Конформная симметрия и точные решения нелинейных полевых уравнений

В.И. ФУЩИЧ, В.М. ШТЕЛЕНЬ

Conformally and translationally invariant solutions are obtained for the systems of partially differential equations describing interaction of scalar, spinor and vector fields. Formulas of generating new solutions from the known ones are presented.

1. Построение точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (НДУЧП) является важной и, как правило, трудной задачей. Особый интерес представляют многомерные уравнения, поскольку реальные физические процессы происходят в трех- или четырехмерном пространстве–времени. Известный метод обратной задачи теории рассеяния эффективно применяется только к двумерным уравнениям, а его обобщение на многомерные случаи связано с принципиальными трудностями, которые до настоящего времени не преодолены.

В данной работе для получения точных решений используются симметрийные свойства многомерных систем НДУЧП, аналогично [1–6].

2. Рассмотрим следующие системы НДУЧП:

$$\left[i\gamma\partial - \lambda_1(\bar\Psi\Psi)^{1/3} - \lambda_2\varphi\right]\Psi = 0, \qquad \Box\varphi = \lambda_3\varphi^3 - \lambda_2\bar\Psi\Psi, \tag{1}$$

$$\left\{i\gamma\partial - \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3} - \mu\left[\overline{(\gamma\partial\Psi)}(\gamma\partial\Psi)\right]^{1/5}\right\}\Psi = 0, \tag{2}$$

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \lambda A_\mu A^\nu A_\nu, \tag{3}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — скалярное поле, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Psi = \Psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $\bar\Psi = \Psi^\dagger\gamma_0$, $A_\mu = A_\mu(x)$ — векторное поле, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, γ_μ — матрицы Дирака [7], $\gamma\partial \equiv \gamma^\nu\partial_\nu$, $\partial_\nu = \partial/\partial x_\nu$.

Для системы уравнений (1) в [8, 9] с помощью анзатца Гейзенберга [10] получены некоторые точные решения. Отметим, что решение, приведенное в [9], получается из решения, указанного в [8], с помощью процедуры группового размножения [2, 3] с использованием инвариантности системы (1) относительно трансляций и масштабных преобразований.

Уравнение (2) представляет собой конформно инвариантное обобщение уравнения Дирака с нелинейностью Гюрши, а система (3) — обобщение уравнений Максвелла для вектора-потенциала A_μ.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что системы (1)–(3) инвариантны относительно пятнадцатипараметрической конформной группы $C(1,3)$.

Украинский физический журнал, 1985, **30**, № 5, С. 787–789.

Чисто конформные преобразования имеют вид

$$x'_\mu = (x_\mu - c_\mu x^2)/\sigma(x), \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2, \qquad cx \equiv c^\nu x_\nu,$$
$$c^2 \equiv c^\nu c_\nu, \qquad \varphi'(x') = \sigma(x)\varphi(x), \qquad \Psi'(x') = \sigma(x)(1 - \gamma c\gamma x)\Psi(x), \tag{4}$$
$$A'_\mu(x') = \left[\sigma(x) g_{\mu\nu} + 2(x_\mu c_\nu - x_\nu c_\mu + 2cx c_\mu x_\nu - x^2 c_\mu c_\nu - c^2 x_\mu x_\nu)\right] A^\nu(x),$$

где c_μ — произвольные постоянные, $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}$.

Решения систем (1)–(3) ищем в виде [1]

$$\varphi(x) = f(x) u(\omega), \qquad \Psi(x) = M(x)\Phi(\omega), \qquad A_\mu(x) = a_{\mu\nu}(x) b^\nu(\omega). \tag{5}$$

Скалярную функцию $f(x)$, матрицы 4×4 $M(x)$, $\hat{a}(x) = \{a_{\mu\nu}(x)\}$ и новые переменные $\omega = \omega(x)$ определим из условий [2, 3]

$$Q_{\rm conf} \begin{pmatrix} f \\ M \\ \hat{a} \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

где

$$Q_{\rm conf} = 2(cx)x\partial - x^2 c\partial + \begin{pmatrix} 2cx & 0 & 0 \\ 0 & 2cx + \gamma c\gamma x & 0 \\ 0 & 0 & 2(cx + S_{\mu\nu} c^\mu x^\nu) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ — матрицы 4×4, реализующие неприводимое представление $D(1/2, 1/2)$ алгебры Ли группы $SO(1,3)$ [6].

Можно убедиться, что условия (6) удовлетворяются следующими функциями:

$$f(x) = \frac{1}{x^\nu x_\nu}, \qquad M(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2}, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{x^\alpha x_\alpha} - 2\frac{x_\mu x_\nu}{(x^\alpha x_\alpha)^2},$$
$$\omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}, \qquad \beta^\nu = \text{const}. \tag{8}$$

Подстановка конформно инвариантных анзатцов (5), (8) в системы (1)–(3) приводит к следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений соответственно:

$$\dot{\Phi} = i\left[\lambda_1(\bar{\Phi}\Phi)^{1/3} + \lambda_2 u\right](\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\gamma\beta\Phi, \qquad \ddot{u} = (\beta_\nu\beta^\nu)^{-1}\left(\lambda_3 u^3 - \lambda_2\bar{\Phi}\Phi\right), \tag{9}$$

$$\dot{\Phi} = i(\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}(\gamma\beta)\left[\lambda(\bar{\Phi}\Phi)^{1/3} + \mu(\dot{\bar{\Phi}}\dot{\Phi}\beta_\nu\beta^\nu)^{1/5}\right]\Phi, \tag{10}$$

$$\beta^\nu\beta_\nu\ddot{b}_\mu - \beta_\mu(\beta_\nu\ddot{b}_\nu) = \lambda b_\mu b^\nu b_\nu, \tag{11}$$

где дифференцирование произведено по ω.

