О непрерывных подгруппах псевдоортогональных и псевдоунитарных групп

А.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе изучаются подалгебры алгебр $\mathcal{L}O(p,q)$ и $\mathcal{L}U(p,q)$. Найдены все максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебр $\mathcal{L}O(p,q)$ и $\mathcal{L}U(p,q)$. Изучена структура таких подалгебр. Получена формула числа максимально разрешимых подалгебр изотропного ранга r и найдены размерности всех подалгебр такого рода. Полностью изучены максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$ с точностью до $SU(p,q)$-сопряженности. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(V)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $V \niplus \mathcal{L}O(V)$. Изучена структура одномерных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Для алгебр $\mathcal{L}O(p,1)$ и $\mathcal{L}O(p,2)$ полностью проведена классификация подалгебр такого рода. Рассматривается ряд свойств неприводимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$.

Введение

В различных приложениях теории групп в математической и теоретической физике важное значение приобретает задача описания непрерывных подгрупп данной группы Ли с точностью до внутренней сопряженности. Эта задача сводится к описанию относительно определенной сопряженности классов подалгебр данной алгебры Ли. Патера, Винтернитц и Цассенхауз [1] предложили метод для изучения максимальных разрешимых подалгебр полупростых алгебр Ли. С помощью этого метода они нашли в явном виде все $q+1$ максимальных разрешимых подалгебр S_k, $k=0,\ldots,q$, алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$, $p \geq q > 0$. Размерность подалгебры S_k равна $(2k+1)(p+q-k)-1$. Ими же описание максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ было сведено к описанию максимальных разрешимых подалгебр алгебр $\mathcal{L}O(p-1,q-1)$ и $\mathcal{L}O(p-2,q-2)$. Был решен также вопрос о числе максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Отметим, что структура таких подалгебр как в алгебре $\mathcal{L}SU(p,q)$, так и в алгебре $\mathcal{L}O(p,q)$, в указанных работах [1–2] не рассматривалась.

Систематическое изучение подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом начато в работах [3–5]. Методом, предложенным в этих работах, была проведена классификация подалгебр таких алгебр: $\mathcal{L}P(1,3)$ [3], $\mathcal{L}Sim(1,3)$ [4], $\mathcal{L}O(2,3)$ [5], $\mathcal{L}Opt(1,2)$ [5].

В настоящей работе предложен метод для изучения подалгебр алгебр $\mathcal{L}O(p,q)$ и $\mathcal{L}SU(p,q)$ с точностью до $O(p,q)$- и $SU(p,q)$-сопряженности (соответственно). Работа состоит из 8 параграфов. В § 1 найдено полное описание максимальных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$.

В § 2 получено полное описание максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ и, в частности, изучена их структура. Если $\mathcal{L}$ — максимальная разрешимая подалгебра, то важнейшей характеристикой ее является ранг r максимального

Препринт 86.77, Институт математики АН УССР, Киев, 1986, 48 с.

вполне изотропного подпространства N_0, инвариантного относительно подалгебры $\mathcal{L}$. Число r мы называем изотропным рангом подалгебры $\mathcal{L}$. Максимальная разрешимая подалгебра изотропного ранга r алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ обладает таким коммутативным идеалом S, фактор-алгебра $\mathcal{L}/S$ по которому разлагается в полупрямую сумму $V_r^{(p+q-2r)} \subset\!\!\!\!+ (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$ коммутативной подалгебры $V_r^{(p+q-2r)}$ размерности $r(p+q-2r)$ и алгебры $\Phi_1 \oplus \Phi_2$, являющейся прямой суммой максимальной разрешимой вполне приводимой подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$ и максимальной разрешимой подалгебры алгебры $gl(r,R)$.В предлагаемой работе дано полное описание подалгебр S, $V_r^{(p+q-2r)}$, Φ_1, Φ_2. Исходя из этого, получаем разложение алгебры $\mathcal{L}$, рассматриваемой как множество, в декартовое произведение хорошо известных множеств. Получена также формула числа максимальных разрешимых подалгебр изотропного ранга и найдены размерности всех подалгебр такого рода.

В § 3 получено полное описание максимальных и максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$. Эти результаты формулируются аналогично результатам § 2.

В § 4 изучаются вполне приводимые подалгебры конечномерной алгебры $JO(V)$, являющейся полупрямой суммой нетривиального коммутативного идеала V и алгебры $\mathcal{L}O(V)$ линейных преобразований пространства V. Выделены те из них, которые обладает только расщепляемыми в алгебре $JO(V)$. Доказана следующая теорема: вполне приводимая подалгебра $\mathcal{L}$ алгебры $\mathcal{L}O(V)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $\mathcal{L}$ полупроста; 2) $\mathcal{L}$ аннулирует только нулевое подпространство пространства V.

В § 5 рассматривается задача описания одномерных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ с точностью до $O(p,q)$-сопряженности. С этой целью определяется естественное разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2 * \mathcal{L}_3 * \mathcal{L}_4$ подалгебры $\mathcal{L}$ изотропного ранга $r > 0$ в подпрямое произведение проекций $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$ подалгебры $\mathcal{L}$ соответственно на $\mathcal{L}O(r)$, $V_r^{(p+q-2r)}$, $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$ и $gl(r,R)$. Доказано предложение, утверждающее, что если подалгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ изотропного ранга r алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ $O(p,q)$-сопряжены, то подалгебры $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_3'$ $O(p-r,q-r)$-сопряжены, а подалгебры $\mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_4'$ $G\mathcal{L}(r,R)$-сопряжены. Это предложение сводит классификацию одномерных подалгебр изотропного ранга $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ к описанию одномерных подалгебр алгебры $gl(r,R)$ с точностью до $G\mathcal{L}(r,R)$-сопряженности и одномерных вполне приводимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$ с точностью до $O(p-r,q-r)$-сопряженности. Эти результаты и результаты § 4 позволили изучить структуру одномерных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ в общем случае. Для алгебр $\mathcal{L}O(p,1)$ и $\mathcal{L}O(p,2)$ полностью проведена классификация подалгебр такого рода.

В § 6 определяется разложение вполне приводимой подалгебры $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(p,q)$ в подпрямое произведение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s$ неприводимых подалгебр $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(p_i,q_i)$, $p_i \leq p$, $q_i \leq q$. Указанное разложение существенно используется для изучения свойств вполне приводимых подалгебр.

Свойства неприводимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ изучаются в § 7. Эти результаты позволили в § 8 изучить структуру подпространства $V_1 \subset V$, инвариантного относительно вполне приводимой подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Отметим, что полученные результаты относительно непрерывных подгрупп группы $O(p,q)$ без существенных изменений переносятся на случай группы $SU(p,q)$.

§ 1. Максимальные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$

Пусть V — векторное пространство над полем вещественных чисел R, φ — невырожденная квадратичная форма на пространстве V. Для квадратичной формы φ существует такой базис $\{T_1,\ldots,T_{p+q}\}$ пространства V, что

$$\varphi=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{i=p+1}^{p+q}x_i^2.$$

Известно, что пара чисел (p,q) не зависит от выбора базиса, а зависит лишь от φ, и называется сигнатурой формы φ.

Вектор $T\in V$ называется изотропным, если $\varphi(T)=0$. Пространство $V_1\subset V$ называется:

1) изотропным, если существует ненулевой вектор $T\in V_1$, ортогональный к V_1;

2) вполне изотропным, если $\varphi(T)=0$ для любого вектора $T\in V_1$.

Группой $O(p,q)$ называется группа $\{f\in G\mathcal{L}(V)\mid \varphi(T)=\varphi(f(T))\}$, составленная из изометрий пространства (V,φ). Если в базисе $\{T_i\}$ пространства V матрица f равна S, то $f\in O(p,q)$ тогда и только тогда, когда $S^TJ_{p,q}S=J_{p,q}$, где

$$J_{p,q}=\begin{pmatrix}E_p & 0\\ 0 & -E_q\end{pmatrix},$$

E_p — единичная матрица порядка p, S^T — матрица, транспонированная к матрице S. Таким образом, группу $O(p,q)$, где p и q — целые числа, можно определить как группу всех квадратных матриц A порядка $p+q$ над полем вещественных чисел R, удовлетворяющих матричному уравнению

$$A^TJ_{p,q}A=J_{p,q}.$$

Отсюда вытекает, что алгебра $\mathcal{L}O(p,q)$ группы $O(p,q)$ состоит из всех вещественных матриц X, удовлетворяющих соотношению

$$X\cdot J_{p,q}+J_{p,q}\cdot X^T=0.$$

Пространство V будем предполагать реализованным как пространство $(p+q)$-мерных вектор-столбцов над R. Тогда действие элемента J алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ на вектор-столбец T пространства V сводится к обычному умножению T слева на матрицу J, т.е. $[J,T]=J\cdot T$. Тем самым определена алгебра $JO(p,q)$, являющаяся полупрямой суммой пространства V размерности $p+q$ и алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. В дальнейшем алгебру $\mathcal{L}O(p,q)$, действующую на пространстве (V,φ), будем обозначать через $\mathcal{L}O(V)$.

К алгебре $\mathcal{L}O(p,q)$ близко примыкает алгебра $\mathcal{L}SU(p,q)$. По определению она состоит из всех комплексных матриц $X\in sl(p+q,C)$, удовлетворяющих соотношению

$$X^*J_{p,q}+J_{p,q}\cdot X=0,$$

где X^* — матрица, эрмитово-сопряженная X. Алгебра $\mathcal{L}SU(p,q)$ является алгеброй Ли группы $SU(p+q,C)$, которая состоит из всех комплексных матриц $X\in S\mathcal{L}(p+q,C)$, удовлетворяющих соотношению

$$X^*J_{p,q}X=J_{p,q}.$$

Рассматривая подалгебру $\mathcal{L}(p,q)$, мы в настоящем параграфе будем предполагать, что $p \geq q > 0$.

Определение. *Подалгебра $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$ называется вполне приводимой подалгеброй класса 0, если каждое $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство пространства V обладает $\mathcal{L}$-инвариантным прямым ортогональным дополнением.*

Из данного определения вытекает, что подалгебра $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$ вполне приводима класса 0, если V не содержит $\mathcal{L}$-инвариантного вполне изотропного подпространства.

В данной работе, за исключением § 4, вполне приводимые подалгебры класса 0, будем называть вполне приводимыми подалгебрами.

Будем говорить, что подалгебра $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$ относится к классу r или имеет изотропный ранг r, если ранг максимального вполне изотропного подпространства, инвариантного относительно подалгебры $\mathcal{L}$, равен r. Для вполне приводимой подалгебры изотропный ранг полагаем равным нулю.

Изотропный ранг r, очевидно, удовлетворяет соотношению $0 \leq r \leq q$.

Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, не являющаяся вполне приводимой. Если r — изотропный ранг подалгебры $\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство N_0 ранга r. В силу теоремы Витта можно допускать, что $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \ldots, T_r + T_{p+q}\rangle$. Для изучения структуры подалгебры $\mathcal{L}$ воспользуемся следующей конструкцией.

Пусть p и q — целые числа, $p \geq q > 0$. Для натурального числа r, $0 < r \leq q$, рассмотрим алгебру $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и алгебру $gl(r,R)$ всех вещественных квадратных матриц порядка r. Пусть далее $V_r^{(n-2r)}$, $n = p+q$, — множество всех вещественных $r \times (n-r)$-матриц. Это множество превращается в алгебру Ли, если положить $[X,Y] = 0$ для любых двух элементов $X, Y \in V_r^{(n-2k)}$. Если $\mathcal{L}O(p-r,q-r) \oplus gl(r,R)$ — прямая сумма подалгебр $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$ и $gl(r,R)$, $B \in \mathcal{L}O(p-r,q-r)$, $C \in gl(r,R)$ и $X \in V_r^{(n-2r)}$, то положим $[B+C, X] = -X \cdot B + C \cdot X$. Нетрудно убедиться, что относительно этого умножения мы получаем алгебру Ли, являющуюся полупрямой суммой пространства $V_r^{(n-2r)}$ и алгебры $\mathcal{L}O(p-r,q-r) \oplus gl(r,R)$. Полученную алгебру обозначим через $JO(V_r^{(n-2r)})$.

Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная подалгебра класса $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(V)$ и $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \ldots, T_r + T_{p+q}\rangle$ — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{L}$. Ортогональное дополнение к N_0 совпадает с $N = N_0 + N_1$, где $N_1 = \langle T_{r+1}, \ldots, T_{p+q-r}\rangle$. Следовательно, N инвариантно относительно $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L}_0 = \{J_0 \in \mathcal{L} \mid [J, N_1] \subset N_0$, $\mathcal{L}_1 = \{J \in \mathcal{L} \mid [J, N_1] \subset N_1\}$. Докажем, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. Действительно, каждый элемент J подалгебры $\mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & A_2 \\ B_2 & C & B_3 \\ A_2^T & B_4 & D \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где A_1, C, D — квадратные матрицы порядка r, $p+q-2r$ соответственно и $A_1^T = -A_1$, $D^T = -D$. Учитывая принадлежность элемента J алгебре $\mathcal{L}O(p,q)$, из соотношения $J \cdot J_{p,q} + J_{p,q} \cdot J^T = 0$ получаем, что

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}O(p,q).$$

Рассмотрим произвольный элемент $X \in N_1$. Имеем $[J,X] = X' + X_0$, где $X' \in N_1$, $X_0 \in N_0$. Так как $[K,X] = X'$, $[K,N_0] = 0$, то $K \in \mathcal{L}_1$. Следовательно, $B_1 = B_4 = 0$ и ввиду соотношения $[J-K,X] = 0$, которое выполняется для любого $X \in N_1$, получаем, что $J - K \in \mathcal{L}_0$. Поэтому $J \in \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ и тем самым равенство $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ доказано.

