Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I

В.И. ФУЩИЧ, А.Ф. БАРАННИК, Л.Ф. БАРАННИК

В работе изучаются подалгебры обобщенной алгебры Евклида $\mathcal{L}E(n)$ и обобщенной алгебры Галилея $\mathcal{L}G(n)$ для произвольного $n \geq 2$. Показано, что полное описание подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сводится к задаче классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр ортогональной алгебры $\mathcal{L}O(n)$. Выделены все подалгебры $\mathcal{L}O(n)$, обладающие только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$ и в изохронной алгебре Галилея $\mathcal{L}\bar{G}(n)$. Доказывается теорема о строении подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

Изложен алгоритм классификации относительно $G(n)$-сопряженности расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Полностью описаны относительно $G(n)$-сопряженности максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ и расширенной алгебры Галилея $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$.

Полностью проведена классификация всех подалгебр алгебр Евклида $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$, а также подалгебр алгебр $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

Введение

Пусть $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство. Группа Галилея $G(n)$ определяется как множество всех преобразований вида

$$\vec{x}' = W\vec{x} + t\vec{v} + \vec{u}, \quad t' = t + b,$$

где t — время, W — ортогональное преобразование $\mathbb{R}^n$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Групповое умножение двух произвольных элементов $(W, b, \vec{v}, \vec{u})$, $(W', b', \vec{v}', \vec{u}')$ группы $G(n)$ определяется формулой

$$(W, b, \vec{v}, \vec{u}) \cdot (W', b', \vec{v}', \vec{u}') = (WW', b + b', W\vec{v}' + \vec{v}, W\vec{u}' + \vec{u} + b'\vec{v}).$$

Групповое умножение может быть записано как матричное произведение, если представить $g = (W, b, \vec{v}, \vec{u})$ в виде матрицы порядка $n + 2$:

$$g = \begin{pmatrix} W & \vec{v} & \vec{u} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что алгебра Ли $\mathcal{L}G(n)$ группы $G(n)$ допускает изоморфное представление матрицами

$$\begin{pmatrix} S & \vec{v}_1 & \vec{u}_1 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где S — кососимметрическая матрица порядка n, $\vec{v}_1$, $\vec{u}_1$ — произвольные n-мерные векторы, b_1 — вещественное число. Обозначим через J_{ab} $(a < b)$, P_a, G_a

Препринт 85.19, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 46 с.

$(a,b=\overline{1,n})$ соответственно генераторы поворотов, пространственных трансляций, чистых преобразований Галилея, а через P_0 — генератор временной трансляции. Эти генераторы образуют базис алгебры $\mathcal{L}G(n)$ и связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$[J_{ab},J_{cd}]=\delta_{ad}J_{bc}+\delta_{bc}J_{ad}-\delta_{ac}J_{bd}-\delta_{bd}J_{ac},\qquad [P_a,J_{bc}]=\delta_{ab}P_c-\delta_{ac}P_b,$$
$$[P_a,P_b]=0,\qquad [G_a,J_{bc}]=\delta_{ab}G_c-\delta_{ac}G_b,\qquad [G_a,G_b]=0,\qquad [P_a,G_b]=0,$$
$$[P_0,J_{ab}]=[P_0,P_a]=0,\qquad [G_a,P_0]=P_a\quad (a,b,c=\overline{1,n}).$$

Расширенная группа Галилея $\widetilde{G}(n)$ определяется как центральное расширение мультипликативной группы комплексных чисел, равных по модулю единице, с помощью группы $G(n)$. Алгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$, называемая расширенной алгеброй Галилея, получается из алгебры $\mathcal{L}G(n)$, если для генератора центра M положить $[G_a,P_a]=M$, а все остальные коммутационные соотношения оставить без изменения. В дальнейшем генераторы алгебр $\mathcal{L}G(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ будем обозначать одними и теми же символами.

Описание подгрупповой структуры группы Ли используется при решении ряда задач математической и теоретической физики: разделение переменных в линейных дифференциальных уравнениях в частных производных [1], построение точных частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [2–4], редукция представлений группы на подгруппы [5–7] .

Алгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ является одной из важных подалгебр алгебры Пуанкаре $\mathcal{L}P(1,4)$, которую в работах [8–11] было предложено использовать для описания движения частиц переменной массы и переменного спина. В [12] связные подгруппы группы $G(3)$ были применены в качестве групп инвариантности электромагнитных полей. Группа Галилея является подгруппой группы симметрии свободного уравнения Шредингера [13, 14], и поэтому может быть использована для классификации потенциалов и граничных условий. В работе [15] подгруппы евклидовой группы $E(3)$ являющейся подгруппой $G(3)$, были использованы для изучения нарушений симметрии в нерелятивистской квантовой механике скалярной и спинорной частиц.

В [16] проведено исследование относительно $G(3)$-сопряженности подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(3)$. Анализ списка подалгебр, полученных в этой работе, показывает, что некоторые из них являются сопряженными относительно $G(3)$.

В данной работе исследуется для произвольного $n\geq 2$ структура алгебры $\mathcal{L}G(n)$ относительно $G(n)$-сопряженности. При описании представителей классов $G(n)$-сопряженных подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$ мы используем предложенный в [17] общий метод нахождения классов сопряженных подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным абелевым идеалом. Дадим краткую характеристику работы.

В § 1 изучены разрешимые подалгебры обобщенной алгебры Евклида $\mathcal{L}E(n)$. Показано, что полное описание таких подалгебр относительно $E(n)$-сопряженности сводится к классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр подалгебры Картана алгебры $\mathcal{L}O(n)$.

В § 2 выделены подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(n)$, обладающие только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$ и в изохронной алгебре Галилея $\mathcal{L}\bar{G}(n)$. В этом же параграфе доказывается теорема о строении подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

В § 3, являющимся логическим продолжением предыдущих параграфов, изложен алгоритм классификации относительно $G(n)$-сопряженности расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Полностью описаны относительно $G(n)$-сопряженности максимальные абелевы подалгебры алгебр $\mathcal{L}G(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$.

§ 4 посвящен классификации всех подалгебр алгебр Евклида $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$, а в § 5 мы находим представители классов $G(3)$-сопряженных подалгебр алгебр $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

Отметим, что в следующей статье будет изложена классификация всех подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(4)$ и подалгебр с некоторыми ограничениями алгебры $\mathcal{L}G(5)$.

§ 1 Разрешимые подалгебры обобщенной алгебры Евклида

Пусть $\langle X_1, X_2, \ldots, X_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли с образующими $X_1, X_2, \ldots, X_s$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел; $\mathfrak{N} = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$; $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$; $\mathfrak{J}(n) = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$ — подалгебра Картана алгебры $\mathcal{L}O(n)$ группы $O(n)$ ортогональных преобразований n-мерного евклидова пространства, $m = [n/2]$;

$$\Gamma(n) = \left\{\sum_1^m \gamma_i J_{2i-1,2i} \mid \gamma_i = 0, \pm 1\right\}; \qquad \left|\sum_1^m \gamma_i J_{2i-1,2i}\right| = \sum_1^m |\gamma_i| J_{2i-1,2i}.$$

Если $X_a, X_b \in \Gamma(n)$, то $|X_a| \cap |X_b|$ — сумма общих слагаемых элементов $|X_a|$, $|X_b|$; $X_a \cap X_b = 0$, если $|X_a|$ и $|X_b|$ не имеют общих слагаемых.

Алгебра Евклида $\mathcal{L}E(n)$ n-мерного пространства определяется такими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac},\\
&[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \qquad [P_a, P_b] = 0, \qquad J_{ba} = -J_{ba} \quad (a, b, c = \overline{1, n}).
\end{aligned}$$

Предложение 1.1. *Алгебра $J\mathfrak{J}(n) = \mathfrak{N} \subset\!\!\!\!+ \ \mathfrak{J}(n)$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $\mathcal{L}E(n)$. Каждая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сопряжена с $J\mathfrak{J}(n)$.*

Доказательство. Хорошо известно, что $\mathcal{L}O(n)$ обладает относительно $O(n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с подалгеброй Картана $\mathfrak{J}(n)$. Так как $\mathfrak{N}$ — радикал $\mathcal{L}E(n)$, то каждая максимальная разрешимая подалгебра содержит $\mathfrak{N}$, а потому сопряжена с $J\mathfrak{J}(n)$. Предложение доказано.

Лемма 1.1. *Одномерные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(n)$ исчерпываются относительно $O(n)$-сопряженности алгебрами*

$$\langle J_{12} + \alpha_1 J_{34} + \cdots + \alpha_{m-1} J_{2m-1,2m}\rangle,$$

где $m = [n/2]$, $0 \le \alpha_{m-1} \le \cdots \le \alpha_1 \le 1$. Две такие алгебры $O(n)$-сопряжены тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых базисных векторах $J_{2l-1,2l}$ $(l = \overline{2, m})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$ и $\dim\mathfrak{A} = 1$, то $\mathfrak{A}$ сопряжена с алгеброй $\langle \beta_1 J_{12} + \beta_2 J_{34} + \cdots + \beta_m J_{2m-1,2m}\rangle$. Пусть C — матрица, получаемая из единичной в результате выполнения над столбцами такой подстановки

$$\begin{pmatrix} 2s-1 & 2s & 2t-1 & 2t \\ 2t & 2t-1 & 2s & 2s-1 \end{pmatrix} \quad (s < t).$$

Автоморфизм $\mathcal{L}O(n)$, соответствующий матрице C, оставляет без изменений генераторы $J_{2a-1,2a}$ $(a \neq s,\ a \neq t)$ и отображает $J_{2s-1,2s}$ в $-J_{2t-1,2t}$, а $J_{2t-1,2t}$ — в $-J_{2s-1,2s}$. Вследствие этого можно предполагать, что $\beta_1 \neq 0$ и если $\beta_c = 0$ для $1 < c < m$, то $\beta_i = 0$ для всех $i > c$. Умножив генератор алгебры $\mathfrak{A}$ на β_1^{-1}, получим, что $\mathfrak{A} = \langle J_{12}+\alpha_1 J_{34}+\cdots+\alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle$, где все коэффициенты, следующие за нулевым коэффициентом, суть нулевые. Автоморфизм $\mathcal{L}O(n)$, соответствующий матрице

$$\mathrm{diag}\,\{\underbrace{1,\ldots,-1}_{2s+1},\ldots,1\},$$

изменяет знак α_s и оставляет без изменений остальные коэффициенты. Следовательно, можно предполагать, что $\alpha_i \geq 0$ для $i = \overline{1, m-1}$.