Простейшими решениями этих систем будут соответственно функции

$$u = c = \text{const}, \qquad \Phi = \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi,$$
$$\varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3 c^3 = \lambda_2\bar{\chi}\chi, \tag{12}$$

$$\Phi = \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi, \qquad \varkappa = (\beta^\nu\beta_\nu)^{-1}\left[\lambda[\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \mu(\varkappa^2(\beta^\nu\beta_\nu)^2\bar{\chi}\chi)^{1/5}\right], \tag{13}$$

$$b_\mu = \alpha_\mu g(\omega), \qquad \alpha_\mu = \text{const}, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3, \qquad \alpha\beta = 0 \tag{14}$$

($\varkappa$ — постоянная, χ — постоянный спинор).

Таким образом, получаем конформно инвариантные решения систем (1)–(3):

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2} \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi, \qquad \omega = \frac{\beta x}{x^\nu x_\nu}, \qquad \varphi(x) = \frac{c}{x^\nu x_\nu},\\
&\varkappa = (\beta^\nu \beta_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3 c^3 = \lambda_2 \bar{\chi}\chi,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^\nu x_\nu)^2} \exp\{i\varkappa(\gamma\beta)\omega\}\chi,\\
&\varkappa = (\beta^\nu \beta_\nu)^{-1}\left[\lambda[\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \mu(\varkappa^2(\beta^\nu\beta_\nu)^2\bar{\chi}\chi)^{1/5}\right],
\end{aligned} \tag{16}$$

$$A_\mu(x) = \left(\frac{\alpha_\mu}{x^\nu x_\nu} - 2x_\mu \frac{\alpha x}{(x^\nu x_\nu)^2}\right) g(\omega), \qquad \alpha\beta = 0, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3, \tag{17}$$

$g(\omega)$ — эллиптические функции.

Аналогичным образом, получаются трансляционно инвариантные решения систем (1)–(3). Они имеют вид соответственно

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma k)(kx)\}\chi, \qquad \varphi(x) = c,\\
&\varkappa = (k^\nu k_\nu)^{-1}\left[\lambda_1(\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \lambda_2 c\right], \qquad \lambda_3 c^3 = \lambda_2\bar{\chi}\chi,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) = \exp\{-i\varkappa(\gamma k)(kx)\}\chi,\\
&\varkappa = (k^\nu k_\nu)^{-1}\left\{\lambda[\bar{\chi}\chi)^{1/3} + \mu\left[\varkappa^2(k^\nu k_\nu)^2(\bar{\chi}\chi)^{1/5}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$A_\mu(x) = \alpha_\mu g(kx), \qquad \alpha k = 0, \qquad \ddot{g} = \varkappa g^3. \tag{20}$$

Решения (18)–(20) можно использовать для получения других семейств решений систем (1)–(3) по формулам [2, 3].

Для конформных преобразований (4) формулы генерирования новых решений имеют вид

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\text{н}}(x) = \frac{\varphi_{\text{c}}(x')}{\sigma(x)}, \qquad x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2cx + c^2x^2,\\
&\Psi_{\text{н}}(x) = \frac{1-\gamma x\gamma c}{\sigma(x)}\Psi_{\text{c}}(x'), \qquad A^{\text{н}}_\mu(x) = \left\{g_{\mu\nu}/\sigma(x) + 2/\sigma^2(x)[c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu + \right.\\
&\qquad \left. +2cx x_\mu c_\nu - c^2 x_\mu x_\nu - x^2 c_\mu c_\nu)\right\} A^\mu_{\text{c}}(x').
\end{aligned} \tag{21}$$

В заключение отметим, что с помощью использованного здесь метода найдены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака [2, 3], эйконала [4], Янга–Миллса [5], уравнений квантовой электродинамики с самодействием электромагнитного поля [6].

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *ДАН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
3. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271–278.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., The symmetry and some exact solutions of relativistic eikonal equation, *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 15, 498–502.
5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Conformal symmetry and new exact solutions of $SU(2)$ Yang–Mills theory, *Lett. Nuovo Cim.*, 1983, **38**, № 2, 37–40.
6. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3/4, 215–217.
7. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Квантовые поля, М., Наука, 1980, 320 с.
8. Barut A.O., Bo-Wei Xu, Derivation and uniqueness of vacuum solutions of conformally invariant coupled nonlinear field equations, *Phys. Lett. B*, 1981, **102**, № 1, 37–39.
9. Barut A.O., Bo-Wei Xu, New exact solution of coupled nonlinear field equations, *Physica D*, 1982, **6**, № 2, 137–139.
10. Гейзенберг В., Нелинейное спинорное уравнение, В кн.: Нелинейная квантовая теория поля, М., Изд-во иностр. лит., 1959, 63–75.