Очевидно, $S = \{J \in \mathcal{L} \mid [J,N] = 0\}$ является идеалом алгебры $\mathcal{L}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная подалгебра класса $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(V)$. Тогда фактор-алгебра $\mathcal{L}/S$ изоморфна алгебре $JO(V_r^{(n-2r)})$.*

Доказательство. Каждый элемент подалгебры $\mathcal{L}$ имеет вид (1.1), где A_1, C, D — квадратные матрицы порядка r, $n-2r$, r соответственно и $A_1^T = -A_1$, $D^T = -D$. Матрицу B_1 разобьем на блоки $B_1 = (B_{11}, B_{12})$, где B_{11} — $r \times (p-r)$-матрица, B_{12} — $r \times (q-r)$-матрица. Тогда

$$B_2 = \begin{pmatrix} -B_{11}^T \\ B_{12}^T \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Изучим строение подалгебры $\mathcal{L}_0$. Поскольку N_1 и N_0 состоят соответственно из векторов

$$\begin{pmatrix} 0 \\ X \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} Y \\ 0 \\ Y \end{pmatrix},$$

и $\mathcal{L}_0 N_1 \subset N_0$, то $B_1 X = B_4 X$ и $CX = 0$. Ввиду произвольности X отсюда вытекает, что $B_1 = B_4$, $C = 0$. Кроме того, $\mathcal{L}_0$ оставляет инвариантным подпространство N_0 и потому $A_1 + A_2 = A_2^T + D$, $B_3 = -B_2$. Следовательно, произвольная матрица подалгебры $\mathcal{L}_0$ представляется в виде суммы

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & 0 & -B_2 \\ 0 & B_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & -A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B - B^T \end{pmatrix},$$

где $B \in gl(r,R)$, а B_2 определена равенством (1.2).

Изучим далее структуру подалгебры $\mathcal{L}_1$. Имеем

$$\begin{pmatrix} B_1 X \\ CX \\ B_4 X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B_1 = B_4 = 0$ и потому $\mathcal{L}_1$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & A_2 \\ 0 & C & 0 \\ A_2^T & 0 & D \end{pmatrix},$$

где $A_1 + A_2 = A_2^T + D$. Поэтому каждая матрица подалгебры $\mathcal{L}_1$ разлагается в сумму

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & -A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B-B^T \end{pmatrix},$$

где $C \in \mathcal{L}O(p-r, q-r)$, $B \in gl(r, R)$. Таким образом, каждый элемент J подалгебры $\mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & C & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix},$$

где J_1 — кососимметрическая квадратная матрица порядка r, J_2 — произвольная $r \times (n-2r)$-матрица, $J_3 \in \mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $J_4 \in gl(r, R)$. Определим отображение $\psi: \ \mathcal{J}O(V_r^{(n-2r)})$ по правилу

$$\psi(J) = (J_2, J_3, J_4) \in JO(V_r^{(n-2r)}). \tag{1.3}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ψ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{L}$ на алгебру $JO(V_k^{(n-2r)})$ с ядром S, состоящим из матриц вида

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathcal{L}/S \cong JO(V_r^{(n-2r)})$. Теорема доказана.

Если $r = 1$, то из доказанной теоремы получаем, что максимальная подалгебра класса 1 разлагается в полупрямую сумму $V_1^{(n-2)} \subset\!\!\!+ (\mathcal{L}O(p-1, q-1) \oplus gl(1, R))$, поскольку в этом случае $S = 0$. Так как $gl(1, R) \cong R$, то действие алгебры $gl(1, R)$ на пространстве V_1 сводится к обычному умножению элементов пространства $V_1^{(n-2)}$, на скаляры из поля R. Если $r = 2$, то $\dim_R S = 1$ и $\mathcal{L}/S \cong V_2^{(n-4)} \subset\!\!\!+ (\mathcal{L}O(p-2, q-2) \oplus gl(2, R))$.

Разложение (1.3), полученное при доказательстве теоремы 1.1, означает, что соответствие $J \leftrightarrow (J_1, J_2, J_3, J_4)$ является взаимно однозначным соответствием между элементами алгебры $\mathcal{L}$ и элементами декартового произведения $\mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \mathcal{L}O(p-r, q-r) \times gl(r, R)$. В этом смысле будем говорить, что $\mathcal{L}$ разлагается в декартово произведение $\mathcal{L}O(r)$, $V_r^{(n-2r)}$, $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$, $gl(r, R)$ и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \mathcal{L}O(p-r, q-r) \times gl(r, R).$$

§ 2. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$

В силу теоремы 1.1 любая максимальная подалгебра $\mathcal{L}$ класса r алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$ содержит такой разрешимый идеал S_1, фактор-алгебра $\mathcal{L}/S_1$ по которому является прямой суммой подалгебр $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $gl(r, R)$. Поэтому максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$ определяет максимальные разрешимые подалгебры Φ_1 и Φ_2 алгебр $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $gl(r, R)$ соответственно. Исследуем структуру подалгебр Φ_1 и Φ_2.

Пусть $W_1 = \langle T_1, \dots, T_p \rangle$, $W_2 = \langle T_{p+1}, \dots, T_{p+q} \rangle$, φ_i — ограничение квадратичной формы φ на подпространство W_i $(i = 1, 2)$. Группы изометрий пространств (W_1, φ_1) и (W_2, φ_2) обозначим соответственно через $O(p)$ и $O(q)$, а их алгебры Ли — через $\mathcal{L}O(p)$ и $\mathcal{L}O(q)$. Справедлив следующий результат.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$. Тогда число pq четное и алгебра $\mathcal{L}$ $O(p, q)$-сопряжена подалгебре $\mathcal{L}'$, разлагающейся в прямую сумму $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ максимальных коммутативных подалгебр $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ алгебр $\mathcal{L}O(p)$ и $\mathcal{L}O(q)$ соответственно. Размерность подалгебры $\mathcal{L}$ равна $\left[\frac{p+q}{2}\right]$ (целая часть от $\frac{p+q}{2}$).*

Доказательство. Заметим, что квадратичная форма φ определяет скалярное произведение на векторном пространстве V. Скалярное произведение векторов X и Y пространства V будем обозначать через $X \cdot Y$. Так как $\mathcal{L}$ вполне приводима, то пространство V разлагается в прямую ортогональную сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ $\mathcal{L}$-неприводимых подпространств $V_1, \dots, V_s$. Согласно теореме Ли о разрешимых подалгебрах $\dim_R V_i \le 2$. Если $\dim_R V_i = 2$, то в силу теоремы Витта можно предполагать, что $V_i = \langle T_{i_1}, T_{i_2} \rangle$, где $T_{i_1}, T_{i_2} \in \langle T_1, \dots, T_{p+q} \rangle$. Поэтому в случае $T_{i_1}^2 = 1$, $T_{i_2}^2 = -1$ получаем, что $\mathcal{L}$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $\langle T_{i_1} + T_{i_2} \rangle$, что противоречит предположению. Таким образом, $T_{i_1}^2 = T_{i_2}^2 = 1$, или $T_{i_1}^2 = T_{i_2}^2 = -1$, и потому $V_i \subset \langle T_1, \dots, T_p \rangle$, или $V_i \subset \langle T_{p+1}, \dots, T_{p+q} \rangle$. В частности, число pq — четное.

Пусть $\mathcal{L}_i = \{J \in \mathcal{L}O(p, q) \mid [J, V_i] \subset V_i \ \wedge \ [J, V_j] = 0, \text{ если } i \ne j\}$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{L}_i$ — подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$ и $[\mathcal{L}, \mathcal{L}_i] \subset \mathcal{L}_i$. Так как $\mathcal{L}_i$ — разрешимая, то в силу максимальности $\mathcal{L}$ отсюда вытекает, что $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$. Таким образом, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_s$, что и доказывает предложение.

Предложение 2.2. *Максимальная разрешимая подалгебра $\mathcal{L}$ алгебры $gl(r, R)$ сопряжена подалгебре матриц*

$$Z^{-1}\mathcal{L}Z = \begin{pmatrix} \Delta_1(\mathcal{L}) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_s(\mathcal{L}) \end{pmatrix},$$

где $\Delta_i(\mathcal{L})$ — неприводимая разрешимая подалгебра вещественных матриц порядка 1 или 2. Если $\deg \Delta_i = 1$, то $\Delta_i(\mathcal{L}) = R$; если $\deg \Delta_i = 2$, то

$$\Delta_i(\mathcal{L}) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две максимальные разрешимые подалгебры $Z^{-1}\mathcal{L}Z$ и

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \Delta_1'(\mathcal{L}') & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_t'(\mathcal{L}') \end{pmatrix}$$

сопряжены (изоморфны) тогда и только тогда, когда $s = t$ *и* $\Delta_i(\mathcal{L}) = \Delta_i'(\mathcal{L}')$ *для всех* $i = \overline{1, \ldots, s}$.

Доказательство. Согласно теореме Ли неприводимое представление разрешимой алгебры Ли $\mathcal{L}$ над полем R имеет размерность 1 или 2. Следовательно, существует такая невырожденная матрица $Z \in G\mathcal{L}(r, R)$, что $\bar{\mathcal{L}} = Z^{-1}\mathcal{L}Z$ имеет вид (2.2), где Δ_i — неприводимое представление алгебры $\mathcal{L}$ над R степени 1 или 2. Из разрешимости и максимальности $\mathcal{L}$ вытекает, что $\Delta_i(\mathcal{L})$ — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $gl(\alpha_i, R)$, $\alpha_i = \deg \Delta_i$. Поэтому, если $\alpha_i = 1$, то $\Delta_i(\mathcal{L}) = R$; если $\alpha_i = 2$, то

$$\Delta_i(\mathcal{L}) = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждой максимальной разрешимой подалгебре алгебры $gl(r, R)$ соответствует набор чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, удовлетворяющих следующим условиям: $1 \le \alpha_i \le 2$; $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i = r$. Докажем, что различные наборы определяют несопряженные (неизоморфные) подалгебры. Доказательство этого утверждения проведем, следуя статье [2].

Действительно, пусть V_r^1 — пространство r-мерных вектор-столбцов над R и V_1 — подпространство V_r^1, натянутое на первые α_1 единичных r-векторов. Очевидно, V_1 — минимальное ненулевое $\bar{\mathcal{L}}$-инвариантное подпространство пространства V_r^1. Подпространство V_1 аннулируется нильпотентной подалгеброй $\mathcal{L}_0$, состоящей из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \Theta_s \end{pmatrix},$$

где Θ_i — нулевая квадратная матрица порядка α_i. Нетрудно убедиться, что r-столбец, который аннулируется подалгеброй $\mathcal{L}_0$, является линейной комбинацией первых α_1 единичных r-векторов и потому принадлежит V_1. Таким образом, V_1 однозначно определяется подалгеброй $\bar{\mathcal{L}}$ и $\alpha_1 = \dim_R V_1$. Аналогично подалгебра $\mathcal{L}'$ определяет подпространство $V_1' \subset V_r^1$, причем $\alpha_1' = \dim_R V_1'$. Следовательно, если $\alpha_1 \ne \alpha_1'$, то подалгебры $\bar{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}'$ не сопряжены (не изоморфны). Предложение доказано.

Исследуем далее структуру максимальной разрешимой подалгебры $\mathcal{L}$ класса $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$.

Прежде всего отметим, что поскольку $[S, N] = 0$, то ввиду гомоморфизма (1.4) определено действие алгебры $JO(V_r^{(n-2r)})$ на пространстве N. Если M — подалгебра $JO(V_r^{(n-2r)})$, M' — ее проекция на подалгебру $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и существует вполне изотропное M'-инвариантное подпространство $N_0' \subset \langle T_{r+1}, \ldots, T_{p+q-r}\rangle$, то подалгебра M оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $N_0 \oplus N_0'$. Следовательно и подалгебра $\psi^{-1}(M)$ оставляет инвариантным вполне изотропное подпространство $N_0 \oplus N_0'$. Учитывая данное замечание и доказанную теорему 1.1, получаем следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{L}$ *— максимальная разрешимая подалгебра класса* r *алгебры* $\mathcal{L}O(V)$. *Тогда* $S \subset \mathcal{L}$ *и фактор-алгебра* $\mathcal{L}/S$ *изоморфна алгебре* $V_r^{(n-2r)} \mathbin{\supset\!\!\!+}$

$(\Phi_1 \oplus \Phi_2) \subset JO(V_r^{(n-2r)})$, где Φ_1 — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$; Φ_2 — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $gl(r, R)$. Изоморфизм $\mathcal{L}/S \cong V_r^{(n-2r)} \oplus (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$ индуцируется гомоморфизмом (1.4).

Таким образом, максимальная разрешимая подалгебра $\mathcal{L}$ класса r алгебры $\mathcal{L}O(V)$, рассматриваемая как множество, разлагается в декартово произведение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2.$$

Пусть $\mathcal{L}'$ — максимальная разрешимая подалгебра класса r' алгебры $\mathcal{L}O(V)$ и

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}O(r') \times V_{r'}^{(n-2r')} \times \Phi_1' \times \Phi_2'.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Алгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ $O(p,q)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $r = r'$; Φ_1 и Φ_1' $O(p-r, q-r)$-сопряжены, Φ_2 и Φ_2' $G\mathcal{L}(r, R)$-сопряжены.*

Здесь $G\mathcal{L}(r, R)$ — группа всех обратимых квадратных матриц порядка r над полем R.

Доказательство. *Необходимость.* Если подалгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ $O(p,q)$-сопряжены, то максимальное вполне изотропное подпространство N_0, инвариантное относительно $\mathcal{L}$, отображается на максимальное вполне изотропное подпространство N_0', инвариантное относительно $\mathcal{L}'$. Следовательно, $N_0 = N_0'$ и $r = r'$. Поэтому Φ_1 и Φ_1' являются максимальными вполне приводимыми подалгебрами алгебры $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и в силу предложения 2.1 сопряжены относительно группы $O(p-r, q-r)$. Докажем сопряженность подалгебр Φ_2 и Φ_2' относительно общей линейной группы $G\mathcal{L}(r, R)$. Если $r = 1$, то $gl(2, R)$ содержит только две максимальные разрешимые подалгебры размерностей 2 и 3 соответственно и потому сопряженность Φ_2 и Φ_2' очевидна. Пусть $r > 2$, тогда аннулятор подпространства N_0 в алгебре $\mathcal{L}$ совпадает с подалгеброй $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1$, а в алгебре $\mathcal{L}'$ — с подалгеброй $\mathcal{L}_1' = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1'$. Отсюда вытекает, что $O(p,q)$-автоморфизм ψ, отображающий $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$, отображает $\mathcal{L}_1$ на $\mathcal{L}_1'$ и потому $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}'/\mathcal{L}_1'$. Так как $\mathcal{L}/\mathcal{L}_1 \cong \Phi_2$, а $\mathcal{L}'/\mathcal{L}_1' \cong \Phi_2'$, то $\Phi_2 \cong \Phi_2'$. Применяя предложение 2.2, получаем, что Φ_2 и Φ_2' сопряжены относительно группы $G\mathcal{L}(r, R)$.