Если $\alpha_1 > 1$, то, переставив J_{12} и J_{34}, подучим алгебру

$$\langle \alpha_1 J_{12} + J_{34} + \alpha_2 J_{56} + \cdots + \alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle = \\ = \langle J_{12} + \alpha_1^{-1}J_{34} + \alpha_1^{-1}\alpha_2 J_{56} + \cdots + \alpha_1^{-1}\alpha_{m-1}J_{2m-1,2m}\rangle.$$

На основании этого можно всегда допускать, что $1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{m-1} \geq 0$.

Так как характеристический многочлен матрицы

$$\lambda(J_{12} + \alpha_1 J_{34} + \cdots + \alpha_{m-1}J_{2m-1,2m})$$

равен

$$(x^2+\lambda^2)(x^2+\alpha_1^2\lambda^2)\cdots(x^2+\alpha_{m-1}^2\lambda^2),$$

то из сопряженности алгебр

$$\langle J_{12} + \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i J_{2i+1,2i+2}\rangle, \qquad \langle J_{12} + \sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i J_{2i+1,2i+2}\rangle$$

вытекает, что $1 = \lambda^2\alpha_j^2$, $\gamma_i^2 = \lambda^2\alpha_{n_i}^2$ $(i = \overline{1, m-1},\ j \neq i)$. Отсюда получаем, что $\lambda^2 = 1$ и $\alpha_i = \gamma_i$ для всех $i = \overline{1, m-1}$. Лемма доказана.

Предложение 1.2. *Ненулевая абелева подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(n)$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{A}(p,0;0) = \langle J_{2i-1,2i} \mid i = \overline{1,p}\ \rangle$ или с алгеброй $\mathfrak{A}(p,q;\alpha)$, обладающей базисом*

$$\left\{ J_{2i-1,2i} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\alpha_{ij}J_{2j-1,2j} \mid i = \overline{1,p} \right\}, \tag{1.1}$$

где коэффициенты α_{ij} удовлетворяют таким условиям:

$$\begin{aligned} 1)\quad & 1 \geq \alpha_{1,p+1} \geq \alpha_{1,p+2} \geq \alpha_{1l_1} > 0, \quad \alpha_{1,l_1+1} = \cdots = \alpha_{1m} = 0; \\ & 1 \geq \alpha_{2,l_1+1} \geq \alpha_{2,l_1+2} \geq \alpha_{2l_2} > 0, \quad \alpha_{2,l_2+1} = \cdots = \alpha_{2m} = 0; \\ & 1 \geq \alpha_{s,l_{s-1}+1} \geq \alpha_{s,l_{s-1}+2} \geq \cdots \geq \alpha_{sl_s} > 0, \quad \alpha_{s,l_s+1} = \cdots = \alpha_{sm} = 0, \\ & \alpha_{ij} = 0 \quad \textit{при} \quad i > s,\ j > q+p = l_s; \end{aligned}$$

2) *если в i-ой строке подряд записано несколько равных коэффициентов $(i = \overline{1,t})$, то в $t{+}1$-ой строке коэффициенты с теми же номерами расположены в порядке убывания;*

3) *число ненулевых элементов i-ой строки не меньше числа ненулевых элементов $i+1$-ой строки* ($i = \overline{1, p-1}$).

Доказательство. Согласно лемме 1.1 ненулевая подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры Картана $\mathfrak{J}(n)$ обладает генератором $J_{12} + \alpha_2 J_{34} + \cdots + \alpha_m J_{2m-1,2m}$ ($m = [n/2]$). Если $\dim \mathfrak{A} > 1$, то по лемме 1.1 в $\mathfrak{A}$ существует генератор $J_{34} + \beta_3 J_{56} + \cdots + \beta_m J_{2m-1,2m}$. Продолжая эти рассуждения, приходам к выводу о существовании в $\mathfrak{A}$ базиса

$$\left\{ J_{2i-1,2i} + \sum_{j=p+1}^{m} \alpha_{ij} J_{2j-1,2j} \mid i = \overline{1,p} \right\},$$

где $p = \dim \mathfrak{A}$. Используя рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 1.1, получаем, что построенный базис сопряжен с базисом (1.1). Предложение доказано.

Лемма 1.2. *Пусть $X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s$, где $X_1, \ldots, X_s \in \Gamma(n)$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — такие ненулевые вещественные числа, что $\alpha_i^2 \neq \alpha_j^2$ при $i \neq j$. Если $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$ и $[X, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus \cdots \oplus [X_s, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X_i, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $i = \overline{1, s}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по s. Пусть $X_1 = \sum\limits_{1}^{b} \pm J_{2i_j-1,2i_j}$. Так как $[X_1, \mathfrak{M}]$ — проекция $\mathfrak{M}$ на $\langle P_{2i_1-1}, P_{2i_1}, \ldots, P_{2i_b-1}, P_{2i_b} \rangle$, то $\mathfrak{M} = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X_1, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$.

Пусть $s > 1$. Если $Y \in \mathfrak{M}$, то $Y = Y_1 + \cdots + Y_s + \widetilde{Y}$, где $Y_j = -[X_j, [X_j, Y]]$, $[X_j, \widetilde{Y}] = 0$ ($j = \overline{1, s}$). Так как

$$-[X, [X, Y]] = \alpha_1^2 Y_1 + \alpha_2^2 Y_2 + \cdots + \alpha_s^2 Y_s,$$

то

$$-[X, [X, Y]] - \alpha_1^2 Y = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) Y_2 + \cdots + (\alpha_s^2 - \alpha_1^2) - \alpha_1^2 \widetilde{Y}.$$

Пусть $\mathfrak{M}' = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X_1, Y] = 0\}$. Очевидно, $\mathfrak{M}'$ инвариантно относительно $\alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_s X_s$, а потому к нему применимо индуктивное предположение. Поскольку $[X, [X, Y]] + \alpha_1^2 Y \in \mathfrak{M}'$, то $Y_2, \ldots, Y_s$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{M}'$. Отсюда вытекает, что $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s, \widetilde{Y} \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $X = X_1 + X_2$, $X' = X_3 + X_4$, где $X_i \in \Gamma(n)$ ($i = \overline{1,4}$), $|X_1| = |X_3|$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i < j$, $(i,j) \neq (1,3)$. Если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно $\operatorname{ad} X$, $\operatorname{ad} X'$, то $\mathfrak{M} = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus [X_2, \mathfrak{M}] \oplus [X_4, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$, $[X', \mathfrak{M}'] = 0$.*

Доказательство. По лемме 1.2 $\mathfrak{M} = [X, \mathfrak{M}] \oplus \mathfrak{M}'$, где $[X, \mathfrak{M}'] = 0$. Так как $X_i \cap X_j = 0$ при $i < j$, $(i,j) \neq (1,3)$, то $[X', [X, \mathfrak{M}]] = [X_3, [X_1, \mathfrak{M}]] = [X_1, \mathfrak{M}]$. Но тогда $[X, \mathfrak{M}] = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus [X_2, \mathfrak{M}]$. Поскольку $[X, \mathfrak{M}'] = 0$, то $[X', \mathfrak{M}'] = [X_4, \mathfrak{M}']$, а потому $\mathfrak{M}' = [X_4, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$, $[X', \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть $X, X' \in \Gamma(n)$, $|X| = |X'|$ и $[X, \mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$, $[X', \mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = [X + X', \mathfrak{M}] \oplus [X - X', \mathfrak{M}]$.*

Доказательство. Очевидно, $2^{-1}(X + X')$ — это сумма генераторов $J_{2a-1,2a}$, входящих в запись X, X' с одинаковыми знаками, а $2^{-1}(X - X')$ — это сумма генераторов $J_{2a-1,2a}$, входящих в запись X, X' с различными знаками. По лемме 1.2 $\mathfrak{M} = [X + X', \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X + X', \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$. Так как $\mathfrak{M} = [X, \mathfrak{M}]$, то $\widetilde{\mathfrak{M}} = [X - X', \mathfrak{M}]$. Следовательно, $\mathfrak{M} = [X + X', \mathfrak{M}] \oplus [X - X', \mathfrak{M}]$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ненулевая подалгебра $\mathfrak{J}(n)$. Будем писать $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, если $\mathfrak{A} \subset \langle H_1, H_2, \ldots, H_s\rangle$, где $H_1, H_2, \ldots, H_a \in \Gamma(n)$, $|H_i| = H_i$, $H_i \cap H_j = 0$ при $i \neq j$ и выполняются условия:

1) для каждого $i = \overline{1, a}$ проекция $\mathfrak{A}$ на $\langle H_i\rangle$ отлична от нуля;

2) для любых H_i, H_j $(i \neq j)$ алгебра $\mathfrak{A}$ содержит $\cdots + \alpha_i H_i + \cdots + \alpha_j H_j + \cdots$ с неравными α_i, α_j;

3) если все ненулевые коэффициенты при H_i в базисных векторах $\mathfrak{A}$ имеют одинаковый знак, то эти коэффициенты суть положительные числа.

