О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнений Ламе

В.И. ФУЩИЧ, С.Л. СЛАВУЦКИЙ

Уравнение Ламе

$$L\boldsymbol{u} = 0, \qquad L = \Box + \lambda \,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}, \tag{1}$$

является основным уравнением линейной теории упругости. В (1) $\Box$ — оператор Даламбера, $\lambda = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{u} = \{u^1, u^2, u^3\}$ — вектор смещения точек упругой среды.

В [1] обращено внимание на следующее: уравнение Ламе не инвариантно ни относительно преобразований Галилея

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \qquad \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \qquad t' = t, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор-параметр преобразования (скорость одной инерциальной системы отсчета относительно другой), ни относительно преобразований Лоренца. Известные нелинейные обобщения уравнения Ламе также не обладают этим свойством. В связи с этим возникает следующая задача [1]: обобщить уравнение (1) таким образом, чтобы оно было инвариантно относительно преобразований (2). В настоящей работе эта задача решена, т.е. построены нелинейные уравнения в частных производных, инвариантные преобразованиям Галилея (2). Линейная часть в этих уравнениях совпадает с уравнением Ламе (1).

Рассмотрим уравнение

$$L\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \underset{1}{\boldsymbol{u}}, \underset{2}{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{3}$$

где

$$\underset{1}{\boldsymbol{u}} = \left\{\frac{\partial u^a}{\partial x_\mu}\right\}, \qquad \underset{2}{\boldsymbol{u}} = \left\{\frac{\partial^2 u^a}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\right\}, \qquad a = 1,2,3, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \quad x_0 \equiv t,$$

$\boldsymbol{F}$ — произвольная дважды дифференцируемая вектор-функция, которую можно представить в виде

$$\begin{gathered} F^i = A^{\mu\nu}(\boldsymbol{u})u^i_{\mu\nu} + B^\mu_\nu(\boldsymbol{u})u^\nu_{\mu i} + C^\mu(\boldsymbol{u})u^i_\mu + D_\mu(\boldsymbol{u})u^\mu_i + E(\boldsymbol{u})u^i, \\ u = \{\boldsymbol{u}, u^0\}, \qquad u^0 \equiv 1, \qquad i = 1,2,3, \quad \mu = 0,1,2,3. \end{gathered} \tag{4}$$

Всюду по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, нижний индекс у компонент 4-вектора u означает дифференцирование по соответствующей переменной. Тензорные коэффициенты в (4) представим в виде

$$\begin{gathered} A^{\mu\nu}(u) = a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \qquad B^\mu_\nu(u) = b^\mu_{\nu\alpha\beta}u^\alpha u^\beta, \qquad C^\mu(u) = c^\mu_\alpha u^\alpha, \\ D_\mu(u) = d_{\mu\alpha}u^\alpha, \qquad E = e, \qquad \alpha,\beta = 0,1,2,3, \end{gathered} \tag{5}$$

Доклады Академии наук СССР, 1986, **237**, № 2, С. 320–323.

где $a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, $b^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$, $d_{\mu\alpha}$, e — произвольные дважды дифференцируемые тензорные функции, зависящие только от $|\boldsymbol{u}|$.

Теорема 1. *Уравнение (3) при условиях (4), (5) инвариантно относительно преобразований Галилея (2), если*

$$\boldsymbol{F} = -2(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\}\boldsymbol{u}. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся лиевским критерием инвариантности уравнения (3) относительно преобразований (2):

$$\underset{2}{G}_a(L\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F})|_{L\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}=0} = 0, \qquad a = 1,2,3, \tag{7}$$

где

$$\underset{2}{G}_a = x_0\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial u^a} - u^b_a\frac{\partial}{\partial u^b_0} - 2u^b_{a\mu}\frac{\partial}{\partial u^b_{0\mu}}, \qquad b = 1,2,3,$$

есть дважды продолженный (см., например, [2]) оператор

$$G_a = x_0\frac{p}{\partial x_a} - \frac{\partial}{\partial u^a}. \tag{8}$$

Оператор (8) порождает преобразования (2).