Докажем *достаточность*. Поскольку Φ_1 и Φ_1' $O(p-r, q-r)$-сопряжены, то существует такая матрица $C_1 \in O(p-r, q-r)$, что $\Phi_1 = C_1^{-1}\Phi_1' C_1$. Тогда $O(p,q)$-автоморфизм ψ_1, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \in O(p_1, q_1),$$

отображает алгебру $\mathcal{L}'$ на алгебру $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}O(r) \times V_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2'$. Далее, так как всякий элемент $X \in G\mathcal{L}(r, R)$ записывается в виде $X = C_2 \exp U$ (полярное разложение), где $C_2 \in O(r)$, U — симметрическая матрица, то достаточно ограничится случаем, когда Φ_2 и Φ_2' $O(r)$-сопряжены. Пусть $C_2^{-1}\Phi_2' C_2 = \Phi_2$. Тогда $O(p,q)$-автоморфизм ψ_2, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \in O(p,q),$$

отображает $\bar{\mathcal{L}}$ на алгебру $\mathcal{L}$. Следовательно, алгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ $O(p,q)$-сопряжены. Предложение доказано.

Теорема 2.1 и предложение 2.3 сводят описание максимальных разрешимых подалгебр класса r к описанию максимальных вполне приводимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$ и максимальных разрешимых подалгебр алгебры $gl(r,R)$ с точностью до сопряженности.

Предложение 2.4. *Пусть r — изотропный ранг максимальной разрешимой подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$, σ_r — число таких подалгебр. Тогда*

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^r - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^r\right] \tag{2.1}$$

и справедливы следующие утверждения:

1) если p и q имеют разную четность, то $r = 1,2,\ldots,q$;

2) если p и q четные, то $r = 2,4,\ldots,q$;

3) если p и q нечетные, то $r = 1,3,\ldots,q$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 и 3 предложения 2.4 вытекают из теоремы 2.2 и предложения 2.3. Далее, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, и согласно предложению 2.3 $\sigma_r = \sigma_{r-1} + \sigma_{r-2}$. Следовательно, числа последовательности $\{\sigma_n\}$ являются числами Фибоначчи. Но тогда справедливость формулы (2.3) вытекает из результатов статьи [2]. Предложение доказано.

Ввиду теоремы 2.2 и предложений 2.1 и 2.2 размерность $d(\mathcal{L})$ максимальной разрешимой подалгебры $\mathcal{L}$ ранга r можно вычислить по формуле

$$d(\mathcal{L}) = \frac{r^2-r}{2} + r(p+q-2r) + \left[\frac{p+q}{2}\right] + \theta, \tag{2.2}$$

где θ — размерность максимальной разрешимой подалгебры алгебры $gl(r,R)$. Согласно предложению 2.4 такая подалгебра полностью определяется набором чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$ и потому

$$\theta = \frac{r^2-r}{2} + s, \qquad s = \left[\frac{r+1}{2}\right],\ldots,q.$$

При использовании формулы (2.2) следует иметь в виду, что числа p, q и r должны удовлетворять условиям предложения 2.4.

Сделаем еще одно замечание о максимальных разрешимых подалгебрах алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Из предложения 2.1 вытекает, что если число pq четное, то существует единственная максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра, являющаяся подалгеброй Картана и обладающая базисом $\{(E_{12}-E_{21}),(E_{34}-E_{43}),\ldots,(E_{2[\frac{p}{2}]-1,2[\frac{p}{2}]}-E_{2[\frac{p}{2}],2[\frac{p}{2}]-1}),(E_{p+1,p+2}-E_{p+2,p+1}),\ldots,(E_{p+2[\frac{q}{2}]-1,p+2[\frac{q}{2}]}-E_{p+2[\frac{q}{2}],p+2[\frac{q}{2}]-1})\}$, где E_{ik} — квадратная матрица порядка n, у которой все элементы нули, за исключением элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и k-го столбца и равного 1. Если подалгебра не является вполне приводимой, то она полностью определяется изотропным рангом r и набором целых чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, удовлетворяющих двум условия: 1) $1 \le \alpha_i \le 2$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i = r$.

§ 3. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$

Предложенный в предыдущих параграфах подход к описанию максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ без изменений может быть перенесен на алгебру $\mathcal{L}SU(p,q)$, $p \geq q > 0$. Структура максимальной вполне приводимой разрешимой подалгебры алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$ выясняется в следующем предложении.

Предложение 3.1 [1]. *Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$. Тогда она $SU(p,q)$-сопряжена подалгебре*

$$\begin{pmatrix} i\lambda_1 & & & 0 \\ & i\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & i\lambda_{p+q} \end{pmatrix},$$

где λ_i — вещественное число и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{p+q} = 0$.

Изучим вначале максимальные и максимальные разрешимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$, $p \geq q > 0$. Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная подалгебра класса r алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$ и $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \ldots, T_r + T_{p+q} \rangle$ — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{L}$. Ортогональное дополнение к N_0 совпадает с $N = N_0 \oplus N_1$, $N_1 = \langle T_{r+1}, \ldots, T_{p+q-r} \rangle$, и потому N инвариантно относительно $\mathcal{L}$. Подалгебра $S = \{J \in \mathcal{L} \mid [J,N] = 0\}$ является идеалом алгебры $\mathcal{L}$.

Каждый элемент $J \in \mathcal{L}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} J = &\begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^* & 0 & J_4 - J_4^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $J_1^* = -J_1$, $J_3 \in \mathcal{L}U(p-r, q-r)$, $J_4 \in gl(r,C)$, $J_2 = (J_{21}, J_{22})$, J_{21} — $r \times (p-r)$-матрица, J_{22} — $r \times (q-r)$-матрица,

$$J_2' = \begin{pmatrix} -J_{21}^* \\ J_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{V}_r^{(n-2r)}$ — множество всех комплексных $r \times (n-2r)$-матриц. Это множество превращается в алгебру Ли, если положить $[X,Y] = 0$ для любых двух элементов $X, Y \in \bar{V}_r^{(n-2r)}$. Если $\mathcal{L}U(p-r, q-r) \oplus gl(r,C)$ — прямая сумма подалгебр $\mathcal{L}U(p-r,q-r)$ и $gl(r,C)$, $B \in \mathcal{L}U(p-r,q-r)$, $D \in gl(r,C)$, $X \in \bar{V}_r^{(n-2r)}$, то положим $[B+D, X] = X \cdot B + D \cdot X$. Нетрудно убедиться, что относительно этого умножения мы получаем алгебру Ли, являющуюся полупрямой суммой пространства $\bar{V}_r^{(n-2r)}$ и алгебры $\mathcal{L}U(p-r,q-r) \oplus gl(r,C)$. Полученную алгебру обозначим через $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$.

Определим отображение $\psi : \mathcal{L} \to JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$ по правилу

$$\psi(J) = (J_2, J_3, J_4) \in JU(\bar{V}_r^{(n-2r)}). \tag{3.2}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ψ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{L}$ на алгебру $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$ с ядром S, состоящим из матриц вида

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорему 3.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная подалгебра класса $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Тогда фактор-алгебра $\mathcal{L}/S$ изоморфна алгебре $JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$.*

Разложение (3.1) означает, что соответствие $J \leftrightarrow (J_1, J_2, J_3, J_4)$ является взаимно однозначным между элементами подалгебры $\mathcal{L}$ и элементами декартова произведения $\mathcal{L}U(r)\times\bar{V}_r^{(n-2r)}\times\mathcal{L}U(p-r,q-r)\times gl(r,C)$ (рассматриваемыми как множества). В этом смысле будем говорить, что $\mathcal{L}$ разлагается в декартово произведение $\mathcal{L}U(r)$, $\bar{V}_r^{(n-2r)}$, $\mathcal{L}U(p-r,q-r)$, $gl(r,C)$, и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(n-2r)} \times \mathcal{L}U(p-r,q-r) \times gl(r,C).$$

Максимальные разрешимые подалгебры класса r алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$ описываются такой теоремой.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — максимальная разрешимая подалгебра класса r алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$. Тогда $S \subset \mathcal{L}$ и фактор-алгебра $\mathcal{L}/S$ изоморфна алгебре $\bar{V}_r^{(n-2r)} \subset\!\!\!\!+ (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \subset JU(\bar{V}_r^{(n-2r)})$, где Φ_1 — максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}U(p-r,q-r)$, Φ_2 — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $gl(r,C)$. Изоморфизм $\mathcal{L}/S \cong \bar{V}_r^{(n-2r)} \subset\!\!\!\!+ (\Phi_1 \oplus \Phi_2)$ индуцируется гомоморфизмом (3.2).*

Таким образом, максимальная разрешимая подалгебра $\mathcal{L}$ класса r алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$, рассматриваемая как множество, разлагается в декартово произведение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(p+q-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2.$$

Если $\mathcal{L}'$ — некоторая другая максимальная разрешимая подалгебра класса r' алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$ и

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}U(r') \times \bar{V}_{r'}^{(p+q-2r)} \times \Phi_1' \times \Phi_2'$$

— соответствующее разложение, то справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. *Алгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ $U(p,q)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $r = r'$, Φ_1 и Φ_1' $U(p-r,q-r)$-сопряжены, Φ_2 и Φ_2' $G\mathcal{L}(r,C)$-сопряжены.*

Так как $gl(r,C)$ содержит только одну максимальную разрешимую подалгебру с точностью до $G\mathcal{L}(r,C)$-сопряженности и существует только одна максимальная вполне приводимая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}U(p-r,q-r)$, то из предложения 3.2 и теоремы 3.2 вытекает, что $\mathcal{L}U(p,q)$ содержит только одну максимальную разрешимую подалгебру класса r для любого r, $0 < r \le q$. Эта алгебра имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}U(r) \times \bar{V}_r^{(n-2r)} \times \Phi_1 \times \Phi_2, \tag{3.3}$$

где

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} i\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\lambda_{p-r,q-r} \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in R, \qquad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь уже нетрудно получить все $q+1$ максимальных разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$. Действительно, каждой максимальной разрешимой подалгебре $\mathcal{L}$ алгебры $\mathcal{L}U(p,q)$, определяемой равенством (3.3), соответствует точно одна максимальная разрешимая подалгебра $\mathcal{M}$ алгебры $\mathcal{L}SU(p,q)$. Если $J=(J_1,J_2,J_3,J_4)\in \mathcal{L}$ общий элемент подалгебры $\mathcal{L}$, то $J\in\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr} J_3 + \operatorname{Tr}(J_4 - J_4^*) = 0$, где $\operatorname{Tr} J_3$ — след матрицы J_3.

§ 4. Подалгебры конечномерных алгебр Ли с абелевым радикалом

В настоящем параграфе мы рассматриваем конечномерную алгебру Ли $JO(V)$, являющуюся полупрямой суммой нетривиального коммутативного идеала V и полупростой подалгебры $\mathcal{L}O(V)$. Пусть π — проектирование $JO(V)$ на $\mathcal{L}O(V)$, $\bar{\mathcal{L}}$ — такая подалгебра $JO(V)$, что $\pi(\bar{\mathcal{L}})=\mathcal{L}$. Если $\bar{\mathcal{L}}$ сопряжена с помощью внутреннего автоморфизма алгебры $JO(V)$ алгебре $N \subset\!\!\!\!+ \mathcal{L}$, где N — $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство пространства V, то $\bar{\mathcal{L}}$ будем называть расщепляемой в алгебре $JO(V)$. Если любая подалгебра $\bar{\mathcal{L}}\subset JO(V)$, удовлетворяющая условию $\pi(\bar{\mathcal{L}})=\mathcal{L}$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}O(V)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$. Примерами таких подалгебр являются все полупростые подалгебры. В данном параграфе в классе всех подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(V)$ выделены вполне приводимые подалгебры и изучены их свойства. Подалгебра $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}O(V)$ называется вполне приводимой, если каждое $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство пространства V обладает $\mathcal{L}$-инвариантным прямым дополнением. Известно, что если $JO(V)$ является алгеброй Евклида $V \subset\!\!\!\!+ \mathcal{L}O(n)$, то все подалгебры ортогональной алгебры $\mathcal{L}O(n)$ вполне приводимы. При изучении структуры произвольной подалгебры алгебры $JO(V)$ необходимо существенно использовать свойства вполне приводимых подалгебр алгебры $JO(V)$. В настоящем параграфе доказана следующая теорема: вполне приводимая подалгебра $\mathcal{L}$ алгебры $\mathcal{L}O(V)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $\mathcal{L}$ — полупроста; 2) $\mathcal{L}$ аннулирует только нулевое подпространство пространства V. Эта теорема и другие результаты о вполне приводимых подалгебрах, рассмотренные в следующих параграфах, позволяют изучить структуру произвольной подалгебры $\bar{\mathcal{L}}\subset JO(V)$, проекция которой на $\mathcal{L}O(V)$ вполне приводима. Отметим, что частные случаи сформулированной теоремы рассматривались в [7–10].

Пусть $\mathcal{L}\subset\mathcal{L}O(V)$ и X — произвольный элемент V. Пересечение всех $\mathcal{L}$-инвариантных подпространств, пространства V, содержащих X, будем называть $\mathcal{L}$-подпространством, порожденным X. Если $\langle B\rangle$ — одномерная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, то она определяет подпространства $\operatorname{Ker} B=\{X\in V \mid [B,X]=0\}$ и $\operatorname{Im} B=\{X\in V\mid [B,Y]=X,\ Y\in V\}$.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, B — произвольный элемент подалгебры $\mathcal{L}$. Тогда* $V=\operatorname{Ker} B\oplus \operatorname{Im} B$.