Теорема 1.1. *Каждая нулевая подалгебра $\mathfrak{A}$ вида (1.1) алгебры $\mathfrak{J}(n)$ может быть записана в виде $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, где $H_1, H_2, \ldots, H_a \in \Gamma(n)$. Элементы $H_1, H_2, \ldots, H_a$ определяются алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до нумерации. Подпространства пространства $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, исчерпываются относительно $O(n)$-сопряженности пространствами $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}_j = [H_j, \mathfrak{M}_j]$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $j = \overline{1, a}$.*

Если $H_j = \sum \alpha_{jb} J_{2b-1,2b}$, где $\alpha_{jb_1} = \cdots = \alpha_{jb_{s_j}} = 1$, $\alpha_{jb} = 0$ при $b \notin \{b_1, \ldots, b_{s_j}\}$, то относительно $O(n)$-сопряженности подпространства $\mathfrak{M}_j$ исчерпываются пространствами

$$O,\ \langle P_{2b_1-1}, P_{2b_1}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{2b_1-1}, P_{2b_1}, P_{2b_2-1}, P_{2b_2}, \ldots, P_{2b_{s_j}-1}, P_{2b_{s_j}}\rangle. \tag{1.2}$$

Если $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ = \mathfrak{A}(p, q; \alpha)$, то пространство $\widetilde{\mathfrak{M}}$ совпадает относительно $O(n)$-сопряженности с одним из пространств:

$$O,\ \langle P_{2(p+q)+1}\rangle,\ \langle P_{2(p+q)+1}, P_{2(p+q)+2}\rangle,\ \ldots,\ \langle P_{2(p+q)+1}, P_{2(p+q)+2}, \ldots, P_n\rangle. \tag{1.3}$$

Доказательство. В каждом базисном элементе алгебры $\mathfrak{A}$ соберем слагаемые с коэффициентами, равными по абсолютной величине, вынесем за скобки абсолютную величину коэффициентов, а затем в полученных выражениях выделим суммы, содержащие максимально возможное число слагаемых с одним и тем же знаком. Пусть $S = \{X_1, \ldots, X_k\}$ — множество абсолютных значений всех таких сумм. Если $X_i \cap X_j \neq 0$, то из множества S исключаем X_i, X_j и вводим $X_i \cap X_j$, $X_i - X_i \cap X_j$, $X_j - X_i \cap X_j$. В полученном множестве снова находим ненулевые пересечения его элементов и производим дальнейшее преобразование множества S. На конечном шаге мы получим множество $\{H_1, H_2, \ldots, H_a\}$, обладающее тем свойством, что $H_i \cap H_j = 0$ при $1 \leq i < j \leq a$. Легко убедиться, что $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$.

Докажем единственность такого представления алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ = \langle H'_1, H'_2, \ldots, H'_{a'}\rangle$. Очевидно, H'_j является линейной комбинацией $H_1, H_2, \ldots, H_a$. Так как $|H'_j| = H'_j$, то H'_j совпадает с суммой некоторых $H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_r}$. Но тогда $\sum \alpha_i H_i$, где $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$, не принадлежит $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$, что противоречит условию 2) определения $\langle H_1, H_2, \ldots, H_a\rangle^\circ$. Значит, $H'_j = H_{i_j}$ для всех $j = \overline{1, a'}$. Отсюда вытекает, что $a \geq a'$. Аналогично получаем, что $a' \geq a$, а потому $a = a'$ и $\{H_1, H_2, \ldots, H_a\} = \{H'_1, H'_2, \ldots, H'_{a'}\}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно $\mathfrak{A}$. На основании лемм 1.2–1.4 получаем, что $\mathfrak{M} = [H_1, \mathfrak{M}] \oplus \cdots \oplus [H_a, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $j = \overline{1, a}$.

Пусть $H = J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2l-1,2l}$, $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$ с условием $[H, \mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$. Проведем классификацию всех таких $\mathfrak{M}$ относительно $O(2l)$-сопряженности.

Пусть $l = 2$ и $\dim \mathfrak{M} = 2$. Тогда $\mathfrak{M}$ обладает базисом $P_1 + \gamma P_3$, $P_2 + \gamma P_4$, $\gamma \geq 0$. Пусть

$$C(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что $C \in O(4)$ и что $C^{-1}(J_{12} + J_{34})C = J_{12} + J_{34}$. Так как

$$C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

то автоморфизм $\mathcal{L}E(4)$, соответствующий матрице C^{-1}, отображает $\langle P_1 + \gamma P_3, P_2 + \gamma P_4 \rangle$ на $\langle P_1, P_2 \rangle$.

Пусть $l = 2$. Тогда $\mathfrak{M}$ сопряжено пространству, содержащему элементы $P_1 + \gamma_2 P_3 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_2 P_4 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Автоморфизм $\mathcal{L}E(2l)$, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{C(\gamma_2), 1, \ldots, 1\}$, не изменяет $\mathfrak{A}$, $\langle H \rangle$ и отображает $\mathfrak{M}$ на пространство $\mathfrak{M}'$, содержащее $P_1 + \gamma_3 P_5 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_3 P_6 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Если к пространству $\mathfrak{M}'$ применять автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{\widetilde{C}(\gamma_3), 1, \ldots, 1\}$, где

$$\widetilde{C}(\gamma) = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = (1+\gamma^2)^{-1/2}),$$

то получим пространство, содержащее $P_1 + \gamma_4 P_7 + \cdots + \gamma_l P_{2l-1}$, $P_2 + \gamma_4 P_8 + \cdots + \gamma_l P_{2l}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ сопряжено с пространством $\langle P_1, P_2 \rangle \oplus \mathfrak{V}$, где $\mathfrak{V} \subset \langle P_3, P_4, \ldots, P_{2l} \rangle$. Отсюда заключаем , что $\mathfrak{M}$ сопряжено одному из пространств: $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, …, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{2l-1}, P_{2l} \rangle$.

Справедливость последнего утверждения теоремы вытекает из теоремы Витта. Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}E(n)$, что ее проекция на $\mathcal{L}O(n)$ совпадает с $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(p, q; \alpha)$. Если $X_1, \ldots, X_k$ — базис $\mathfrak{A}$ вида (1.1), $Y_1, \ldots, Y_l$ — базис $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{N}$ вида (1.2)–(1.3), то $\mathfrak{A}$ сопряжена с алгеброй, обладающей базисом*

$$Y_1, \ldots, Y_l, X_1 + \sum \lambda_{1j} P_j, \ldots, X_k + \sum \lambda_{kj} P_j \quad (j = 2(p+q)+1, \ldots, n),$$

где коэффициенты суть нулевые или удовлетворяют условию:

$$\lambda_{i_1 t} \neq 0, \quad \lambda_{i_2, t+1} \neq 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{i_r, t+r-1} \neq 0 \quad (t = 2(p+q)+1);$$
$$\lambda_{ab} = 0 \quad \textit{при } a < i_1; \quad i_s < a < i_s + 1 \quad \textit{и} \quad b > t + s - 1 \ (s = \overline{1, r-1});$$
$$a > i_r \quad \textit{и} \quad b > t + r - 1.$$

Доказательство. Если применить автоморфизм $\exp(\sum \beta_i P_i)$ $(i = \overline{1,n})$, то можно допускать, что алгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ содержит генератор $X_1 + \sum \gamma_{1i} P_i$, где γ_{1i} может биыть отлично от нуля только для таких значений i, для которых $[X_1, P_i] = 0$. Если $X_2 + \sum \gamma_{2i} P_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\gamma_{2i_0} \neq 0$ для такого i_0, что $[X_1, P_{i_0}] = 0$, то

$$[X_1 + \sum \gamma_{1i} P_i, X_2 + \sum \gamma_{2i} P_i] = \sum \rho_i P_i,$$

где $\rho_{i_0} \neq 0$. Отсюда в силу теоремы 1.1 вытекает, что $P_{i_0} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$. Значит, ни в одном из генераторов $X_b + \sum \gamma_{bi} P_i$ $(b = \overline{1,k})$ не содержится такое P_i, что $[X_1, P_i] \neq 0$, $P_i \notin \widetilde{\mathfrak{A}}$. Такими же рассуждениями получаем, что $[X_b, \sum \gamma_{1i} P_i] = 0$ для $b = \overline{2,k}$. Аналогично исследуем остальные базисные элементы. Дальнейшее упрощение генераторов $\widetilde{\mathfrak{A}}$ производим на основании теоремы Витта. Теорема доказана.

Теоремы 1.1, 1.2 сводят в силу предложения 1.1 описание разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ описанию подалгебр алгебры $\mathfrak{J}(n)$.

Следствие 1. *Каждая разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ сопряжена с $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ — абелева подалгебра $\mathcal{L}E(n)$.*

Следствие 2. *Каждая нильпотентная подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$ является абелевой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — нильпотентная подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n)$, $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{N}$. Если $[\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{M}] \neq 0$, то по теореме 1.2 алгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ содержит такие ненулевые элементы X, Y_1, Y_2, что $\langle X, Y_1, Y_2 \rangle = \mathcal{L}E(2)$. Так как $\mathcal{L}E(2)$ не является нильпотентной алгеброй, то мы приходим к противоречию. Значит, $[\widetilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{M}] = 0$. Отсюда и из следствия 1 заключаем, что $\mathfrak{A}$ — абелева алгебра. Следствие доказано.

Предложение 1.3. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(n)$ исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности такими алгебрами:*
$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m$;
$\langle P_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m+1$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_{2r}, J_{2r+1,2r+2}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m$;
$\langle P_1, P_2, \ldots, P_{2r}, P_n, J_{2r+1,2r+2}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ *при* $n = 2m+1$, *где* $r = \overline{1, m-1}$.
Число максимальных абелевых подалгебр алгебры $\mathcal{L}E(n)$ равно $[n/2]+1$.

Предложение 1.3 вытекает из теоремы 1.2.

