}{\partial v^a}$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_s$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_n$, $a,b,c=\overline{1,3}$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 1. Для системы уравнений (20) выполняется принцип относительности Галилея. Более того, уравнения (20) инвариантны относительно проективных преобразований, порождаемых оператором A.

4. Из уравнений (20) видно, что они несимметричны относительно замены $\boldsymbol{v}_n\to\boldsymbol{v}_s$. Поэтому более естественным обобщением уравнений Эйлера для нормальной и сверхтекучей компонент жидкости представляется система вида

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^k\frac{\partial u^i}{\partial x_k}=F_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\underset{1}{\boldsymbol{u}},\underset{1}{\boldsymbol{v}},\ldots,\underset{s}{\boldsymbol{u}},\underset{s}{\boldsymbol{v}}),\\
&\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^k\frac{\partial v^i}{\partial x_k}=F_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\underset{1}{\boldsymbol{u}},\underset{1}{\boldsymbol{v}},\ldots,\underset{s}{\boldsymbol{u}},\underset{s}{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}\tag{22}$$

с дополнительными условиями

$$\Phi^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\underset{1}{\boldsymbol{u}},\underset{1}{\boldsymbol{v}},\ldots,\underset{s}{\boldsymbol{u}},\underset{s}{\boldsymbol{v}})=0,\qquad i,k=\overline{1,3},\quad a=\overline{1,N}.\tag{23}$$

Простейшей системой зацепленных уравнений вида (22), (23) является система

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^k\frac{\partial u^i}{\partial x_k}=0,\\
&\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^k\frac{\partial v^i}{\partial x_k}=0,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{v},\qquad \lambda=\text{const}.
\end{aligned}\tag{24}$$

Уравнения (24) обладают следующей симметрией.

Теорема 4. *МАИ системы уравнений (24) является 16-мерная алгебра Ли* $A(16)$*, базисные элементы которой задаются формулами*

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad G_a = x_0 p_a + \tilde{p}_a + \tilde{\tilde{p}}_a, \qquad K_{ab} = x_a p_b + u^a \tilde{p}_b + v^a \tilde{\tilde{p}}_b, \tag{25}$$

где $\tilde{p}_a = \frac{\partial}{\partial u^a}$, $\tilde{\tilde{p}}_a = \frac{\partial}{\partial v^a}$.

Следствие 2. Операторы K_{ab} порождают следующие линейные преобразования:

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}' = \Lambda \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}' = \Lambda \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}, \tag{26}$$

где Λ — произвольная числовая матрица.

1. Rosen G., Ullrich G.W., Invariance group of the equation $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}$, *SIAM J. Appl. Math.*, 1973, **24**, № 3, 286–288.
2. Lloyd S.P., The infinitesimal group of the Navier–Stokes equation, *Acta Mech.*, 1981, **38**, 85–98.
3. Пухначев В.В., Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае, *Прикл. мех. и техн. физ.*, 1960, № 1, 83–90.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., Наука, 1973, 416 с.
5. Ильюшин А.А., Механика сплошной среды, М., Изд-во МГУ, 1978, 286 с.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Bialynicki-Birula I., Iwinski Z., Canonical formulation of relativistic hydrodynamics, *Repts. Math. Phys.*, 1973, **4**, № 2, 139–151.
8. Паттерман С., Гидродинамика сверхтекучей жидкости, М., Мир, 1978, 520 с.
9. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наук. думка, 1983, 200 с.
10. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
11. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 6–20.
12. Фущич В.И., О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, Сборник научных трудов “Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред”, Киев, Наукова думка, 1986, 146–160.