Доказательство. Если $Y \in \operatorname{Ker} B$, $D \in \mathcal{L}$, то используя тождество Якоби

$$[[B,D],Y] + [[D,Y,B] + [[Y,B],D] = 0$$

и соотношения $[B,D] = 0$, $[Y,B] = 0$, получаем, что $[[D,Y],B] = 0$, а значит, $[D,Y] \in \operatorname{Ker} B$. Следовательно, $[\mathcal{L}, \operatorname{Ker} B] \subset \operatorname{Ker} B$. Так как $\mathcal{L}$ вполне приводима, то $V = \operatorname{Ker} B \oplus V'$, где V' инвариантно относительно $\mathcal{L}$. Поэтому $[B,V] = [B,V'] \subset V'$. Отсюда вытекает, что $[B,V'] = V'$, а значит, $\operatorname{Im} B = V'$. Следовательно, $V = \operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{Im} B$. Предложение доказано.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, B — ненулевой элемент подалгебры $\mathcal{L}$. Тогда пространство $\operatorname{Im} B$ разлагается в прямую сумму подпространств, неприводимых и инвариантных относительно подалгебры $\langle B\rangle$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}$ вполне приводима, то пространство V разлагается в прямую сумму $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ $\mathcal{L}$-неприводимых инвариантных подпространств V_i. Размерность $\dim V_i$ каждого из подпространств V_i равна 1 или 2. Пусть $J_i = \{X \in V_i \mid [B,X] = 0\}$. Нетрудно убедиться, что подпространство J_i инвариантно относительно $\mathcal{L}$ и в силу неприводимости V_i $J_i = 0$ или $J_i = V_i$. В первом случае $V_i \subset \operatorname{Im} B$, во втором — $V_i \subset \operatorname{Ker} B$. Отсюда вытекает, что подпространство $\operatorname{Im} B$ является прямой суммой всех тех подпространств V_i, каждое из которых, содержится в $\operatorname{Im} B$.

Рассмотрим произвольное подпространство V_i, содержащееся в $\operatorname{Im} B$. Если $\dim V_i = 1$, то V_i B-неприводимо. Пусть далее $\dim V_i = 2$ и подпространство V_i B-приводимо. Тогда существует такой базис пространства V_i, относительно которого матрица B_i линейного оператора $\operatorname{ad} B$ имеет вид

$$B_i = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in R$. С другой стороны, $B_i \in gl(2,R)$ и потому B_i подобна над полем вещественных чисел матрице, содержащейся в алгебре

$$R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B_i = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и потому V_i разлагается в прямую сумму двух B-неприводимых подпространств. Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Пусть $\langle B\rangle$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$. Если из условия $[B,X] = 0$, $X \in V$ вытекает, что $X = 0$, то подалгебра $\langle B\rangle$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$.*

Доказательство. Пусть $\langle B + X\rangle$, $X \in V$, — одномерная подалгебра алгебры $JO(V)$. Возьмем какой-либо базис $P_1, \ldots, P_s$ пространства V и пусть

$$\begin{aligned} &(\exp P_1)(B) = B + X_1, \qquad X_1 \in V, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\exp P_s)(B) = B + X_s, \qquad X_s \in V. \end{aligned}$$

Докажем, что $X_1, \dots, X_s$ — базис пространства V. Действительно, предположим, что $X_1, \dots, X_s$ линейно зависимы. Тогда существуют такие вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ (не все равные нули), что

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s = 0.$$

Так как V — коммутативная подалгебра, то $(\exp \alpha_i P_i)(B) = B + \alpha_i X_i$, значит,

$$(\exp \alpha_1 P_1 \cdots \exp \alpha_s P_s)(B) = B + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_s X_s = B.$$

Поскольку

$$\exp \alpha_1 P_1 \cdots \exp \alpha_s P_s = \exp(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s),$$

то $[\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s, B] = 0$ и потому $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s = 0$, что противоречит предложению. Полученное противоречие доказывает, что $X_1, \dots, X_s$ — базис V. Следовательно, $X = \gamma_1 X_1 + \dots + \gamma_s X_s$, $\gamma_i \in R$, и потому

$$(\exp(-\gamma_1 P_1 - \dots - \gamma_s P_s))(B + X) = B - \gamma_1 X_1 - \dots - \gamma_s X_s + X = B.$$

Предложение доказано.

Из доказательства настоящего предложения вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 4.4. *Пусть $\langle B + X \rangle$ — одномерная подалгебра алгебры $JO(V)$, $B \in \mathcal{L}O(V)$, $X \in V$. Если $V = \operatorname{Im} B \oplus \operatorname{Ker} B$, то подалгебра $\langle B + X \rangle$ с помощью некоторого автоморфизма $\exp P$, $P \in V$, сопряжена подалгебре $\langle B + X' \rangle$, $X' \in \operatorname{Ker} B$.*

Предложение 4.5. *Пусть $\mathcal{L}_1$ — вполне проводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, которая аннулирует только нулевое подпространство пространства V, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \langle J \rangle$, $J \in \mathcal{L}O(V)$. Если подалгебра $\bar{\mathcal{L}}$ алгебры $JO(V)$, удовлетворяющая условию $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$, содержит элемент $J + X$, $X \in V$, и подалгебру $\mathcal{L}_1$, то $J \in \bar{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Обозначим черв M $\mathcal{L}_1$-подпространство пространства V, порожденное X. Пространство M разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathcal{L}_1$-подпространств: $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_s$. Докажем индукцией по числу s, что $J \in \bar{\mathcal{L}}$.

Пусть $s = 1$. По условию $[\mathcal{L}_1, X] \neq 0$, и потому существует такой элемент $J' \in \mathcal{L}_1$, что $[J', X] = X'$, $X' \neq 0$; $\mathcal{L}_1$-подпространство M_1', порожденное X', содержится в M_1 и в силу неприводимости последнего $M_1' = M_1$. Поскольку $X' \in \bar{\mathcal{L}}$, то $M_1' \subset \bar{\mathcal{L}}$ и потому $X \in \bar{\mathcal{L}}$. Следовательно, $J \in \bar{\mathcal{L}}$.

Пусть $s > 1$, $X = X_1 + \dots + X_s$, где $X_i \in M_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Существует такой элемент $J' \in \mathcal{L}_1$, что $[J', X] = X' \neq 0$. Рассмотрим разложение $X' = X_1' + \dots + X_s'$, где $X_i' \in M_i$ $(i = 1, \dots, s)$ и будем считать, что $X_1' \neq 0$. Обозначим через M' $\mathcal{L}_1$-подпространство M, порожденное X'. Очевидно, $M' \subset \bar{\mathcal{L}}$. Проекция M_1' пространства M' на подпространство M_1 является $\mathcal{L}_1$-подпространством. Отсюда в силу неприводимости M_1 заключаем, что $M_1' = M_1$. Следовательно, M', а значит, и $\bar{\mathcal{L}}$ содержит элемент вида $X_1 + X_2 + \dots + X_s$, где $X_i \in M_i$ $(i = 2, \dots, s)$. Но тогда $J + (X_2 - \bar{X}_2) + \dots + (X_s - \bar{X}_s) \in \bar{\mathcal{L}}$. В силу индуктивного предположения отсюда вытекает, что $J \in \bar{\mathcal{L}}$. Предложение доказано.

Терема 4.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$. Если $\mathcal{L}$ аннулирует только нулевое подпространство пространства V,* *то подалгебра $\mathcal{L}$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$.*

Доказательство. Пусть $B_1, \ldots, B_s$ — базис подалгебры $\mathcal{L}$, $\bar{\mathcal{L}}$ — подалгебра $JO(V)$, удовлетворяющая условию $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. Базис подалгебры $\bar{\mathcal{L}}$ можно выбрать в виде $B_1 + X_1, \ldots, B_s + X_s, Y_1, \ldots, Y_t$, где $X_i \in V$, $Y_j \in V$. Поскольку $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра, то для любого B_i $V = \mathrm{Im}\ B_i \oplus \mathrm{Ker}\ B_i$ (предложение 4.1). Если $Y \in \mathrm{Ker}\ B_i$, $B \in \mathcal{L}$, то используя тождество Якоби

$$[[B_i, B], Y] + [[B, Y], B_i] + [[Y, B_i], B] = 0$$

и соотношения $[B_i, B] = 0$, $[Y, B_i] = 0$, получаем, что $[[B, Y], B_i] = 0$, а значит, $[B, Y] \in \mathrm{Ker}\ B_i$, т.е. $[\mathcal{L}, \mathrm{Ker}\ B_i] \subset \mathrm{Ker}\ B_i$. Аналогично $[\mathcal{L}, \mathrm{Im}\ B_i] \subset \mathrm{Im}\ B_i$.

Пусть $\mathcal{L}_d = \langle B_1 + X_1, \ldots, B_d + X_d, Y_1, \ldots, Y_t\rangle$, $d = 1, \ldots, s$. Докажем индукцией по d, что подалгебра $\mathcal{L}_d$ с помощью некоторого автоморфизма $\exp P$, $P \in V$, сопряжена подалгебре $\langle B_1 + X_1', \ldots, B_d + X_d', Y_1, \ldots, Y_t\rangle$, где $X_1', \ldots, X_d' \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_d$. Если $d = 1$ то это утверждение вытекает из предложения 4.4. Пусть $d > 1$. Согласно индуктивному предположению подалгебра $\mathcal{L}_{d+1}$ сопряжена подалгебре $\mathcal{L}'_{d+1} = \langle B_1 + X_1', \ldots, B_d + X_d', B_{d+1} + Z, Y_1, \ldots, Y_t\rangle$, где $X_1', \ldots, X_d' \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_d$, $Z \in V$. Элемент Z представим в виде суммы $P_1 + T_1$, где $P_1 \in \mathrm{Ker}\ B_1$, $T_1 \in \mathrm{Im}\ B_1$. Покажем, что подалгебра $\mathcal{L}'_{d+1}$ содержит элемент $B_{d+1} + P_1$. Действительно, пусть π' — проектирование алгебры $V \mathbin{+\!\!\!\supset} \mathcal{L}$ на подалгебру $\mathrm{Im}\ B_1 \mathbin{+\!\!\!\supset} \mathcal{L}$. Тогда $\pi'(\mathcal{L}'_{d+1}) = \langle B_1, \ldots, B_d, B_{d+1} + T_1, Y_1', \ldots, Y_t'\rangle$, $Y_i' = \pi'(Y_i)$ $(i = 1, \ldots, t)$. В силу предложения 4.2 подпространство $\mathrm{Im}\ B_1$, рассматриваемое как $\langle B_1\rangle$-модуль, вполне приводимо и потому к алгебре $\mathcal{L}' = \langle B_1, B_{d+1} + T_1, Y_1', \ldots, Y_t'\rangle$ применимо предложение 4.5. Следовательно $B_{d+1} \in \mathcal{L}'$ и значит $B_{d+1} \in \pi'(\mathcal{L}'_{d+1})$. Отсюда вытекает, что $B_{d+1} + P_1 \in \mathcal{L}'_{d+1}$. Используя далее разложение $V = \mathrm{Im}\ B_2 \oplus \mathrm{Ker}\ B_2$, элемент P_1 представляем в виде $P_1 = R_2 + P_2$, где $R_2 \in \mathrm{Im}\ B_2$, $P_2 \in \mathrm{Ker}\ B_2$. Так как $[\mathcal{L}, \mathrm{Im}\ B_2] \subset \mathrm{Im}\ B_2$, $[\mathcal{L}, \mathrm{Ker}\ B_2] \subset \mathrm{Ker}\ B_2$, то из условия $[B, P_1] = 0$, вытекает, что $[B_1, P_2] = 0$ и потому $P_2 \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \mathrm{Ker}\ B_2$. Как и выше, убеждаемся, что $\mathcal{L}'_{d+1}$ содержит элемент $B_{d+1} + P_2$. Через d шагов получаем, что $\mathcal{L}'_{d+1}$ содержит элемент $B_{d+1} + P_{d+1}$, где $P_{d+1} \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_d$. Если $P_{d+1} = X'_{d+1} + Y'_{d+1}$, где $X'_{d+1} \in \mathrm{Ker}\ B_{d+1}$, $Y'_{d+1} \in \mathrm{Im}\ B_{d+1}$, то существует такой элемент $P \in \mathrm{Im}\ B_{d+1}$, что $(\exp P)(B_{d+1} + P_{d+1}) = B_{d+1} + X'_{d+1}$. Так как $(\exp P)(B_i + X_i') = B_i + X_i'$, если $i = 1, \ldots, d$, то $\mathcal{L}'_{d+1}$, а значит и подалгебра $\mathcal{L}_{d+1}$ сопряжена подалгебре $\langle B_1 + X_1', \ldots, B_{d+1} + X'_{d+1}, Y_1, \ldots, Y_t\rangle$. Проведенные рассуждения показывают также, что всегда можно считать, что $X_1', \ldots, X_d' \in \mathrm{Ker}\ B_{d+1}$. В частности, если $d = s$, то $X_1', \ldots, X_s' \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_s = 0$, и потому $\bar{\mathcal{L}}$ сопряжена подалгебре $\langle B_1, \ldots, B_d, Y_1, \ldots, Y_t\rangle$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 4.1 вытекает справедливость следующего предложения.

Предложение 4.6. *Пусть $\mathcal{L} = \langle B_1, \ldots, B_s\rangle$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$; $\bar{\mathcal{L}}$ — подалгебра $JO(V)$, удовлетворяющая условию $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. Тогда $\bar{\mathcal{L}}$ с помощью внутреннего автоморфизма алгебры $JO(V)$ сопряжена подалгебре $\langle B_1 + X_1, \ldots, B_s + X_s, Y_1, \ldots, Y_t\rangle$, где $X_1, \ldots, X_s \in \mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_s$, $Y_1, \ldots, Y_t \in V$.*

Если $\mathrm{Ker}\ B_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\ B_s = 0$, то из настоящего предложения получаем теорему 4.1.

Докажем далее теорему, выделяющую все вполне приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(V)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}O(V)$. При доказательстве ее мы существенно используем теорему 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$. Подалгебра $\mathcal{L}$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{L}$ полупроста;

2) $\mathcal{L}$ аннулирует только нулевое подпространство пространства V.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть подалгебра $\mathcal{L}$ не является полупростой. Тогда $\mathcal{L}$ либо коммутативна, либо разлагается в прямую сумму $Z(\mathcal{L}) \oplus Q$ своего центра $Z(\mathcal{L})$ полупростой подалгебры Q [12]. Предположим, что существует ненулевой элемент $X_1 \in V$, удовлетворяющий условию $[\mathcal{L}, X_1] = 0$. Докажем, что подалгебра $\mathcal{L}$ обладает нерасщепляемыми расширениями в алгебре $JO(V)$.

Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — базис подалгебры $Z(\mathcal{L})$. Покажем, что подалгебра $\bar{\mathcal{L}} = Q \oplus \langle T_1 + X_1, T_2, \ldots, T_k \rangle$ нерасщепляема в алгебре $JO(V)$. С этой целью воспользуемся матричным представлением алгебры $JO(V)$. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — базис пространства V, $J + P$ — произвольный элемент алгебры $JO(V)$, $J \in \mathcal{L}O(V)$, $P \in V$. Обозначим соответственно через $S(J)$ и U_P матрицу линейного оператора $\mathrm{ad}\, J$ и координатный столбец вектора P в указанном базисе. Тогда отображение Θ_1:

$$JO(V) \ni J + P \to \begin{pmatrix} S(J) & U_P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in gl(n+1, R)$$

является изоморфизмом алгебры $JO(V)$ на некоторую подалгебру Φ алгебры $gl(n+1, R)$. В частности,

$$T_1 + X_1 \to \begin{pmatrix} S(T_1) & U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, нерасщепляемость подалгебры $\bar{\mathcal{L}}$ в алгебре $JO(V)$ будет доказана, если мы покажем, что $\Theta_1(\bar{\mathcal{L}})$ нерасщепляема в $\Theta_1(JO(V))$.

Пусть это не так. Тогда существует такая матрица

$$\begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \exp \Theta_1(JO(V)),$$

что

$$\begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S(T_1) & U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} T^{-1}S(T_1)T & T^{-1}S(T_1)Y + T^{-1}U_{X_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $T^{-1}S(T_1)Y + T^{-1}U_{X_1} = 0$, откуда $S(T_1)Y + U_{X_1} = 0$. Значит, $U_{X_1} \in \mathrm{Im}\, S(T_1)$. С другой стороны, в силу предположения $U_{X_1} \in \mathrm{Ker}\, S(T_1)$. Так как $\mathcal{L}$ вполне приводима, то $\mathrm{Im}\, S(T_1) \cap \mathrm{Ker}\, S(T_1) = 0$. Поэтому $U_{X_1} = 0$, а значит $X_1 = 0$. Мы приходим к противоречию. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. В силу теоремы 4.1 достаточность теоремы справедлива для коммутативных подалгебр. Поэтому будем предполагать, что $\mathcal{L}$ — некоммутативная подалгебра. Пусть подалгебра $\mathcal{L}$ не является полупростой. Тогда $\mathcal{L}$ разложима в прямую сумму $Z(\mathcal{L}) \oplus Q$ своего центра $Z(\mathcal{L})$ и полупростой подалгебры Q [12]. Пусть $\bar{\mathcal{L}}$ — произвольная подалгебра $JO(V)$ с условием $\pi(\bar{\mathcal{L}}) = \mathcal{L}$. Докажем, что $\bar{\mathcal{L}}$ — расщепляемая подалгебра.

Так как Q — полупростая алгебра, то можно предполагать, что $Q \subset \bar{\mathcal{L}}$. Обозначим через U максимальное подпространство пространства V, обладающее тем свойством, что $[Q, U] = 0$. Если $J_1 \in Z(\mathcal{L})$, $J_2 \in Q$, $X \in U$, то $[J_1, J_2] = 0$, $[J_2, X] = 0$. Отсюда и из тождества Якоби $[J_1, [J_2, X]] + [J_2, [X, J_1]] + [X, [J_1, J_2]] = 0$ получаем, что $[J_2, [X, J_1]] = 0$. Следовательно, $[X, J_1] \in U$. Это означает, что $[Z(\mathcal{L}), U] \subset U$ и потому U инвариантно относительно алгебры $\mathcal{L}$. Следовательно, U обладает $\mathcal{L}$-инвариантным дополнением U', т.е. $V = U \oplus U'$. Пусть $\bar{\mathcal{L}}_1$ — проекция $\bar{\mathcal{L}}$ на подалгебру $U \niplus Z(\mathcal{L})$. Так как для любого $Y \in U$ имеем $[Q, Y] = 0$, то из условия $[Z(\mathcal{L}), Y] = 0$ следует, что $Y = 0$. Если $U_1 \subset U$ — произвольное $Z(\mathcal{L})$-инвариантное подпространство, то оно, очевидно, $\mathcal{L}$-инвариантно, и потому существует такое $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство $V_1 \subset V$, что $U_1 \oplus V_1 = V$. Следовательно, $U = U_1 \oplus V_1 \cap U$ — разложение пространства U в прямую сумму двух $\mathcal{L}$-инвариантных подпространств U_1 и $V_1 \cap U$. Таким образом, пространство U, рассматриваемое как $Z(\mathcal{L})$-модуль, вполне приводимо, и потому в силу теоремы 4.1 существует автоморфизм вида $\exp P$, $P \in U$, отображающий $\bar{\mathcal{L}}_1$ на подалгебру $N_1 \niplus Z(\mathcal{L})$, $N_1 \in U$. Автоморфизм $\exp P$ отображает при этом $\bar{\mathcal{L}}$ на некоторую подалгебру $\bar{\mathcal{L}}'$ и оставляет Q на месте. Допустим, что $\bar{\mathcal{L}}'$ содержит элемент вида $J + X$, где $J \in Z(\mathcal{L})$, $X \in U'$. Используя предложение 4.5, получаем, что $J \in \bar{\mathcal{L}}'$. Таким образом, $\mathcal{L} \subset \bar{\mathcal{L}}'$, и потому $\bar{\mathcal{L}}'$, а значит, и $\bar{\mathcal{L}}$ — расщепляемые подалгебры. Достаточность доказана.

§ 5. Одномерные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$

Рассмотрим задачу описания одномерных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$, $p \geq q > 0$, с точностью до $O(p,q)$-сопряженности. С этой целью используем результаты, относящиеся к структуре максимальных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Как установлено в § 1, максимальные подалгебры $\mathcal{L}_r \subset \mathcal{L}O(p,q)$, не являющиеся вполне приводимыми, можно характеризовать по рангу $r > 0$ максимального вполне изотропного подпространства N_0, инвариантного относительно алгебры $\mathcal{L}_r$. Число r мы называем изотропным рангом подалгебры $\mathcal{L}_r$.

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная подалгебра изотропного ранга $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ и пусть $N_0 = \langle T_1 + T_{p+q-r+1}, \ldots, T_r + T_{p+q} \rangle$ — максимальное вполне изотропное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{L}$. Каждый элемент $J \in \mathcal{L}$ можно представить в виде

$$
\begin{gathered}
J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix} + \\
+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

где J_1, J_3, J_4 — квадратные матрицы порядка r, $n - 2r$ и r соответственно, $J_1^T =$

$-J_1$, $J_3 \in \mathcal{L}O(p-r, q-r)$, $J_4 \in gl(r, R)$, J_2 — произвольная $r \times (n-2r)$-матрица. Матрицы J_1, J_2, J_3 и J_4 будем называть проекциями J на $\mathcal{L}O(r)$, $V_r^{(n-2r)}$, $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $gl(r, R)$ соответственно. Введем обозначения

$$\tilde{J}_1 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & -J_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & -J_1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & J_2 & 0 \\ J_2' & 0 & -J_2' \\ 0 & J_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{J}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ J_4^T & 0 & J_4 - J_4^T \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем, что

$$J = \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4. \tag{5.2}$$

Разложение (5.2) будем называть естественным разложением элемента J. Если $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$ — проекции подалгебры $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}O(r)$, $V_r^{(n-2r)}$, $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $gl(r, R)$ соответственно, то согласно разложению (5.2) получаем естественное разложение

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}_2 + \tilde{\mathcal{L}}_3 + \tilde{\mathcal{L}}_4 \tag{5.3}$$

подалгебры $\mathcal{L}$ в подпрямую сумму подалгебр $\tilde{\mathcal{L}}_i$, где $\tilde{\mathcal{L}}_i = \{\tilde{J} \mid J \in \mathcal{L}_i\}$. Разложение (5.3) будем записывать также в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2 * \mathcal{L}_3 * \mathcal{L}_4$, рассматривая $\mathcal{L}$ как подмножество подпрямого произведения множеств $\mathcal{L}O(r)$, $V_r^{(n-2r)}$, $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и $gl(r, R)$. Соответственно этому разложение (5.2) будем записывать в виде $J = J_1 * J_2 * J_3 * J_4$. Имеет место следующее предложение.

Предложение 5.1. *Если подалгебры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ изотропного ранга r алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$ $O(p, q)$-сопряжены, то подалгебры $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_3'$ $O(p-r, q-r)$-сопряжены, а подалгебры $\mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_4'$ — $G\mathcal{L}(r, R)$-сопряжены.*

Доказательство. Будем считать, что максимальные вполне изотропные подпространства N_0 и N_0', инвариантные относительно $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ совпадают. Если θ $O(p, q)$-автоморфизм, отображающий $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$, то, очевидно, $\theta(N_0) = N_0'$. Следовательно, θ можно рассматривать как автоморфизм максимальной подалгебры $\mathcal{L}_r$ изотропного ранга r. Автоморфизм θ определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \in O(p, q), \tag{5.4}$$

где C_{11}, C_{22}, C_{33} — квадратные матрицы степеней r, $n-2r$, r соответственно. Поскольку $CN_0 = N_0$, то $C_{23} = -C_{21}$, $C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$. Из условия $C^T J_{p,q} C = J_{p,q}$ получаем далее, что $J_{p,q} C^T J_{p,q} C = E$, и потому $C^{-1} = J_{p,q} C^T J_{p,q}$. Поскольку $C^{-1} N_0 = N_0$, то $C_{12} = C_{32}$. Из условия $C^T J_{p,q} C = J_{p,q}$ находим, что $C_{22}^T J_{p-r,q-r} C_{22} = J_{p-r,q-r}$.

Пусть J_3 — произвольный элемент подалгебры $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$, тогда

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & C_{22}^{-1} J_3 C_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Подействуем далее автоморфизмом θ на матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^T & 0 & B - B^T \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$C^{-1}TC = \begin{pmatrix} t_{11} & * & t_{13} \\ * & t_{22} & * \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_{11} &= -C_{13}^T B^T C_{11} + C_{11}^T B C_{31} - C_{13}^T \left(B - B^T\right) C_{31}, \\ t_{13} &= -C_{13}^T B^T C_{13} + C_{11}^T B C_{33} - C_{13}^T \left(B - B^T\right) C_{33}, \\ t_{22} &= -J_{p_1,q_1} C_{32}^T B^T C_{12} + J_{p_1,q_1} C_{12}^T B C_{32} - J_{p_1,q_1} C_{32}^T \left(B - B^T\right) C_{32} = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

и $J_{p_1,q_1} = J_{p-r,q-r}$. Учитывая равенство $C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$, находим

$$t_{13} - t_{11} + \left(C_{11}^T - C_{31}^T\right) B(C_{31} + C_{33}). \tag{5.7}$$

Докажем, что $\left(C_{11}^T - C_{31}^T\right)(C_{31}+C_{33}) = E$. Действительно, используя соотношение $C^T J_{p,q} C = J_{p,q}$, получаем, что

$$C_{11}^T C_{11} + C_{21}^T J_{p_1,q_1} C_{21} - C_{31}^T C_{31} = E, \tag{5.8}$$

$$C_{11}^T C_{13} + C_{21}^T J_{p_1,q_1} C_{23} - C_{31}^T C_{33} = 0. \tag{5.9}$$

Сложим почленно равенства (5.8) и (5.9). Тогда ввиду равенств $C_{21} = -C_{23}$ и $C_{11} + C_{13} = C_{31} + C_{33}$ имеем

$$\left(C_{11}^T - C_{31}^T\right)(C_{31} + C_{33}) = E, \tag{5.10}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, ввиду разложения (5.2) и равенств (5.5)–(5.7) и (5.10) автоморфизм θ индуцирует $G\mathcal{L}(r,R)$-автоморфизм θ_4 алгебры $gl(r,R)$, действующий по формуле

$$\theta_4(B) = (C_{33} + C_{31})^{-1} B (C_{33} + C_{31}), \qquad B \in gl(r,R),$$

и автоморфизм θ_3 алгебры $\mathcal{L}O(p-r,q-r)$, действующий по формуле

$$\theta_3(J_3) = C_{22}^{-1} J_3 C_{22}.$$

Поскольку $\theta(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$, то $\theta_4(\mathcal{L}_4) = \mathcal{L}_4'$ и $\theta_3(\mathcal{L}_3) = \mathcal{L}_3'$. Следовательно, подалгебры $\mathcal{L}_4$ и $\mathcal{L}_4'$ — $G\mathcal{L}(r,R)$-сопряжены, а подалгебры $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_3'$ $O(p-r,q-r)$-сопряжены. Предложение доказано.

Отметим в связи с предложением 5.1, что при доказательстве предложения 2.3 мы установили, что для любого $O(p-r,q-r)$-автоморфизма ψ_1 подалгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ и любого $G\mathcal{L}(r,R)$-автоморфизма ψ_2 подалгебры $gl(r,R)$ существует такой $O(p,q)$-автоморфизм θ подалгебры $\mathcal{L}_r$, для которого $\theta_3 = \psi_1$, $\theta_4 = \psi_2$. Поэтому из предложения 5.1 вытекает, что группа $O(p,q)$-автоморфизмов максимальной подалгебры $\mathcal{L}_r$ изотропного ранга r алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ индуцирует на подалгебре

$\mathcal{L}O(p-r, q-r) \oplus gl(r, R)$ группу автоморфизмов, разлагающуюся в прямое произведение группы G_1 $O(p-r, q-r)$ — автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}O(p-r, q-r)$ и группы G_2 $G\mathcal{L}(r, R)$ — автоморфизмов алгебры $gl(r, R)$.

Нетрудно убедиться далее в справедливости следующих утверждений.

Предложение 5.2. *Подалгебры $\tilde{\mathcal{L}}_2$ и $\tilde{\mathcal{L}}'_2$, содержащиеся в $\tilde{V}_r^{(n-2r)}$, $O(p,q)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}'_2$ сопряжены относительно группы $G_1 \times G_2$.*

Предложение 5.3. *Если $\tilde{\mathcal{L}}_1$ и $\tilde{\mathcal{L}}'_1$ $O(r)$-сопряжены, то подалгебры $\tilde{\mathcal{L}}_1$ и $\tilde{\mathcal{L}}'_1$, содержащиеся в $\tilde{\mathcal{L}}O(r)$, $O(p,q)$-сопряжены.*

В дальнейшем нам необходимы результаты, относящиеся к одномерным подалгебрам алгебры $gl(r, R)$, и изложенные в [11]. Произвольная квадратная матрица порядка r над полем вещественных чисел подобна матрице

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_t \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m_i}^{(i)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m_i-1}^{(i)} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & 0 & -\alpha_2^{(i)} \\ 0 & \cdot & \cdots & 1 & -\alpha_1^{(i)} \end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Характеристический многочлен матрицы A_i совпадает с многочленом

$$\Psi_i(\lambda) = \lambda^{m_i} + \alpha_1^{(i)} \lambda^{m_i-1} + \cdots + \alpha_{m_i}^{(i)}.$$

Про матрицу A, говорят, что она имеет вторую нормальную форму, характеризуемую:

1) квазидиагональным видом (5.11);

2) специфической структурой диагональных клеток (5.12);

3) дополнительным условием: характеристический многочлен каждой клетки является степенью неприводимого в поле R многочлена.