§ 2 Общие замечания о структуре алгебры Галилея n-мерного пространтсва

Пусть π, π_0, π_1, π_2 — проектирование $\mathcal{L}G(n)$ соответственно на $\mathcal{L}O(n)$, $\langle P_0 \rangle$, $\langle G_1, \ldots, G_n \rangle$, $\langle P_1, \ldots, P_n \rangle$, $\mathcal{R}(n) = \langle G_1, \ldots, G_n, P_1, \ldots, P_n \rangle$, $\mathfrak{N} = \pi_2(\mathcal{R}(n))$, $\mathfrak{V} = (\pi_1 + \pi_2)(\mathcal{R}(n))$.

Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\widetilde{f}$ — такая подалгебра алгебры $\mathcal{L}E(n) = \mathfrak{N} \dotplus \mathcal{L}O(n)$, что $\pi(\widetilde{f}) = f$. Если алгебра $\widetilde{f}$ $E(n)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M} \dotplus f$, где $\mathfrak{M}$ —

f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{N}$, то $\widetilde{f}$ будем называть расщепимой в алгебре $\mathcal{L}E(n)$. Если любая подалгебра $\widetilde{f} \subset \mathcal{L}E(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\widetilde{f}) = f$, является расщепимой, то будем говорить, что подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}E(n)$. Примерами таких подалгебр является все полупростые подалгебры.

Для определения структуры произвольной подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ (и, в частности, алгебры $\mathcal{L}E(n)$) важно решить вопрос о тех подалгебрах алгебры $\mathcal{L}O(n)$, которые обладают только расщепимыми расширениями в $\mathcal{L}E(n)$. Поэтому в данном параграфе мы определяем вначале подалгебры такого рода.

Алгебру $\mathcal{L}O(n)$ мы рассматриваем как алгебру кососимметрических операторов в пространстве $\mathfrak{N}$ и потому для нее справедлив следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\mathfrak{M}$ — f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{M}'$ — произвольное f-инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ разложимо в прямую сумму двух ортогональных f-инвариантных подпространств $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}'^{\perp}$.*

Пусть $f \subset \mathcal{L}O(n)$ и X — произвольный элемент $\mathfrak{N}$. Пересечение всех f-инвариантных подпространств пространства $\mathfrak{N}$, содержащих X, будем называть f-подпространством, порожденным X.

Лемма 2.2. *Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f. Тогда $\mathfrak{M}$ разложимо в ортогональную сумму неприводимых f-подпространств. Это разложение единственно с точностью до эквивалентности.*

Лемма 2.2 вытекает из леммы 2.1 и теоремы Жордано–Гельдера.

Теорема 2.1. *Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}E(n)$ в том и только том случае, когда f полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 утверждение теоремы справедливо для коммутативных подалгебр. Поэтому будем предполагать, что f — некоммутативная алгебра. Необходимость теоремы вытекает из теоремы 1.2. Докажем достаточность.

Пусть подалгебра f не является полупростой. Так как f — компактная алгебра, то она разложима в прямую сумму $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ своего центра $\mathcal{P}$ и полупростой подалгебры $\mathfrak{Y}$. Поскольку f не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$, то из условия $[f, X] = 0$, $X \in \mathfrak{N}$, вытекает, что $X = 0$. Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная подалгебра $\mathcal{L}E(n)$ с условием $\pi(\mathfrak{K}) = f$. Докажем, что $\mathfrak{K}$ — расщепимая подалгебра. Рассмотрим два случая.

1) Пусть из условия $[\mathfrak{Y}, X] =$, где $X \in \mathfrak{N}$, вытекает, что $X = 0$. Так как $\mathfrak{Y}$ — полупростая алгебра, то можно предполагать, что $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{K}$. Допустим, что $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $J + X$, где $J \in \mathcal{P}$, $X \in \mathfrak{N}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{Y}$-подпространство пространства $\mathfrak{N}$, порожденное X. По лемме 2.2 $\mathfrak{M}$ разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{Y}$-подпространств: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_s$. Докажем индукцией по числу s, что $J \in \mathfrak{K}$.

Пусть $s = 1$. Если $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, то $X = 0$ и наше утверждение справедливо. Предположим, что $[\mathfrak{Y}, X] \neq 0$. Тогда существует такой элемент $J' \in \mathfrak{Y}$, что $[J', X] = X'$, $X' \neq 0$. $\mathfrak{Y}$-подпространство $\mathfrak{M}_1'$, порожденное X', содержится в $\mathfrak{M}_1$, и в силу неприводимости последнего $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_1$. Поскольку $X' \in \mathfrak{K}$, то $\mathfrak{M}_1' \subset \mathfrak{K}$ и потому $X \in \mathfrak{K}$.

Пусть $s > 1$, $X = X_1 + \cdots + X_s$, где $X_i \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{1, s})$. Если $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, то $X = 0$, Поэтому будем предполагать, что $[\mathfrak{Y}, X] \neq 0$. Пусть $J' \in \mathfrak{Y}$ — такой элемент, что $[J', X] = X'$, $X' \neq 0$, и пусть $X' = X_1' + \cdots + X_s'$, где $X_i' \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{1, s})$. Будем считать, что $X_1' \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{Y}$-подпространство $\mathfrak{M}$, порожденное X'. Очевидно, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{K}$. Проекция $\mathfrak{M}'_1$ пространства $\mathfrak{M}'$ на подпространство $\mathfrak{M}_1$ является $\mathfrak{Y}$-подпространством. Отсюда в силу неприводимости $\mathfrak{M}_1$ заключаем, что $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M}'$, а значит, и $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $X_1 + \bar{X}_2 + \cdots + \bar{X}_s$, где $\bar{X}_i \in \mathfrak{M}_i$ $(i = \overline{2, s})$. Но тогда $J + (X_2 - \bar{X}_2) + \cdots + (X_s - \bar{X}_s) \in \mathfrak{K}$. В силу индуктивного предположения отсюда вытекает, что $J \in \mathfrak{K}$.

2) Допустим, что для некоторого ненулевого элемента $X \in \mathfrak{N}$ имеет место равенство $[\mathfrak{Y}, X] = 0$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ максимальное подпространство пространства $\mathfrak{N}$, обладающее тем свойством, что $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{U}] = 0$. Если $\dim \mathfrak{U} = n - k$ $(0 < k < n)$, то можно предполагать, что $\mathfrak{U} = \mathfrak{Q}_{n-k} = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$. Но тогда $\mathfrak{Y} \subset \mathcal{L}O(k) = \langle J_{12}, J_{13}, \dots, J_{k-1,k} \rangle$ и $\mathfrak{Y}$ действует на подпространстве $\mathfrak{Q}_k = \langle P_1, \dots, P_k \rangle$. Если $J_1 \in \mathcal{P}$, $J_2 \in \mathfrak{Y}$, $X \in \mathfrak{Q}_{n-k}$, то $[J_1, J_2] = 0$, $[J_2, X] = 0$. Отсюда и из тождества Якоби $[J_1, [J_2, X]] + [J_2, [X, J_1]] + [X, [J_1, J_2]] = 0$ получаем, что $[J_2, [X, J_1]] = 0$. Следовательно, $[X, J_1] \in \mathfrak{Q}_{n-k}$. Это значит, что $[\mathcal{P}, \mathfrak{Q}_{n-k}] \subset \mathfrak{Q}_{n-k}$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{P}$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{L}O(k) \oplus \mathcal{L}O(n-k)$, где $\mathcal{L}O(n-k) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{k+1, n} \rangle$. Так как для любого $Y \in \mathfrak{Q}_{n-k}$ имеем $[\mathfrak{Y}, Y] = 0$, то из условия $[\mathcal{P}, Y] = 0$ следует, что $Y = 0$.

Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — проекции $\mathcal{P}$ соответственно на $\mathcal{L}O(k)$ и $\mathcal{L}O(n-k)$, $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ — проекции $\mathfrak{K}$ соответственно на $\mathcal{L}E(k)$ и $\mathcal{L}E(n-k)$. Так как проекция f на $\mathcal{L}O(k)$ совпадает с $f_1 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y}$ и из условия $[\mathfrak{Y}, X] = 0$, $X \in \mathfrak{Q}_k$, вытекает, что $X = 0$, то в силу предыдущего случая 1) существует внутренний автоморфизм $\mathcal{L}E(k)$, отображающий $\mathfrak{K}_1$ на $\mathfrak{L}_1 \niplus (\mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y})$. Аналогично убеждаемся, что существует внутренний автоморфизм $\mathcal{L}E(n-k)$, отображающий $\mathfrak{K}_2$ на $\mathfrak{K}_2 \oplus \mathcal{P}_2$. Таким образом, можно предполагать, что $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{L} \niplus (\mathcal{P}_1 \oplus \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_2 \oplus \mathcal{P}_2$. Поскольку $\mathfrak{Y}$ — полупростая алгебра, то $[\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}] = \mathfrak{Y}$ и поэтому $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{K}$. Предположим, что $\mathfrak{K}$ содержит элемент вида $J_2 + X_1$, где $J_2 \in \mathfrak{K}_2$, $X_1 \in \mathfrak{Q}_k$. Мы находимся в условиях случая 1), и, значит, $J_2 \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{K}$ содержит элемент $J_1 + X_2$, где $J_1 \in \mathcal{P}$, $X_2 \in \mathfrak{Q}_{n-k}$. В силу рассуждений, проведенных для случая 1), получаем, что $J_1 \in \mathfrak{K}$. Это доказывает, что $f \subset \mathfrak{K}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ — разложение подалгебры $f \subset \mathcal{L}O(n)$ в прямую сумму центра $\mathcal{P}$ и фактора Леви $\mathfrak{Y}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ максимальное подпространство $\mathfrak{N}$, обладающее тем свойством, что $[f, \mathfrak{U}] = 0$. Если $\dim \mathfrak{U} = n - k$ $(0 \leq k < n)$, то можно предполагать, что $\mathfrak{U} = \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$. Но тогда $f \subset \mathcal{L}O(k)$. Отсюда в силу теоремы 2.1 заключаем, что алгебра $\mathfrak{K} \subset \mathcal{L}E(n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\mathfrak{K}) = f$, допускает разложение $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \niplus (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f, $\mathcal{P}'$ — подалгебра прямой суммы $\mathcal{P} \oplus \langle P_{k+1}, \dots, P_n \rangle$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{K}$ — подалгебра $\mathcal{L}G(n)$, f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, не сопряженная подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$ или являющаяся полупростой. Если $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{V}$, инвариантное относительно f, $X_0 \in \mathfrak{V}$ и $[f, X_0] = 0$. Если$(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \niplus \langle P_0 + \delta J \rangle$, $J \in \mathcal{L}O(n)$, $\delta \in \mathbb{R}$, то $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + \delta J + X_0 \rangle$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}$, $X_0 \in \mathfrak{V}$ и $[f, X_0] = 0$.*