Применяя критерий (7) к уравнению (3) и учитывая (4), (5), получим для коэффициентов в (5) следующие условия:

$$a^{00}_{\alpha\beta} + 1 = -\sum_{\mu\neq 0}\sum_{\nu} a^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\neq 0}\sum_{\nu\neq 0} a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \qquad \mu,\nu,\alpha,\beta = 0,1,2,3,$$

$$c^0_\alpha = -\sum_{\mu\neq 0} c^\mu_\alpha, \qquad a^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = a^{\nu\mu}_{\alpha\beta} = a^{\mu\nu}_{\beta\alpha} = a^{\nu\mu}_{\beta\alpha},$$

$$b^\mu_{\nu\alpha\beta} = d_{\mu\alpha} = e = 0, \qquad a^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \mu\wedge\nu \neq \alpha\wedge\beta,$$

$$\frac{\partial a^{\mu\nu}_{\alpha\beta}}{\partial u} = \frac{\partial c^\mu_\alpha}{\partial u} = 0, \qquad c^\mu_\alpha = 0, \qquad \mu\neq\alpha.$$

Отсюда следует, что уравнение (3) может быть записано в виде

$$Lu^i + C_1u^i_{00} - 2(C_1+1)u^au^i_{0a} + (C_1+1)u^au^bu^i_{ab} + C_2u^i_0 - C_2u^au^i_a = 0,$$

где $i = 1,2,3$; C_1, C_2 — произвольные постоянные. В частности, при $C_1 = C_2 = 0$ имеем

$$\Box u^i + \lambda u^a_{ai} - 2u^au^i_{0a} + u^au^bu^i_{ab} = 0,$$

что совпадает с (3), (6) в покомпонентной записи.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор $\boldsymbol{F}$ явно зависит от координат $\boldsymbol{x}$. Очевидно, что такие уравнения (3) не будут инвариантны относительно пространственных сдвигов. В этом случае справедлива

Теорема 2. *Уравнение (3), в котором*

$$\boldsymbol{F} = -2(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\nabla\}\boldsymbol{u} + \{\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\nabla\}\boldsymbol{u} \tag{9}$$

инвариантно относительно преобразований (2).

Доказательство аналогично предыдущему.

С помощью хорошо известного алгоритма Ли [2] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (3) является:*

1) 11-мерная алгебра Ли с базисными элементами

$$P_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_a = \varepsilon_{abc}\left(x_b p_c + u^b \frac{\partial}{\partial u^c}\right), \quad G_a = x_0 p_a - \frac{\partial}{\partial u^a}, \quad D = x_\mu p_\mu, \tag{10}$$

если $\boldsymbol{F}$ определена из (6);

2) 8-мерная алгебра Ли, базис которой образуют операторы p_0, J_a, G_a, D из (10), если $\boldsymbol{F}$ определена из (9).

Операторы p_μ порождают сдвиги по координатам, J_a — пространственные повороты, а оператор D — масштабные преобразования.

В заключение укажем еще один путь получения нелинейных уравнений движения для вектор-функций, в котором используется нелинейное представление алгебры Ли группы Галилея. Оказывается, что помимо хорошо известного линейного представления, задаваемого формулами (10), существует нелинейная реализация этой алгебры. Базисные элементы нелинейного представления алгебры Ли группы Галилея имеют вид

$$\begin{aligned} &p_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad J_a = \varepsilon_{abc}\left(x_b p_c + u^b \frac{\partial}{\partial u^c}\right), \\ &D = x_\mu p_\mu, \qquad G_a^* = x_0 p_a + u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^b}. \end{aligned} \tag{11}$$

Конечные преобразования, порождаемые оператором G_a^* из (11), выражаются формулами

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}t, \qquad \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что вектор-функция при галилеевых переносах преобразуется нелинейным образом.

Более подробно вопрос о построении уравнений движения, инвариантных относительно преобразований (12), будет обсужден в другой работе.

1. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.