В классе подобных матриц существует только одна матрица, имеющая вторую нормальную форму. Если квадратная матрица A имеет вид (5.11), то говорят, что A есть прямая сумма матриц $A_1, \ldots, A_t$. Символически это будем записывать так: $A = A_1 + \cdots + A_t$.

Пусть J_2 — произвольная матрица, содержащаяся в $V_r^{(n-2r)}$. Произвольный $O(p,q)$-автоморфизм θ максимальной подалгебры $\mathcal{L}_r$ изотропного ранга r, который определяется матрицей (5.4), действует на матрицу J_2 по формуле: $\theta(J_2) = (C_{11}^T -$

$C_{31}^T)J_2C_{22}$. Здесь $C_{11}^T - C_{31}^T \in G\mathcal{L}(r,2)$, $C_{22} \in O(p-r,q-r)$. Следовательно, если r' — ранг матрицы J_2, то существует такой $O(p,q)$-автоморфизм θ, что

$$\theta(J_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \\ & \varepsilon_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \varepsilon_{r'} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

где $r' \le r$, $\varepsilon_i = 1$ $(i = 1,\dots,r')$. Про матрицу $\theta(J_2)$ мы будем говорить, что она имеет нормальную форму (5.13).

Если $J_1 \in \mathcal{L}O(r)$, то она ортогонально-подобна над полем вещественных чисел матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k, \tag{5.14}$$

где O_k — нулевая матрица порядка $k \ge 0$.

Пусть $\langle J\rangle$ — одномерная подалгебра изотропного ранга $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Согласно (5.3) ока разлагается в подпрямое произведение $\langle J\rangle = \langle J_1\rangle * \langle J_2\rangle * \langle J_3\rangle * \langle J_4\rangle$ одномерных подалгебр $\langle J_i\rangle$, где $J_1 \in \mathcal{L}O(r)$, $J_2 \in V_r^{(n-2r)}$, $J_3 \in \mathcal{L}O(p-r,q-r)$, $J_4 \in gl(r,R)$. Если $\langle J'\rangle = \langle J_1'\rangle * \langle J_2'\rangle * \langle J_3'\rangle * \langle J_4'\rangle$ — какая-нибудь другая одномерная подалгебра изотропного ранга r алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ и подалгебры $\langle J\rangle$ и $\langle J'\rangle$ $O(p,q)$-сопряжены, то в силу предложения 5.1 J_3 и J_3' $O(p-r,q-r)$-сопряжены; а J_4 и J_4' — $G\mathcal{L}(r,R)$-сопряжены. Таким образом, для классификации одномерных подалгебр изотропного ранга $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ необходимо вначале провести полную классификацию одномерных подалгебр $\langle J\rangle$ изотропного ранга r, удовлетворяющих условию $J_1 = 0$, $J_2 = 0$. Предположим, что эта задача решена. На следующем этапе необходимо выяснить структуру проекций $J_1 \in \mathcal{L}O(r)$ и $J_2 \in V_r^{(n-2r)}$ алгебры $\langle J\rangle$, если известна структура ее проекций $J_3 \in \mathcal{L}O(p-r,q-r)$ и $J_4 \in gl(r,R)$. Эта задача решается на основе результатов § 4 о расщепляемых расширениях алгебр и предложений 5.1–5.3. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.4. *Ненулевые одномерные подалгебры $\langle J\rangle$ изотропного ранга $r > 0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$, удовлетворяющие условию $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, исчерпываются относительно $O(p,q)$-сопряженности такими подалгебрами:*

1) если $p-r$ — четное, $q-r$ — нечетное, то

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \beta_t \\ -\beta_t & 0 \end{pmatrix} + O_k, \tag{5.15}$$

где $s = \frac{p-r}{2}$, $t \le \left[\frac{q-r}{2}\right]$; $J_4 = 0$;

2) если $p-r$ — нечетное, $q-r$ — четное, то

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \beta_t \\ -\beta_t & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

где $s \le \left[\frac{p-r}{2}\right]$, $t = \frac{q-r}{2}$; $J_4 = 0$;

3) если $p-r$ — нечетное, $q-r$ — четное, то

$$J_3=\begin{pmatrix}0&\alpha_1\\-\alpha_1&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&\alpha_s\\-\alpha_s&0\end{pmatrix}+O_k+\begin{pmatrix}0&\beta_1\\-\beta_1&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&\beta_t\\-\beta_t&0\end{pmatrix},\quad(5.17)$$

где $s\le\frac{p-r}{2}$, $t=\frac{q-r}{2}$; $J_4=0$;
либо

$$J_3=\begin{pmatrix}0&\alpha_1\\-\alpha_1&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&\alpha_s\\-\alpha_s&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\beta_1\\-\beta_1&0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0&\beta_t\\-\beta_t&0\end{pmatrix}+O_k,\quad(5.18)$$

где $s=\frac{p-r}{2}$, $t\le\frac{q-r}{2}$; $J_4=0$;

4) $J_3=0$, J_4 имеет вид (5.11);

5) J_3 имеет вид 1)–3) настоящего предложения, J_4 имеет вид (5.11).

Отметим, что предложение 5.4 дает также полное описание одномерных вполне приводимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Такие подалгебры характеризуются тем, что их изотропный ранг $r=0$.

Пусть далее $\langle J\rangle$ — произвольная одномерная подалгебра изотропного ранга $r>0$; $J=J_1*J_2*J_3*J_4$ — естественное разложение элемента J. Элемент J_3*J_4 действует на пространстве $V_r^{(n-2r)}$ по формуле $[J_3*J_4,X]=-X\cdot J_3+J_4\cdot X$, $X\in V_r^{(n-2r)}$, и потому определяет линейный оператор $\mathrm{ad}_2(J_3{*}J_4)$ пространства $V_r^{(n-2r)}$. Его ядро и образ обозначим соответственно через $\mathrm{Ker}_2(J_3*J_4)$ и $\mathrm{Im}_2(J_3*J_4)$. Аналогично, J_4 действует на пространстве $\mathcal{L}O(r)$ по формуле $[J_4,X]=J_4\cdot X+X\cdot J_4^T$ и определяет линейный оператор ad_1J_4 пространства $\mathcal{L}O(r)$. Ядро и образ этого оператора будем обозначать в дальнейшем через Ker_1J_4 и Im_1J_4 соответственно. Справедливо следующее предложение.

Предложение 5.5 [11]. *Ядро линейного оператора $\mathrm{ad}_2(J_3*J_4)$ в пространстве $V_r^{(n-2r)}$ нулевое тогда и только тогда, когда матрицы J_3 и J_4 не имеют общих характеристических чисел.*

Теорема 5.1. *Ненулевые одномерные подалгебры $\langle J\rangle$ изотропного ранга $r>0$ алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$ исчерпываются относительно $O(p,q)$-сопряженности такими подалгебрами:*

1) $J_1=0$ или $J_1\notin\mathrm{Im}_1J_4$, $J_2=0$ или $J_2\notin\mathrm{Im}_2(J_3*J_4)$, J_3*J_4 относится к типу 1)–5) предложения 5.4;

2) J_1 имеет нормальную форму (5.14), $J_2=0$, $J_3=0$, $J_4=0$;

3) $J_1=0$, J_2 имеет нормальную форму (5.13), $J_3=0$, $J_4=0$;

4) J_1 имеет нормальную форму (5.14), $J_3=0$, $J_4=0$,

$$J_2=\begin{pmatrix}\beta_{11}&0&0&\cdots&0\\\beta_{21}&\beta_{22}&0&\cdots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\\beta_{r1}&\beta_{r2}&\beta_{r3}&\cdots&\beta_{rs}\end{pmatrix},\qquad\beta_{rs}=0,\quad\text{если } s>r.$$

Рассмотрим более подробно вопрос классификации одномерных подалгебр алгебр $\mathcal{L}O(p,1)$ и $\mathcal{L}O(p,2)$. Исходя из предыдущих результатов, без труда можем найти все одномерные вполне приводимые подалгебры и подалгебры изотропного ранга 1. Более детально следует остановиться на классификации подалгебр изотропного ранга 2 алгебры $\mathcal{L}O(p,2)$. Эта задача сводится к описанию одномерных подалгебр алгебры $gl(2,R)$ с точностью до $G\mathcal{L}(2,R)$-сопряженности и одномерных подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p-2)$ с точностью до $O(p-2)$-сопряженности. Если $J_4 \in gl(2,R)$ — произвольная ненулевая квадратная матрица порядка 2, то над полем вещественных чисел она подобна одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Произвольная матрица $J_3 \in \mathcal{L}O(p-2)$ ортогонально-подобна над полем вещественных чисел матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k, \tag{5.20}$$

где O_k — нулевая матрица порядка $k \geq 0$, $1 \leq s \leq \left[\frac{p-2}{2}\right]$.

Если далее $J_2 \in V_2^{(n-4)}$, то матрица J_2 имеет следующую нормальную форму:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, либо $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$.

Рассмотрим одномерную подалгебру $\langle J\rangle$ изотропного ранга 2, удовлетворяющую условию $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что подалгебра $\langle J\rangle$ $O(p,q)$-сопряжена подалгебре $\langle J'\rangle$, удовлетворяющей условию $J_1' = 0$, $J_2' = 0$, $J_3' = 0$, тогда и только тогда, когда J_4 не подобна одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Теорема 5.2. *Ненулевые одномерные подалгебры $\langle J\rangle$ алгебры $\mathcal{L}(p,1)$, $p > 1$, исчерпываются относительно $O(p,1)$-сопряженности такими подалгебрами:*

I. Вполне приводимые подалгебры:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p}{2}} & 0 \end{pmatrix} + O_1, \quad p \text{ — четное};$$

II. Подалгебры изотропного ранга 1:

1) $J_1 = 0,\ J_2 = 0,\ J_4 = \alpha,$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k,$$

где α — произвольное вещественное число, $1 \leq s \leq \left[\frac{p-1}{2}\right]$, O_k — нулевая матрица порядка $k \geq 0$;

2) $J_1 = 0,\ J_2 = \left(O_1^{(1)}, \ldots, O_1^{(s)}, \bar{J}_2\right),\ J_4 = \alpha,$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k,$$

где $\alpha \in R$, $O_1^{(i)} = (0\ 0)$ — *нулевая* (1×2)*-матрица*, $\bar{J}_2 = (1, 0, \ldots, 0)$, $1 \le s \le \left[\frac{p-1}{2}\right]$, *если* p — *четное*, $1 \le s \le \frac{p-1}{2}$, *если* p — *нечетное.*

Теорема 5.3. *Ненулевые одномерные подалгебры* $\langle J\rangle$ *алгебры* $\mathcal{L}O(p,2)$, $p \ge 2$, *исчерпываются относительно* $O(p,2)$*-сопряженности такими подалгебрами:*

I. Вполне приводимые подалгебры:

1) $J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p}{2}} & 0 \end{pmatrix}$, p — *четное;*

2) $J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s \\ -\alpha_s & 0 \end{pmatrix} + O_k + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$, *где* $s \le \left[\frac{p}{2}\right]$;

3) $J = O_p + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}$, *где* O_p — *нулевая матрица порядка* p;

II. Подалгебры изотропного ранга 1:

$J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_4 = \alpha$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{\frac{p-1}{2}} \\ -\alpha_{\frac{p-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$, p — *нечетное число;*

III. Подалгебры изотропного ранга 2:

1) $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, J_4 *имеет вид (5.19);*

2) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, $J_4 = 0$;

3) $J_1 = 0$, J_2 *имеет вид (5.21)*, $J_3 = 0$, $J_4 = 0$;

4) $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, J_3 *имеет вид (5.20)*, $J_4 = 0$;

5) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, J_2 *имеет вид (5.21)*, $J_3 = 0$, $J_4 = 0$;

6) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = 0$, J_3 *имеет вид (5.20)*, $J_4 = 0$;

7) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, J_4 *имеет вид (5.22);*

8) $J_1 = 0$, $J_2 = (O_2^{(1)}, \ldots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$, $O_2^{(i)}$ — *нулевая квадратная матрица, порядка 2* $(i = 1, \ldots, s)$, $\bar{J}_2$ *имеет вид (5.21)*, J_3 *имеет вид(5.20)*, $J_4 = 0$;

9) $J_1 = 0$, $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = 0$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$;

10) $J_1 = 0$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = 0$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

11) $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, J_3 *имеет вид (5.20)*, J_4 *имеет вид (5.19);*

12) $J_1 = 0$, $J_2 = (O_2^{(1)}, \ldots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$, $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, J_3 *имеет вид (5.20)*, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$;

13) $J_1 = 0$, $J_2 = (O_2^{(1)}, \ldots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$, $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, J_3 *имеет вид (5.20)*, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

14) $J_1 = 0$, J_3 *имеет вид (5.20)*, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = (A_1, A_2, \ldots, A_s, \bar{J}_2)$, *где* $A_i = 0$, *если* $\beta \ne \alpha_i$, $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *если* $\beta = \alpha_i$, $\bar{J}_2$ *имеет вид (5.21);*

15) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = 0$, J_3 *имеет вид (5.20),* J_4 *имеет вид (5.22);*

16) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = 0$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

17) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = (O_2^{(1)}, \ldots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$, $\bar{J}_2$ *имеет вид (5.21),* J_3 *имеет вид (5.20),* J_3 *имеет вид (5.20),* $J_4 = 0$;

18) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = (A_1, \ldots, A_s, 0)$, J_3 *имеет вид (5.20),*
$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *если* $\alpha = \alpha_i$, $A_i = 0$, *если* $\alpha \neq \alpha_i$;

19) $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, J_3 *имеет вид (5.20),* $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$J_2 = (O_2^{(1)}, \ldots, O_2^{(s)}, \bar{J}_2)$, $\bar{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

§ 6. Вполне приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$. Алгебру $\mathcal{L}O(p,q)$ будем обозначать в этом параграфе через $\mathcal{L}O(V)$. Предположим, что пространство V разлагается в прямую ортогональную сумму $\mathcal{L}$-подпространств $V_1, \ldots, V_s$. Каждое из подпространств V_i, очевидно, неизотропно . Если φ_i — ограничение квадратичной формы φ на пространство V_i, (p_i, q_i) — сигнатура формы φ_i, то по теореме Витта существует $O(p,q)$-автоморфизм f пространства V, отображающий V_i на $V_i' = \langle T_{i_1}, \ldots, T_{i_{p_i}}, T_{i_{p_i}+1}, \ldots, T_{i_{p_i}+q_i} \rangle$ $(i = 1, \ldots, s)$. Здесь $i_1 < \cdots < i_{p_i} < p$, $p < i_{p_i} + 1 < \cdots < i_{p_i+q_i}$. При автоморфизме f алгебра $\mathcal{L}$ отображается на некоторую алгебру $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}O(V)$ и

$$V = V_1' \oplus \cdots \oplus V_s' \qquad — \tag{6.1}$$

разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $\mathcal{L}'$-подпространств. Так как подпространство V_i' обладает базисом, состоящим из некоторых векторов базиса $\{T_i\}$ пространства V, то будем говорить, что разложение (6.1) является разложением пространства V относительно базиса $\{T_i\}$ в прямую ортогональную сумму $\mathcal{L}'$-подпространств. Поскольку подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(V)$ изучаются с точностью до $O(p,q)$-сопряженности, то в дальнейшем будем предполагать, что в классе всех алгебр, $O(p,q)$-сопряженных между собой, алгебра $\mathcal{L}$ выбрана так, что рассматриваемое разложение $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ является разложением пространства V относительно базиса $\{T_i\}$ в прямую ортогональную сумму $\mathcal{L}$-подпространств.