Доказательство. Если $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то алгебра $\mathfrak{K}$ обладает базисом $J_1 + X_1, \ldots, J_s + X_s, P_0 + Y_0, Z_1, \ldots, Z_t$, где $J_1, \ldots, J_s$ — базис алгебры f, $X_1, \ldots, X_s, Y_0, Z_1, \ldots, Z_t \in \mathfrak{V}$. Подалгебра $\mathfrak{L} = \langle J_1 + X_1, \ldots, J_s + X_s, Z_1, \ldots, Z_t \rangle$ является идеалом алгебры $\mathfrak{K}$ и потому $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \niplus \langle P_0 + Y_0 \rangle$. Так как f полупроста или не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$, то в силу теоремы 2.1 существует внутренний автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(n)$, отображающий $\mathfrak{L}$ на алгебру $\mathfrak{M} \niplus f$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{V}$, инвариантное относительно f. Отсюда вытекает, что с точностью до сопряженности относительно группы внутренних автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}G(n)$ имеет место равенство $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + Z_0 \rangle$, $Z_0 \in \mathfrak{V}$. Так как $[J_k, P_0 + Z_0] = [J_k, Z_0]$, то $[J_k, Z_0] \in \mathfrak{M}$. Следовательно, подпространство $\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \oplus \langle Z_0 \rangle$ инвариантно относительно алгебры f. Пусть $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$ — разложение $\mathfrak{M}'$ в ортогональную сумму. Поскольку $[f, \mathfrak{M}'] \subset \mathfrak{M}$, $[f, \mathfrak{M}^{\perp}] \subset \mathfrak{M}^{\perp}$, то $[f, \mathfrak{M}^{\perp}] = 0$. Обозначим образующий элемент подпространства $\mathfrak{M}^{\perp}$ через T_0. Тогда $Z_0 = \alpha T_0 + T_0'$, где $T_0' \in \mathfrak{M}$, α — вещественное число. Следовательно, $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M} \niplus f) \niplus \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $X_0 = \alpha T_0$.

Случай, когда $(\pi + \pi_0)(\mathfrak{K}) = f \niplus \langle P_0 + \delta J \rangle$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{L}\overline{G}(n) = \mathfrak{V} \niplus \mathcal{L}O(n)$. Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ обладает только расщепимыми расширениями в алгебре $\mathcal{L}G(n)$ тогда и только тогда, когда f полупроста или f не сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(n-1)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}\overline{G}(n)$, что $\pi(\widetilde{f}) = f$. Обозначим через $\widetilde{f}_1$ проекцию $\widetilde{f}$ на алгебру $\pi_1(\mathcal{R}(n)) \niplus \mathcal{L}O(n)$. Согласно теореме 2.1 алгебра $\widetilde{f}_1$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}_1 \niplus f$, где $\mathfrak{M}_1$ — подпространство $\pi_1(\mathcal{R}(n))$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{f}$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{V}' \niplus \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{V}'$ — подпространство $\mathfrak{V}$, а $\mathfrak{K}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{N} \niplus f$. Снова применяя теорему 2.1, заключаем, что $\mathfrak{K}$ сопряжена подалгебре $\mathfrak{N}' \niplus f$, где $\mathfrak{N}'$ — подпространство $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\widetilde{f}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M} \niplus f$, где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{V}$. Теорема доказана.

Пусть $f = \mathcal{P} \oplus \mathfrak{Y}$ — произвольная подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(n)$, где $\mathcal{P}$ — коммутативная алгебра, $\mathfrak{Y}$ — полупростая или нулевая алгебра. Обозначим через $\mathfrak{M}$ максимальное подпространство пространства $\mathfrak{V}$, обладающее тем свойством, что $[f, \mathfrak{M}] = 0$. Если $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{V}$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}_{n-k} = \langle G_{k+1}, \ldots, G_n \rangle \oplus \langle P_{k+1}, \ldots, P_n \rangle$ $(0 < k < n)$. В этом случае f сопряжена подалгебре алгебры $\mathcal{L}O(k) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1, k}\, \rangle$.

Отсюда ввиду теоремы 2.2 получаем, что подалгебра $\widetilde{f}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ с условием $\pi(\widetilde{f}) = f$ относится к одному из следующих типов:

1) если $(\pi + \pi_0)(\widetilde{f}) = f \oplus \langle P_0 \rangle$, то $\widetilde{f} = (\mathfrak{V}' \niplus (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})) \niplus \langle P_0 + X_0 \rangle$, где $\mathcal{P}'$ — подалгебра $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{V}_{n-k}$, $X_0 \in \mathfrak{V}_{n-k}$;

2) если $(\pi + \pi_0)(\widetilde{f}) = f \niplus \langle P_0 + \delta J \rangle$, где $J \in \mathcal{L}O(k)$, δ — ненулевое вещественное число, то $\widetilde{f} = (\mathfrak{V}' \niplus (\mathcal{P}' \oplus \mathfrak{Y})) \niplus \langle P_0 + \delta J + X_0 \rangle$, где $X_0 \in \mathfrak{V}_{n-k}$, $\mathcal{P}'$ — подалгебра $\mathcal{P} \oplus \mathfrak{V}_{n-k}$.

§ 3 Класификация разрешимых подалгебр обобщенной алгебры Галилея

В этом параграфе используются обозначения предыдущих параграфов.

Предложение 3.1. *Любая максимальная разрешимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сопряжена с алгеброй $\mathfrak{Y}(n) = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle$ $(m = [n/2])$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathcal{R}(n) = \langle P_0, P_1, \dots, P_n, G_1, \dots, G_n\rangle$ является радикалом $\mathcal{L}G(n)$. Если $\mathfrak{L}$ — разрешимая подалгебра $\mathcal{L}G(n)$, то $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}$ также является разрешимой подалгеброй $\mathcal{L}G(n)$. Так как $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}/\mathcal{R}(n)$ — разрешимая подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, а всякая разрешимая подалгебра $\mathcal{L}O(n)$ сопряжена подалгебре алгебры Картана $\mathfrak{J}(n)$, то $\mathcal{R}(n) + \mathfrak{L}$ сопряжена с подалгеброй алгебры $\mathfrak{Y}(n)$. Алгебра $\mathfrak{Y}(n)$ является разрешимой как расширение абелевой алгебры с помощью абелевой алгебры. Предложение доказано.

Лемма 3.1. *Пусть $X = \overline{X} + \gamma P_0 = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_s X_s + \gamma P_0$, где $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(n)$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ такие ненулевые вещественные числа, что $\alpha_i^2 \neq \alpha_j^2$ при $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,s})$. Если $\mathfrak{M}$ — подпространство $\mathfrak{Y}$, инвариантное относительно X, то $\mathfrak{M} = [X_1, \mathfrak{M}] \oplus \cdots \oplus [X_s, \mathfrak{M}] \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $[X_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$, $\gamma[P_0, [X_j, \mathfrak{M}]] \subset [X_j, \mathfrak{M}]$ $(j = \overline{1,s})$.*

Доказательство. Пусть $Y = \overline{Y} + \delta P_0 = Y_1 + \cdots + Y_{s-1} + \delta P_0$ — элемент $\mathfrak{M}$, где $Y_i = -[X_i, [X_i, Y]]$, $[X_i, Y_{s+1}] = 0$ для $i = \overline{1,s}$. Легко видеть, что $[X, Y] = [\overline{X}, \overline{Y}] + \gamma[P_0, \overline{Y}]$, $[X, [X, Y]] = [\overline{X}, [\overline{X}, \overline{Y}]] + 2\gamma[\overline{X}, [P_0, \overline{Y}]]$. Пусть $2\gamma[\overline{X}, [P_0, Y_j]] = Z_j$ $(j = \overline{1,s})$. Очевидно, $[P_0, Z_j] = 0$, $[X_i, [X_i, Z_i]] = -Z_i$, $[X_i, Z_j] = 0$ при $i \neq j$.

Применим индукцию по s. Пусть $s = 1$. Тогда

$$[X, [X, Y]] = -\alpha_1^2 + Z_1, \qquad [X, [X, -\alpha_1^2 Y_1 + Z_1]] = -\alpha_1^2(-\alpha_1^2 Y_1 + Z_1) - \alpha_1^2 Z_1.$$

Из этих равенств вытекает, что $Z_1 \in \mathfrak{M}$, а потому и $Y_1 \in \mathfrak{M}$.

Пусть s — произвольное натуральное число с условием $s \leq m$. Так как

$$[\overline{X}, [\overline{X}, \overline{Y}]] = -\alpha_1^2 Y_1 - \alpha_2^2 Y_2 - \cdots - \alpha_s^2 Y_s,$$

то

$$\begin{aligned}[X, [X, Y]] + \alpha_1^2 Y = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + \cdots + (\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Y_s + {}\\ + \alpha_1^2(Y_{s+1} + \delta P_0) + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_s.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Если на элемент (3.1) подействовать генератором X, а затем $-X$, то получим элемент

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 Z_1 + \alpha_2^2((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + Z_2) + \cdots + \alpha_s^2((\alpha_2^2 - \alpha_s^2) Y_s + Z_s) - {}\\ -(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Z_2 - \cdots - (\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Z_s.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Прибавив к элементу (3.2) элемент (3.1), умноженный на $(-\alpha_1^2)$, получим элемент

$$\begin{aligned}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)((\alpha_1^2 - \alpha_2^2) Y_2 + Z_2) + \cdots + (\alpha_s^2 - \alpha_1^2)((\alpha_1^2 - \alpha_s^2) Y_s + Z_s) - {}\\ -\alpha_1^4(Y_{s+1} + \delta P_0).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $\mathfrak{M}' = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X_1, Y] = 0\}$. Очевидно, подпространство $\mathfrak{M}'$ инвариантно относительно $\alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_s X_s + \gamma P_0$, поэтому к нему применимо индуктивное предложение. Поскольку элемент (3.3) принадлежит $\mathfrak{M}'$, то $(\alpha_1^2 - \alpha_j^2) Y_j + Z_j \in \mathfrak{M}$, а значит, $Y_j, Z_j \in \mathfrak{M}$ $(j = \overline{2,s})$. Так как $Y_1 + Y_{s+1} + \delta P_0$ — элемент $\mathfrak{M}$ и на этот элемент X действует как $\alpha_1 X_1 + \gamma P_0$, то $Y_1, Z_1 \in \mathfrak{M}$, $Y_{s+1} + \delta P_0 \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle H_1, H_2, \dots, H_a\rangle^\circ$. Подпространства $\mathcal{R}(n)$, инвариантные относительно $\mathfrak{A}$, исчерпываются пространствами $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus$*

$\cdots \oplus \mathfrak{M}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{M}}$, где $\mathfrak{M}_j = [H_j, \mathfrak{M}_j]$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{M}}] = 0$ для $j = \overline{1,a}$. Подпространства $\mathcal{R}(n)$, инвариантные относительное $\mathfrak{A}$ и P_0, исчерпываются пространствами $\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_a \oplus \widetilde{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N}_j = [H_j, \mathfrak{N}_j]$, $[P_0, \mathfrak{N}_j] \subset \mathfrak{N}_j$, $[H_j, \widetilde{\mathfrak{N}}] = 0$, $[P_0, \widetilde{\mathfrak{N}}] \subset \widetilde{\mathfrak{N}}$.

Предложение вытекает непосредственно из леммы 3.1 и лемм 1.3, 1.4.

На основании предложения 3.2 описание расщепимых разрешимых подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сводится к нахождению подпространства пространства

$$\mathfrak{K}(h_1, h_2, \ldots, h_a) = \sum_1^a \oplus \langle P_{2h_i-1}, G_{2h_i-1}, P_{2h_i}, G_{2h_i} \rangle,$$

инвариантных относительно

$$J(h_1, h_2, \ldots, h_a) = J_{2h_1-1,2h_1} + J_{2h_2-1,2h_2} + \cdots + J_{2h_a-1,2h_a},$$
$$J(h_1, h_2, \ldots, h_a) \quad \text{и} \quad P_0,$$

и к классификации относительно $O(n)$-сопряженности подалгебр радикала $\mathcal{R}(n)$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{K}(h_1, \ldots, h_a)$, инвариантное относительно $J(h_1, \ldots, h_a)$. Если $\pi_1(\mathfrak{M}) = 0$, то согласно теореме 1.1 $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств:

$$\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1} \rangle, \ \ldots, \ \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle.$$

Если $\pi_2(\mathfrak{M}) = 0$, то $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств:

$$\langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1} \rangle, \ \ldots, \ \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle.$$

Теперь допустим, что $\pi_1(\mathfrak{M}) \neq 0$, $\pi_2(\mathfrak{M}) \neq 0$. Тогда $\mathfrak{M}$ сопряжено подпространству пространства $\mathfrak{K}(h_1, \ldots, h_{a-1})$, инвариантному относительно $J(h_1, \ldots, h_{a-1})$, или пространству, удовлетворяющему одному из условий:

1) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_{2h_{b+1}-1}, P_{2h_{b+1}}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle$;

2) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_b-1}, P_{2h_b} \rangle$ $(b \leq a)$;

3) $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1}, \ldots, G_{2h_b-1}, G_{2h_b} \rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M})$ — подпрямая сумма пространств $\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_c-1}, P_{2h_c} \rangle$, $\langle P_{2h_{b+1}-1}, P_{2h_{b+1}}, \ldots, P_{2h_a-1}, P_{2h_a} \rangle$ $(c \leq b)$.

В первом случае группа автоморфизмов, относительно которой классифицируются расщепимые алгебры $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$, разлагается в прямое произведение $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ двух ортогональных групп, заданных соответственно на евклидовых пространствах $\pi_1(\mathfrak{M})$ и $\pi_2(\mathfrak{M})$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$ является подалгеброй прямой суммы алгебр $\pi_1(\mathfrak{M}) \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_b)$ и $\pi_2(\mathfrak{M}) \subset\!\!\!+ J(h_{b+1}, \ldots, h_a)$. Такие подалгебры классифицируются относительно $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$-сопряженности при помощи алгоритма Ли–Гурса [17].

Во втором случае при $b < a$ допустимо рассматривать только автоморфизмы, соответствующие группе $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, где $\mathcal{O}_1$ — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\langle P_{2h_1-1}, P_{2h_1}, \ldots, P_{2h_b-1}, P_{2h_b} \rangle$, а $\mathcal{O}_2$ — группа ортогональных преобразований евклидова пространства $\langle G_{2h_{b+1}-1}, G_{2h_{b+1}}, \ldots, G_{2h_a-1}, G_{2h_a} \rangle$. Следовательно, при $b < a$ алгебра $\mathfrak{M} \subset\!\!\!+ J(h_1, \ldots, h_a)$ является подалгеброй прямой суммы алгебр $\mathfrak{M}' \dotplus J(h_1,\ldots,h_b)$ и $\mathfrak{M}'' \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \langle G_{2h_1-1}, G_{2h_1},\ldots,G_{2h_b-1},G_{2h_b}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \langle P_{2h_1-1},P_{2h_1},\ldots,P_{2h_b-1},\ P_{2h_b}\rangle$, а $\mathfrak{M}'' = \langle G_{2h_{b+1}-1},G_{2h_{b+1}},\ldots,G_{2h_a-1},G_{2h_a}\rangle$. И в этом случае применима конструкция Ли–Гурса.

В третьем случае классификация алгебр $\mathfrak{M} \dotplus J(h_1,\ldots,h_a)$ сводится к классификации подалгебр прямой суммы алгебр $\mathfrak{M}' \dotplus J(h_1,\ldots,h_c)$, $\mathfrak{M}'' \dotplus J(h_{c+1},\ldots,h_b)$, $\mathfrak{M}''' \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \langle G_{2h_1-1},G_{2h_1},\ldots,G_{2h_c-1},G_{2h_c}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \langle P_{2h_1-1},P_{2h_1},\ldots,P_{2h_c-1},P_{2h_c}\rangle$, $\pi_1(\mathfrak{M}'') = \langle G_{2h_{c+1}-1},G_{2h_{c+1}},\ldots,G_{2h_b-1},G_{2h_b}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}'') = 0$, $\pi_1(\mathfrak{M}''') = 0$, $\pi_2(\mathfrak{M}''') = \langle P_{2h_{b+1}-1},P_{2h_{b+1}},\ldots,P_{2h_a-1},P_{2h_a}\rangle$.

Если $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{K}(h_1,\ldots,h_a)$, инвариантное относительно $J(h_1,\ldots,h_a)$ и P_0, то $\mathfrak{M}$ сопряжено подпространству пространства $\mathfrak{K}(h_1,\ldots,h_{a-1})$, инвариантному относительно $J(h_1,\ldots,h_{a-1})$, или удовлетворяет одному из условий:

1) $\mathfrak{M} = \sum\limits_1^a \oplus\langle G_{2h_i-1},G_{2h_i},P_{2h_i-1},P_{2h_i}\rangle$;

2) $\mathfrak{M} = \sum\limits_1^b \oplus\langle P_{2h_i-1},P_{2h_i}\rangle \oplus \mathfrak{M}'$, где $\pi_1(\mathfrak{M}') = \sum\limits_1^b \oplus\langle G_{2h_i-1},G_{2h_i}\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}') = \sum\limits_{b+1}^a \oplus\langle P_{2h_i-1},P_{2h_i}\rangle$.

Пространства $\mathfrak{M}'$ классифицируем при помощи метода Ли–Гурса, примененного к прямой сумме алгебр $\pi_1(\mathfrak{M}') \dotplus J(h_1,\ldots,h_b)$, $\pi_2(\mathfrak{M}') \dotplus J(h_{b+1},\ldots,h_a)$.

Подобным образом описываем подпространства пространства $\mathfrak{V} = \sum\oplus\langle G_i,P_i\rangle$ $(i=\overline{1,n})$.

Предложение 3.3. *Пусть $m=[n/2]$, $\delta=0$ при $n=2m$, $\delta=1$ при $n=2m+1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ исчерпываются относительно $G(n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle P_0,P_1,\ldots,P_n\rangle$; $\langle G_1+\alpha P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1,\ldots,G_n,P_1,\ldots,P_n\rangle$; $\langle P_0,\delta P_n,J_{12},J_{34},\ldots,J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle G_n,P_n,J_{12},J_{34},\ldots,J_{2m-1,2m}\rangle$ $(n=2m+1)$;
$\langle J_{12},J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a},P_0,P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$;
$\langle J_{12},J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a},P_{2a+1},\ldots,P_n,G_{2a+1},\ldots,G_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$;
$\langle J_{12},J_{34},\ldots,J_{2a-1,2a},G_{2a+1}+\alpha P_0,P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$ $(\alpha>0,\ a=\overline{1,m-1})$.