Если $\hat{J} = \mathrm{ad}\ J \in \mathrm{ad}\ \mathcal{L}$ — произвольный элемент, то его можно рассматривать как оператор $\hat{J}_i$ пространства V_i. Матрица J_i оператора $\hat{J}_i$ в базисе пространства V_i содержится в $\mathcal{L}O(p_i, q_i)$. Таким образом, для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ элемент J из $\mathcal{L}$ определяет элемент J_i из $\mathcal{L}O(p_i, q_i)$, который будем называть проекцией J на $\mathcal{L}O(p_i, q_i)$. Поэтому можем положить

$$J = J_1 * \cdots * J_s,$$

рассматривая J как элемент декартова произведения алгебр $\mathcal{L}_i$ ($\mathcal{L}_i$ — проекция $\mathcal{L}$ на алгебру $\mathcal{L}O(p_i, q_i)$), так как операция в алгебре $\mathcal{L}$ согласуется с этими же операциями в декартовом произведении. Будем говорить, что $\mathcal{L}$ разложена относительно базиса $\{T_i\}$ в подпрямое произведение алгебр $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(V_i)$ и записывать это так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s.$$

Определение 6.1. *Подалгебра $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(V)$ называется неприводимой, если V — минимальное $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство пространства V (отличное от нуля).*

Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$. Тогда пространство V разлагается в прямую ортогональную сумму (относительно базиса $\{T_i\}$) $\mathcal{L}$-неприводимых подпространств $V_1, \ldots, V_s$. Этому разложению соответствует разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s$ алгебры $\mathcal{L}$ в подпрямое произведение неприводимых подалгебр $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}O(V_i)$.

Определение 6.2. *Разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ алгебры $\mathcal{L}$ в подпрямое произведение подалгебр $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}O(p_1, q_1)$ и $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}O(p_2, q_2)$ назовем тривиальным, если $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ и существует такая матрица $C \in O(p_1, q_1)$, что каждый элемент $J \in \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ имеет вид $J_1 * C^{-1} J_1 C$, где $J_1 \in \mathcal{L}_1$.*

Если $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s$, то проекцию алгебры $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$ (декартово произведение подалгебр $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_j$) будем обозначать через $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$.

Определение 6.3. *Подалгебры $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_j$ в разложении $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s$ назовем равносильными, если разложение алгебры $\mathcal{L}_i * \mathcal{L}_j$ в подпрямое произведение подалгебр $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_j$ является тривиальным.*

Нетрудно убедиться, что рассматриваемое отношение на множестве подалгебр $\{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_s\}$ является отношением эквивалентности, и потому оно проводит разбиение множества $\{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_s\}$ на классы $S_1, \ldots, S_t$. Проекцию алгебры $\mathcal{L}$ на декартово произведение подалгебр, входящих в S_i, обозначим через A_i. Таким образом, алгебра $\mathcal{L}$ разлагается в подпрямое произведение подалгебр $A_1, \ldots, A_t$, которые будем называть примарными множителями алгебры $\mathcal{L}$ и записывать это так: $\mathcal{L} = A_1 * \cdots * A_t$.

Роль примарных множителей вполне приводимой подалгебры $\mathcal{L}$ будет выяснена в § 7.

Теорема 6.1 [12]. *Если $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, то она либо коммутативна, либо разлагается в прямую сумму своего центра $Z(\mathcal{L})$ и полупростой подалгебры Q.*

§ 7. Неприводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$

В этом параграфе мы исследуем свойства неприводимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$.

Предложение 7.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$, $C(\mathcal{L})$ — ее централизатор в $gl(p + q, C)$. Если A — максимальная коммутативная подалгебра $C(\mathcal{L})$, то $\dim_C A \leq 2$.*

Доказательство. Если $\mathcal{L}$ — абсолютно неприводимая подалгебра, то предложение вытекает из леммы Шура. Пусть $\mathcal{L}$ приводима над полем комплексных чисел. Тогда существует такая матрица $C \in gl(p + q, C)$, что

$$\mathcal{L}' = C^{-1} \mathcal{L} C = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — неприводимые подалгебры. Рассмотрим два случая.

1. Подалгебры $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ не сопряжены. Любая матрица, коммутирующая поэлементно с $\mathcal{L}'$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E & 0 \\ 0 & \lambda_2 E \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $\dim_C A = 2$.

2. Подалгебры $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ сопряжены. Можно предполагать при этом, что $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Любая матрица, коммутирующая поэлементно с $\mathcal{L}'$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E & \lambda_2 E \\ \lambda_3 E & \lambda_4 E \end{pmatrix} \cong gl(2, C).$$

Значит, и в этом случае $\dim_C A = 2$. Предложение доказано.

Предложение 7.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p, q)$, $X \in gl(p+q, R)$ — вещественная матрица, удовлетворяющая условию $[X, \mathcal{L}] = 0$. Тогда либо $X = \lambda E$, либо существуют такие вещественные числа α и β, что $(\alpha X + \beta E)^2 = -E$.*

Доказательство. В силу предложения 7.1 матрицы X^2, X, E линейно зависимы над C. Это значит, что существуют такие комплексные числа α_0, α_1, α_2, что

$$\alpha_0 E + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 = 0.$$

Если $\alpha_2 = 0$, то все доказано. Пусть однако, $\alpha_2 \neq 0$. Тогда

$$X^2 = \left(-\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right) E + \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) X = \beta_0 E + \beta_1 X. \tag{7.1}$$

Поскольку X — вещественная матрица, то из равенства (7.1) получаем, что либо $X = \lambda E$, либо β_0, β_1 — вещественные числа. Из равенства (7.1) получаем далее, что

$$X^2 - \beta_1 X + \frac{\beta_1^2}{4} E = \left(\beta_0 + \frac{\beta_1^2}{4}\right) E,$$

или

$$\left(X - \frac{\beta_1}{2} E\right)^2 = \gamma E, \tag{7.2}$$

где $\gamma = \left(\beta_0 + \frac{\beta_1^2}{4}\right)$. Если $\gamma > 0$, то равенство (7.2) можно переписать так:

$$\left(X - \frac{\beta_1}{2} E - \sqrt{\gamma} E\right)\left(X - \frac{\beta_1}{2} E + \sqrt{\gamma} E\right) = 0.$$

Матрица $X - \left(\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\gamma}\right) E$ коммутирует поэлементно с $\mathcal{L}$, и потому она либо нулевая, либо обратная. В первом случае $X = \left(\frac{\beta_1}{2} + \sqrt{\gamma}\right) E$, во втором — $X = \left(\frac{\beta_1}{2} - \sqrt{\gamma}\right) E$. Если $\gamma < 0$, то из равенства (5.2) получаем, что

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} X - \frac{\beta_1}{2\sqrt{-\gamma}} E\right)^2 = -E,$$

что и доказывает предложение.

Предложение 7.3. *Пусть $\mathcal{L}$ — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(p,q)$, $p \neq q$. Если $X \in gl(p+q,R)$ — вещественная матрица, удовлетворяющая условиям $[X,\mathcal{L}] = 0$, $(X \cdot J_{p,q})^T = X \cdot J_{p,q}$, то $X = \lambda E$.*

Доказательство. Так как $(X \cdot J_{p,q})^T = X \cdot J_{p,q}$, то матрицу X можно разбить на блоки:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix},$$

где X_1 — квадратная матрица степени p; X_4 — квадратная матрица степени q, причем $X_1^T = X_1$, $X_2^T = -X_3$, $X_3^T = -X_2$, $X_4^T = X_4$.

Рассмотрим случай $p > q$. Пусть $X \neq \lambda E$. В силу предложения 7.2 можно считать, что $X^2 = -E$. Поскольку X_1 симметрическая, то существует такая вещественная матрица U, что $U^{-1}XU = Y_1$ — диагональная матрица. Допустим, что

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица X сопряжена матрице

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}.$$

Так как $Y^2 = -E$, то $Y_1^2 + Y_2Y_3 = -E$ и, значит, $Y_2Y_3 = -E - Y_1^2$. Обозначим через $\bar{Y}_2$ матрицу, которая получается из матрицы Y_2 в результате вычеркивания всех строк с номерами, большими q, а через $\bar{Y}_3$ — матрицу, которая получается из матрицы Y_3 в результате вычеркивания всех столбцов с номерами, большими q. Матрицы $\bar{Y}_2$ и $\bar{Y}_3$ квадратные, и в силу равенства $Y_2Y_3 = -E-Y_1^2$ их произведение $\bar{Y}_2\bar{Y}_3$ — обратимая диагональная матрица. Отсюда вытекает, что матрица $Y_2\bar{Y}_3$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \alpha_q \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если через Φ обозначить матрицу

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & \bar{Y}_3 \end{pmatrix},$$

то

$$\Phi^{-1}Y\Phi = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & & 0 & & \ddots & \\ & \ddots & & 0 & \cdots & \alpha_q \\ 0 & & \lambda_p & \cdot & \cdots & \cdot \\ & & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & * & & & * & \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица $\Phi^{-1}Y\Phi$, а значит, и матрица X, имеет вещественный характеристический корень λ_p. Следовательно, $X = \lambda_p E$, и потому $X^2 \neq -E$. Полученное противоречие и доказывает предложение для случая $p > q$.

Если $p < q$, то с помощью матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

получаем алгебру $\mathcal{L}' = D^{-1}\mathcal{L}D$, содержащуюся в $\mathcal{L}O(q,p)$. Так как

$$(D \times D \cdot J_{q,p})^T = -(D \times J_{p,q} D)^T = -D \times J_{p,q} D = D \times D \cdot J_{q,p}$$

и $[D \times D, \mathcal{L}'] = 0$, то в силу рассмотренного выше случая $D \times D = \lambda E$ или $X = \lambda E$. Предложение доказано.

Теорема 7.1. *Пусть $G_1 \subset \mathcal{L}O(p_1,q_1)$ и $G_2 \subset \mathcal{L}O(p_2,q_2)$ — две неприводимые подалгебры. Если $C^{-1}G_1C = G_2$, то $CJ_{p_2,q_2}C^T = \lambda J_{p_1,q_1}$.*

Доказательство. Поскольку $G_1 \subset \mathcal{L}O(p_1,q_1)$, то для любой матрицы $A \in G_1$, справедливо равенство

$$J_{p_1,q_1}A + A^T J_{p_1,q_1} = 0. \tag{7.3}$$

Аналогично, для любой матрицы $B \in G_2$ выполняется равенство

$$J_{p_2,q_2}B + B^T J_{p_2,q_2} = 0. \tag{7.4}$$

Пусть $C^{-1}AC = B$, тогда, учитывая соотношение (7.4), получаем

$$J_{p_2,q_2}C^{-1}AC + C^T A^T \left(C^{-1}\right)^T J_{p_2,q_2} = 0,$$

или

$$A = -CJ_{p_2,q_2}C^T A^T \left(C^{-1}\right)^T J_{p_2,q_2}C^{-1}. \tag{7.5}$$

С другой стороны, используя соотношение (7.3), имеем

$$A = -J_{p_1,q_1}A^T J_{p_1,q_1}. \tag{7.6}$$

Следовательно, ввиду (7.5) и (7.6)

$$J_{p_1,q_1}A^T J_{p_1,q_1} = CJ_{p_2,q_2}C^T A^T \left(C^{-1}\right)^T J_{p_2,q_2}C^{-1},$$

Откуда

$$A = J_{p_1,q_1}\left(C^{-1}\right)^T J_{p_2,q_2}C^{-1}ACJ_{p_2,q_2}C^T J_{p_1,q_1}.$$

Таким образом, матрица $T = CJ_{p_2,q_2}C^T J_{p_1,q_1}$ перестановочна поэлементно с G_1. Но тогда по лемме Шура матрица T либо нулевая, либо обратимая. Поскольку матрица T удовлетворяет всем условиям предложения 7.3, то $T = \lambda E$. Следовательно, $CJ_{p_2,q_2}C^T = \lambda J_{p_1,q_1}$. Теорема доказана.

§ 8. Структура инвариантного подпространства для вполне приводимой подалгебры

В настоящем параграфе мы рассматриваем задачу нахождения всех инвариантных подпространств пространства V для вполне приводимой подалгебры $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}O(p,q)$ с точностью до $O(p,q)$-сопряженности. Если V_1 и V_2 — подпространства пространства V, то подпрямую сумму подпространств V_1 и V_2 будем обозначать через $V_1 \dot{+} V_2$.