Доказательство. Каждая абелева подалгебра $\widetilde{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ сопряжена с подалгеброй алгебры $\mathfrak{Y}(n)$, являющейся максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $\mathcal{L}G(n)$. Если $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) \neq 0$, то в силу $[G_a,P_0]=P_a$ заключаем, что $P_0\in\widetilde{\mathfrak{A}}$ и $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}})=0$ или $(\pi_0+\pi_1)(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \langle G_{2s+1}+\alpha P_0\rangle$. При $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}})=0$ получаем, что $\widetilde{\mathfrak{A}} = \langle P_0,P_1,\ldots,P_n\rangle$ или $\widetilde{\mathfrak{A}} = \langle G_1+\alpha P_0,P_1,\ldots,P_n\rangle$. Пусть $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}})\neq 0$. Если $\mathfrak{M} = \widetilde{\mathfrak{A}}\cap\mathcal{R}(n)$, то $[\widetilde{\mathfrak{A}},\mathfrak{M}]=0$. Отсюда на основании теорем 1.1, 1.2 вытекает, что проекция $\widetilde{\mathfrak{A}}$ на $\langle J_{2d-1,2d},P_{2d-1},P_{2d},G_{2d-1},G_{2d}\rangle$ совпадает с $\langle J_{2d-1,2d}\rangle$ или с подалгеброй алгебры $\langle P_{2d-1},P_{2d},G_{2d-1},G_{2d}\rangle$. Значит, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с одной из алгебр:

$\langle P_0,J_{12},\ldots,J_{2a-1,2a},P_{2a+1},\ldots,P_n\rangle$;
$\langle J_{12},\ldots,J_{2a-1,2a},G_{2a+1}+\alpha P_0,P_{2a+1},P_{2a+2},\ldots,P_n\rangle$ $(a=\overline{1,m-1})$.

Аналогично исследуем случай, когда $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}})=0$. Предложение доказано.

Предложение 3.4. *Пусть $m=[n/2]$, $\delta=0$ при $n=2m$, $\delta=1$ при $n=2m+$*

1. *Максимальные нильпотентные подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(n)$ исчерпываются относительно $G(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n\rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, \delta G_n, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle P_0, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n, G_{2a+1}, \ldots, G_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Доказательство. Так как $\mathcal{L}E(n)$ не является нильпотентной алгеброй, то в силу теорем 1.1, 1.2 для любой нильпотентной подалгебры $\widetilde{\mathfrak{A}}$ алгебры $\mathcal{L}G(n)$ ее проекция на $\langle J_{2d-1,2d}, P_{2d-1}, P_{2d}, G_{2d-1}, G_{2d}\rangle$ является коммутативной алгеброй.

Предложение 3.5. *Максимальные нильпотентные подалгебры расширенной алгебры Галилея $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, G_1, \ldots, G_n, M\rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, \delta G_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n, G_{2a+1}, \ldots, G_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Так как M порождает центр $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ и $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)/\langle M\rangle \cong \mathcal{L}G(n)$, то справедливость предложения 3.5 непосредственно вытекает из предложения 3.4.

Предложение 3.6. *Пусть $m = [n/2]$, $\delta = 0$ при $n = 2m$, $\delta = 1$ при $n = 2m+1$. Максимальные абелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(n)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n, M\rangle$; $\langle G_1, \ldots, G_n, M\rangle$;
$\langle G_1, \ldots, G_a, P_{a+1}, \ldots, P_n, M\rangle$;
$\langle P_0, \delta P_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$;
$\langle G_n, M, J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2m-1,2m}\rangle$ $(n = 2m+1)$;
$\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1}, \ldots, G_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_b, G_{b+1}, \ldots, G_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1},\ b < n)$;
$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, \ldots, P_n, M\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+2}, \ldots, P_n\rangle$ $(\alpha > 0,\ a = \overline{1, m-1})$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2m-1,2m}, G_n + \alpha P_0\rangle$ $(\alpha > 0,\ n = 2m+1)$;
$\langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1, n}\ \rangle \oplus \langle M\rangle$, где $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$;
$\langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1, r}\ \rangle \oplus \langle P_{r+1}, \ldots, P_n, M\rangle$, где $r = \overline{1, m-1}$, $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{r,r+1} = 0$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}\rangle \oplus \langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{2a+1, r}\ \rangle \oplus \langle P_{r+1}, \ldots, P_n\rangle$, где $a = \overline{1, m-1}$, $r \leq n-1$, $\alpha_{2a,2a+1} = 0$, $\alpha_{2a+1,2a+1} = 0$, $\alpha_{r,r+1} = 0$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}\rangle \oplus \langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{2a+1, n}\ \rangle$, где $a = \overline{1, m-1}$, $\alpha_{2a,2a+1} = 0$, $\alpha_{2a+1,2a+1} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — максимальная абелева подалгебра $\mathcal{L}\widetilde{G}(n)$. Если $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) \neq 0$, то можно допускать, что $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ или $(\pi_0+\pi_1)(\widetilde{\mathfrak{A}}) = \langle G_{2s+1}+\alpha P_0\rangle$. В первом случае $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с $\langle P_0, P_1, \ldots, M\rangle$ или с $\langle P_0, M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, P_{2a+1}, \ldots, P_n\rangle$ $(a = \overline{1, m})$. Во втором случае $\widetilde{\mathfrak{A}}$ сопряжена с одной из таких алгебр:

$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, \ldots, P_n, M\rangle$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2m-1,2m}, G_n + \alpha P_0\rangle$ $(n = 2m+1)$;
$\langle M, J_{12}, \ldots, J_{2a-1,2a}, G_{2a+1} + \alpha P_0, P_{2a+2}, \ldots, P_n\rangle$ $(a = \overline{1, m-1})$.

Пусть $\pi_0(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$. Если $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$, то $\widetilde{\mathfrak{A}}$ совпадает с одной из алгебр:

$\langle G_1, \dots, G_n, M\rangle$;

$\langle G_i + \alpha_{i-1,i}P_{i-1} + \alpha_{ii}P_i + \alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1,n}\ \rangle \oplus \langle M\rangle$, где $\alpha_{01} = 0$, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{n,n+1} = 0$;

$\langle G_i+\alpha_{i-1,i}P_{i-1}+\alpha_{ii}P_i+\alpha_{i,i+1}P_{i+1} \mid i = \overline{1,r}\ \rangle\oplus\langle P_{r+1}, \dots, P_n, M\rangle$, где $r = \overline{1, n-1}$, $\alpha_{01} = \alpha_{11} = \alpha_{r,r+1} = 0$.

Допустим, что $\pi(\widetilde{\mathfrak{A}}) \neq 0$. Если $\pi_1(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$ или $\pi_2(\widetilde{\mathfrak{A}}) = 0$, то применимо предложение 1.3. Остальные случаи сводятся к предыдущему. Предложение доказано.

В качестве иллюстрации предложения 3.6 выпишем в явном виде максимальные абелевы подалгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(4)$:

$\langle P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, G_4, M\rangle$; $\langle G_1, P_2, P_3, P_4, M\rangle$;

$\langle G_1, G_2, P_3, P_4, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, P_4, M\rangle$; $\langle P_0, M, J_{12}, J_{34}\rangle$;

$\langle P_0, M, J_{12}, P_3, P_4\rangle$; $\langle M, J_{12}, G_3, G_4\rangle$; $\langle M, J_{12}, G_3, P_4\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha P_0, P_2, P_3, P_4, M\rangle$ $(\alpha > 0)$; $\langle M, J_{12}, G_3 + \alpha P_0, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$;

$\langle G_1+\alpha_{12}P_2, G_2+\alpha_{12}P_1+\alpha_{22}P_2+\alpha_{23}P_3, G_3+\alpha_{23}P_2+\alpha_{33}P_3+\alpha_{34}P_4, G_4+\alpha_{34}P_3+\alpha_{44}P_4, M\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha_{12}P_2, G_2 + \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2, P_3, P_4, M\rangle$;

$\langle G_1 + \alpha_{12}P_2, G_2 + \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 + \alpha_{23}P_3, G_3 + \alpha_{23}P_2 + \alpha_{33}P_3, P_4, M\rangle$, где по крайней мере один из коэффициентов не равен нулю;

$\langle M, J_{12}, G_3 + \alpha P_4, G_4 + \alpha P_3 + \beta P_4\rangle$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

§ 4. Подалгебры алгебр $\mathcal{L}E(5)$ и $\mathcal{L}E(6)$

Сделаем несколько замечаний относительно подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(m)$. Все такие подалгебры мы разбиваем на два класса: приводимые подалгебры и неприводимые подалгебры. Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(m)$ называется приводимой, если в пространстве $\overline{\mathfrak{N}} = \langle P_1, \dots, P_m\rangle$ существует собственное подпространство, инвариантное относительно f. Все подалгебры прямой суммы алгебр $\langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,k}\ \rangle$, $\langle J_{ab} \mid a, b = \overline{k+1, m}\ \rangle$ $(2 \leq k \leq m-2)$ и только они являются приводимыми подалгебрами алгебры $\mathcal{L}O(m)$. Эти подалгебры можно классифицировать относительно $O(m)$-сопряженности с помощью алгоритма Ли–Гурса [17] . Подалгебра $f \subset \mathcal{L}O(m)$ называется неприводимой, если $\overline{\mathfrak{N}}$ не обладает нетривиальным f-инвариантным подпространством. Более подробно о приводимых и неприводимых подалгебрах см. в работе [18] .

Пусть f — подалгебра $\mathcal{L}O(n)$, $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_s$, $\mathfrak{N}_1 = \langle P_1, \dots, P_{n_1}\rangle$, $\mathfrak{N}_2 = \langle P_{n_1+1}, \dots, P_{n_2}\rangle$, …, $\mathfrak{N}_s = \langle P_{n_{s-1}+1}, \dots, P_{n_s}\rangle$. Если каждое подпространство $\mathfrak{N}_i$ f-инвариантно и f-неприводимо, то f можно представить в виде подпрямой суммы $f = \sum_c \oplus f_i$ $(i = \overline{1,s})$, где каждая подалгебра f_i действует неприводимо на $\mathfrak{N}_i$ и $[f_i, \mathfrak{N}_j] = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,s})$. В этом случае мы будем говорить, что f разложима в подпрямую сумму неприводимых подалгебр $f_1, \dots, f_s$. Очевидно, любая алгебра $f \subset \mathcal{L}O(n)$ сопряжена алгебре $f' \subset \mathcal{L}O(n)$, которая разлагается в подпрямую сумму неприводимых подалгебр.