Предложение 8.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, разложимая в подпрямое произведение $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ подалгебр $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}O(p_1,q_1)$ и $\mathcal{L}O(p_2,q_2)$, первая из которых действует неприводимо на подпространстве $V_1 = \langle T_1, \ldots, T_{p_1+q_1}\rangle$, а вторая — на подпространстве $V_2 = \langle T'_1, \ldots, T'_{p_2+q_2}\rangle$. Если $\mathcal{L}$-инвариантное подпространство $N = V_1 \dot{+} V_2$ не разложимо в прямую сумму $V_1 \oplus V_2$, то разложение $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$ является тривиальным.*

Доказательство. Если $\mathcal{L}$ содержит ненулевой элемент $J_1 * J_2$, где $J_1 \in \mathcal{L}_1$, $J_2 \in \mathcal{L}_2$, то нетрудно убедиться, что $J_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}_2 = 0$ и потому существует изоморфизм $f_1 : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, определяемый следующим образом: если $J_1 * J_2 \in \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2$, то $f_1(J_1) = J_2$.

Поскольку N не разложимо в прямую сумму подпространств V_1 и V_2, $N \cap V_1 = N \cap V_2 = 0$, то существует изоморфизм $f_2 : V_1 \to V_2$, определяемый следующим образом: если $X_1 + X_2 \in V_1 \dot{+} V_2$, то $f_2(X_1) = X_2$. Таким образом, базис инвариантного подпространства N имеет вид: $T_1 + R_1, \ldots, T_{p_1+q_1} + R_{p_1+q_1}$, где $R_1, \ldots, R_{p_1+q_1}$ — базис пространства V_2. Отображение $f_2 : V_1 \to V_2$ является, очевидно, $\mathcal{L}$-изоморфизмом. Ввиду этого для произвольного элемента $J = J_1 * J_2 \in \mathcal{L}$ матрица линейного оператора $\mathrm{ad}\ J_2$ в базисе $\{R_1, \ldots, R_{p_1+q_1}\}$ совпадает с матрицей J_1. Если C — матрица перехода от базиса $\{R_1, \ldots, R_{p_1+q_1}\}$ к базису $\{T'_1, \ldots, T'_{p_1+q_1}\}$, то $J_2 = C^{-1} J_1 C$ и, значит, $\mathcal{L}_2 = C^{-1} \mathcal{L}_1 C$. Ввиду теоремы 7.1 отсюда вытекает, что

$$C J_{p_2,q_2} C^T = \lambda J_{p_1,q_1}. \tag{8.1}$$

Докажем, что $\lambda > 0$. Действительно, пусть $\lambda < 0$. В силу закона инерции для квадратичных форм из равенства (8.1) получаем, что $p_2 = q_1$, $q_2 = p_1$. Следовательно, $C J_{q_1,p_1} C^T = \lambda J_{p_1,q_1}$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \cdot J_{q_1,p_1} \left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \right)^T = J_{q_1,p_1},$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

и потому $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} DC \in O(q_1,p_1)$. Таким образом, $C = \sqrt{-\lambda} D C_1$, где $C_1 \in O(q_1,p_1)$. Следовательно, произвольный элемент $J_1 * J_2 \in \mathcal{L}$ можно представить в виде $J_1 * J_2 = J_1 * C_1^{-1} D J_1 C_1$. Пусть θ_1 — автоморфизм, определяемый матрицей $E * C_1^{-1}$. Автоморфизм θ_1 отображает алгебру $\mathcal{L}$ на алгебру $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1 * D \mathcal{L}_1 D$, а пространство $N = \langle T_i + R_i \rangle$ на пространство $N' = \langle T_i + C_i \cdot R_i \rangle$. Так как $DC_i \cdot R_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} T'_i$, то $T_i + C_1 \cdot R_i = T_i + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} D T'_i$. Следовательно, подпространство $N' = \langle T_i + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} D T'_i \rangle$

инвариантно относительно алгебры $\mathcal{L}'$. Но тогда инвариантным относительно подалгебры $\mathcal{L}'$ будет и подпространство $N'' = \langle T_i + DT_i' \rangle$. Нетрудно убедиться, что N'' — вполне изотропное подпространство, а это противоречит условию, что подалгебра $\mathcal{L}$, а значит, и $\mathcal{L}'$, вполне приводима.

Таким образом, $\lambda > 0$, и в силу закона инерции для квадратичных форм из равенства (8.1) получаем, что $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ и

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C J_{p_1,q_1} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C^T = J_{p_1,q_1}.$$

Следовательно, $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C \in O(p_1, q_1)$, $C_1^{-1} G_1 C_1 = G_2$. Предложение доказано.

Теорема 8.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, $\mathcal{L} = A_1 * \cdots * A_t$ — ее разложение в подпрямое произведение примарных множителей. Подпространство N, инвариантное относительно подалгебры $\mathcal{L}$, разлагается в прямую сумму*

$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t \oplus N',$$

где $[A_i, N_i] = N_i$, $[A_i, N_j] = 0$, если $i \neq j$, $[\mathcal{L}, N'] = 0$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по размерности N. Рассмотрим вначале случай, когда N — неприводимое подпространство. Пусть N' — максимальное подпространство N, удовлетворяющее условию $[\mathcal{L}, N'] = 0$. Ввиду неприводимости N $N' = N$ или $N' = 0$. Если $N' = N$, то теорема доказана. Поэтому будем предполагать, что $N' = 0$. Обозначим через S_j' максимальное подпространство V, удовлетворяющее условию $[A_j, S_j'] = 0$, а через S_j — ортогональное дополнение к S_j' в пространстве V. Пространства S_j и S_j' неизотропные и $V = S_j \oplus S_j'$. Пусть N_j — проекция N на S_j. Очевидно, N разложимо в подпрямую сумму подпространств N_j, $j = 1, \ldots, t$, т.е.

$$N = N_1 \dot{+} \cdots \dot{+} N_t. \tag{8.2}$$

Докажем, что среди N_i только одно отлично от нуля. Действительно, пусть $A_i = \mathcal{L}_{i1} * \cdots * \mathcal{L}_{is_i}$ — разложение A_i в подпрямое произведение неприводимых подалгебр. Как и выше, нетрудно убедиться, что N_i разложимо в подпрямую сумму $N_i = N_{i1} \dot{+} \cdots \dot{+} N_{is_i}$ неприводимых подпространств $N_{i1}, \ldots, N_{is_i}$.

Рассмотрим произвольный элемент $X \in N$, отличный от нуля, и пусть $X = X_1 + \cdots + X_t$, где $X_i \in N_i$. Предположим, что в разложении (8.2) $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$. При этом предположении $X_1 \neq 0$, $X_2 \neq 0$. В самом деле, если, например, $X_1 = 0$, то $\mathcal{L}$-подпространство, порожденное X, отлично от N, поскольку его проекция на N_1 равна нулю. А это противоречит предположению о неприводимости N.

Пусть далее $X_1 = X_{11} + \cdots + X_{1s_1}$, $X_{1i} \in N_{1i}$, $X_2 = X_{21} + \cdots + X_{2s_2}$, $X_{2i} \in N_{2i}$. Можно предполагать, что $X_{11} \neq 0$, $X_{21} \neq 0$. Так как разложение $\mathcal{L}_{11} * \mathcal{L}_{21}$ не является тривиальным разложением, то в силу предложения 8.1 проекция N на подпространстве $N_{11} \oplus N_{21}$ совпадает с $N_{11} \oplus N_{21}$. Следовательно, N содержит ненулевой элемент Y, проекция которого на подпространство N_{11} равна нулю. Но тогда $\mathcal{L}$-подпространство, порожденное Y, отлично от N, что противоречит предположению о неприводимости N. Полученное противоречие доказывает, что $N = N_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Тем самым теорема справедлива в случае, если N неприводимо.

Пусть N — приводимо, тогда $N = M_1 \oplus M_2$, $\dim M_i < \dim N$. В силу индуктивного предположения

$$M_1 = M_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus M_1^{(t)} \oplus M_1', \qquad M_2 = M_2^{(1)} \oplus \cdots M_2^{(t)} \oplus M_2',$$

где $[A_i, M_1^{(i)}] = M_1^{(i)}$, $[A_i, M_2^{(i)}] = M_2^{(i)}$, $[A_i, M_1^{(j)}] = 0$, $[A_i, M_2^{(j)}] = 0$, если $i \neq j$, $[A_i, M_1'] = 0$, $[A_i, M_2'] = 0$. Но тогда, положив $N_i = M_1^{(i)} \oplus M_2^{(i)}$, $N' = M_1' \oplus M_2'$, получим, что $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t \oplus N'$. Теорема доказана.

Теорема 8.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(V)$, $\mathcal{L} = A_1 * \cdots * A_t$ — ее разложение в подпрямое произведение примарных подалгебр. Подпространство N, инвариантное относительно алгебры $\mathcal{L}$, разлагается в прямую сумму*

$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_t \oplus N',$$

где $[A_i, N_i] = N_i$, $[A_i, N_j] = 0$, если $i \neq j$, $[\mathcal{L}, N'] = 0$. Если примарная алгебра A является подпрямым произведением неприводимых подалгебр алгебр $\mathcal{L}O(V_1), \dots, \mathcal{L}O(V_q)$, то относительно $O(V)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства V со свойством $[A, W] = W$ исчерпываются пространствами $V_1, \dots, V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$.

Доказательство. В силу теоремы 8.1 достаточно изучить структуру пространства W, удовлетворяющего условию $[\mathcal{L}, W] = W$, где $\mathcal{L}$ — примарная подалгебра. Пусть $\mathcal{L}$ разложима в подпрямое произведение двух неприводимых подалгебр $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}$. Поскольку $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — неприводимы, то проекция W на каждое из подпространств V_1 и V_2 либо равна нулю, либо совпадает с соответствующим подпространством V_i. Предположим, что W не разлагается в прямую сумму подпространств V_1 и V_2. Если $\{T_1, \dots, T_{p_1+q_1}\}$ — базис подпространства V_1, $\{T_1', \dots, T_{p_1+q_1}'\}$ — базис подпространства V_2, то, как было установлено при доказательстве предложения 8.1, можно считать при этом, что базис подпространства W имеет вид $\{T_1 + \lambda T_1', \dots, T_{p_1+q_1} + \lambda T_{p_1+q_1}'\}$, а подалгебра $\mathcal{L}$ равна $\mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_1$. Пусть

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} E & \lambda E \\ \lambda E & -E \end{pmatrix}.$$

Так как

$$C \begin{pmatrix} J_{p_1,q_1} & 0 \\ 0 & J_{p_1,q_1} \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} J_{p_1,q_1} & 0 \\ 0 & J_{p_1,q_1} \end{pmatrix},$$

то матрица C определяет некоторую изометрию θ пространства $V_1 \oplus V_2$. Пусть $J_1 * J_1$ — произвольный элемент алгебры $\mathcal{L}$. В базисе $\{T_1, \dots, T_{p_1+q_1}, T_1', \dots, T_{p_1+q_1}'\}$ оператору $\mathrm{ad}\,(J_1 * J_1)$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $C^{-1}\mathcal{L}C = \mathcal{L}$ и $\theta(T_i + \lambda T_i') = T_i$, $i = 1, \dots, p_1 + q_1$. Таким образом, автоморфизм θ, определяемый матрицей C, действует на алгебре $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_1$ тождественно, а пространство N отображает на пространство V_1. Тем самым утверждение теоремы справедливо для примарной подалгебры, которая разлагается в подпрямое произведение двух неприводимых подалгебр.

Пусть далее $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_s$ и $s \geq 3$. Доказательство будем проводить индукцией по числу s. Обозначим через W_{ij} проекцию W на подпространство $V_i \oplus V_j$. Предположим, что для некоторых i и j W_{ij} не распадается в прямую сумму своих проекций W_i и W_j на V_i и V_j. При этом предположении $W_i = V_i$, $W_j = V_j$, $W_{ij} = V_i \dot{+} V_j$, и а силу предыдущего результата для случая $s = 2$ существует автоморфизм θ алгебры $JO(V)$, действующий на алгебре $\mathcal{L}$ тождественно и отображавший подпространство W_{ij} на подпространство V_i. Следовательно, W сопряжено подпространству M, обладающему тем свойством, что M_{ij} для любых i и j распадается в прямую сумму своих проекций на подпространства V_i и V_j.

Допустим, не нарушая общности, что $M_{s-1} \neq 0$. Значит, $M_{s-1} = V_{s-1}$. Так как $M_{s-1,s}$ распадается в прямую сумму проекций $M_{s-1} = V_{s-1}$ и M_s, то M содержит подпространство $P = P_1 \dot{+} \cdots \dot{+} P_{s-2} \dot{+} V_{s-1}$. Обозначим через N $\mathcal{L}$-подпространство, порожденное P. Поскольку $N_s = 0$, то N инвариантно относительно алгебры $\bar{\mathcal{L}}_s = \mathcal{L}_1 * \cdots * \mathcal{L}_{s-1}$. В силу индуктивного предположения существует автоморфизм τ алгебры $JO(V)$, действующий на алгебре $\mathcal{L}$ тождественно и отображающий подпространство N на $V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$, где $q \leq s-1$. Следовательно, M сопряжено подпространству M', содержащему $V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$. Отсюда вытекает, что подпространство $M'_{q+1} \dot{+} \cdots \dot{+} M'_s \subset M'$ инвариантно относительно алгебры $\mathcal{L}$, а значит, и алгебры $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{q+1} * \cdots * \mathcal{L}_s$. По индуктивному предположению существует автоморфизм θ алгебры $JO(V)$, действующий на алгебре $\mathcal{L}'$ и подпространстве $V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$ тождественно и отображающий пространство $M'_{q+1} \dot{+} \cdots \dot{+} M'_s$ на $V_{q+1} \oplus \cdots \oplus V_t$, где $t \leq s$. Следовательно, W сопряжено $V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$. Теорема доказана.

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., The maximal solvable subgroups of the groups and all subgroups of $SU(2,1)$, *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1378–1393.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., The maximal solvable subgroups of $SO(p,q)$ groups, *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1932–1938.
3. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1597–1614.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 1615–1624.
5. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhasu H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, 2259–2288.
6. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, в кн. Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.
7. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
8. Баранник Л.Ф., Фущич В.И., Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$, Препринт 85.90, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 50 с.
9. Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И., Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $P(2,n)$, Препринт 85.89, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 52 с.
10. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида, *Укр. мат. журн.*, 1986, № 1, 67–72.
11. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., Наука, 1967, 575 с.
12. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.