Теорема 4.1. *Пусть $f = \sum_c \oplus f_i$ $(i = \overline{1,s})$. Подпространство пространства $\mathfrak{N} = \langle P_1, \dots, P_n\rangle$, инвариантные относительно f, исчерпываются относительно $E(n)$-сопряженности пространствами $\mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_s \oplus \mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}_i = 0$ или $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i$ $(i = \overline{1,s})$, а $\mathfrak{M}'$ — такое пространство $\mathfrak{N}$, что $[f, \mathfrak{M}'] = 0$.*

Лемма 4.1. *Относительно $O(5)$-сопряженности алгебра $\mathcal{L}O(5)$ обладает только одной неприводимой подалгеброй*

$$f = \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35}\rangle.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(5)$. Поскольку 5 — простое число, то естественное представление алгебры $\mathfrak{L}$ кососимметрическими матрицами порядка 5 над $\mathbb{R}$ является абсолютно неприводимым. Так как $\dim \mathfrak{L} < 10$, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{L}$ — простая абсолютно неприводимая линейная алгебра Ли степени 5 над $\mathbb{R}$. Следовательно, $C \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}$ — простая алгебра Ли степени 5, размерность которой меньше 10 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Поэтому эта алгебра относится к типу A_1, и, значит, $\mathfrak{L} \cong \mathcal{L}O(3)$ или $\mathfrak{L} \cong \mathcal{L}O(1,2)$. Но ввиду компактности $\mathcal{L}O(5)$ последний случай невозможен. В силу теоремы Картана о связи между неприводимыми представлениями $\mathcal{L}O(3)$ над полями $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и того факта, что $\mathcal{L}O(3)$ обладает над $\mathbb{C}$ только одним неприводимым унитарным представлением степени 5, получаем, что относительно $O(5)$-сопряженности в $\mathcal{L}O(5)$ существует только одна неприводимая подалгебра.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что алгебра f изоморфна $\mathcal{L}O(3)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ненулевое подпространство $\mathfrak{N}$, инвариантное относительно f. На основании леммы 1.2, примененной к генератору $2J_{12} + J_{34}$, получаем, что $\mathfrak{M} = s\langle P_1, P_2\rangle \oplus t\langle P_3, P_4\rangle \oplus r\langle P_5\rangle$, где $s, t, r \in \{0, 1\}$. Легко убедиться, что при любом предположении относительно s, t, r мы получаем равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Значит, f — неприводимая подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(5)$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Относительно $O(5)$-сопряженности подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ исчерпываются такими алгебрами:*

$f_1 = \langle O\rangle$;
$f_2 = \langle J_{12}\rangle$;
$f_3 = \langle J_{12} + \alpha J_{34}\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;
$f_4 = \langle J_{12} + J_{34}\rangle$;
$f_5 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$;
$f_6 = \mathcal{L}O(3) = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$;
$f_7 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$;
$f_8 = \langle 2J_{12} + J_{34}, J_{13} + J_{24} - \sqrt{3}J_{45}, J_{23} - J_{14} + \sqrt{3}J_{35}\rangle$;
$f_9 = f_7 \oplus \langle J_{12} - J_{34}\rangle = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34}\rangle$;
$f_{10} = f_6 \oplus \langle J_{45}\rangle = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$;
$f_{11} = \mathcal{L}O(4) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,4}\ \rangle$;
$f_{12} = \mathcal{L}O(5) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,5}\ \rangle$.

Доказательство. Неприводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ описаны в лемме 4.1. Приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(5)$ исчерпываются алгеброй $\mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}\rangle$ и подалгебрами $\mathcal{L}O(4)$ Последние описаны в работе [19]. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Расщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(5)$ исчерпываются относительно $E(5)$-сопряженности такими алгебрами:*

f_1: O, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_2: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_3: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_4: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_5: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_6: O, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_7: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;

f_8: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_9: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{10}: O, $\langle P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{11}: O, $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$;
f_{12}: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$.

Теорема 4.3 вытекает из теоремы 4.2 и теоремы 1.1.

Теорема 4.4. *Нерасщепимые подалгебры $\mathcal{L}E(5)$ исчерпываются относительно $E(5)$-сопряженности такими алгебрам:*
$\langle J_{12} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12} + \alpha J_{34} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(0 < \alpha < 1$, $a > 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34} + aP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12} + aP_5, J_{34} + bP_5\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12} - J_{34} + aP_5, J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0)$.

Теорема 4.4 непосредственно следует из теоремы 1.2 и теоремы 4.3.

Лемма 4.2. *Двумерные подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(6)$ исчерпываются относительно $O(6)$-сопряженности алгебрами $\langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, где $0 \le \beta \le \alpha \le 1$.*

Доказательство. Каждая двумерная алгебра $\mathfrak{L}$ является разрешимой. Поскольку $\mathcal{L}O(6)$ — компактная алгебра, то в случае $\mathfrak{L} \subset \mathcal{L}O(6)$ можно предполагать, что $\mathfrak{L}$ — абелева алгебра, а потому $\mathfrak{L}$ порождается элементами $J_{12} + \rho J_{56}$, $J_{34} + \sigma J_{56}$, где $|\rho| \ge |\sigma|$.

Допустим, что $|\rho| > 1$. Обозначим через φ $O(6)$-автоморфизм алгебры $\mathcal{L}O(6)$, при котором $J_{12} \to J_{56}$, $J_{56} \to J_{12}$, $J_{34} \to J_{34}$. Тогда $\varphi(\mathfrak{L}) = \langle J_{12} + \rho^{-1}J_{56}, J_{34} - \sigma\rho^{-1}J_{56}\rangle$. Вследствие этого можно предполагать, что $|\sigma| \le |\rho| \le 1$.

Если $\rho < 0$, то переходим к алгебре $C\mathfrak{L}C^{-1}$, где $C = \operatorname{diag}\{-1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Если $\sigma < 0$, то используем автоморфизм, соответствующий матрице $C = \operatorname{diag}\{1, 1, -1, 1, 1, 1\}$. Следовательно, всегда можно допускать, что $\mathfrak{L} = \langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, где $0 \le \beta \le \alpha \le 1$.

Пусть $\mathfrak{L}' = \langle J_{12} + \alpha' J_{56}, J_{34} + \beta' J_{56}\rangle$ и пусть $\varphi(\mathfrak{L}) = C\mathfrak{L}C^{-1} = \mathfrak{L}'$ для некоторой матрицы $C \in O(6)$. Тогда

$$\varphi(J_{12} + \alpha J_{56}) = \gamma(J_{12} + \alpha' J_{56}) + \delta(J_{34} + \beta' J_{56}),$$
$$\varphi(J_{12} + \beta J_{56}) = \lambda(J_{12} + \alpha' J_{56}) + \mu(J_{34} + \beta' J_{56}).$$

Будем предполагать, что $0 \le \beta' \le \alpha' \le \alpha \le 1$.

Если $\gamma = 0$, то в силу леммы 1.1 имеем $\delta = \pm 1$, $\alpha = \beta'$, а значит, $\alpha = \alpha' = \beta'$. Пусть $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$. Если $\alpha \ne 0$, то $\lambda + \mu = 0$. Отсюда по лемме 1.1 заключаем, что $\beta = 1$. Мы получили, что $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 1$.

Предположим, что $\gamma \ne 0$, $\delta = 0$. В этом случае $\gamma = \pm 1$, $\alpha = \alpha'$. Если $\lambda \ne 0$, $\mu = 0$, то $\mathfrak{L}' = \langle J_{12} + \alpha J_{56}\rangle$. Противоречие. Если $\lambda = 0$, $\mu \ne 0$, то $\beta = \beta'$. Теперь допустим, что $\lambda \ne 0$, $\mu \ne 0$. Тогда необходимо $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$.

Отображение φ можно рассматривать как автоморфизм алгебры $\mathcal{L}E(6)$. Из условия сохранения коммутационных соотношений находим, что

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко получить, что $C(J_{12}+\alpha J_{56})C^{-1} = \pm\alpha J_{12}+J_{56}$, откуда вытекает, что $\alpha = 1$, а значит, $\lambda = -\mu\beta'$. По лемме 1.1 $\beta = \beta'$.

Остается рассмотреть случай, когда $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$. Очевидно, $\gamma\alpha' + \delta\beta' = 0$. Если $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $\lambda\alpha' + \mu\beta' = 0$. Из условия сохранения коммутационных соотношений легко получить, что $\varphi(P_1) = \varphi(P_2) = 0$. Противоречие. Следовательно, $\lambda = 0$ или $\mu = 0$.

Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$C(J_{12}+\alpha J_{56})C^{-1} = \pm\alpha J_{34} \pm J_{56} = \gamma J_{12} + \delta J_{34}$. Противоречие.

Если $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, то

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & A_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$C(J_{34}+\beta J_{56})C^{-1} = \pm\beta J_{34} \pm J_{56} = \pm(J_{34}+\beta' J_{56})$. Отсюда следует, что $\beta = \beta' = 1$. Значит, $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 1$. Лемма доказана.

Теорема 4.5. *Расщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(6)$ исчерпываются относительно $E(6)$-сопряженности расщепимыми подалгебрами алгебры $\mathcal{L}E(5)$ и такими подалгебрами:*

$f_1 = \langle O\rangle$: $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_2 = \langle J_{12}\rangle$: $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_3 = \langle J_{12}+\alpha J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_4 = \langle J_{12} + J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_5 = \langle J_{12}, J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_6 = \langle J_{12}, J_{13}J_{23}\rangle$: $\langle P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_7 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_8 = \langle 2J_{12}+J_{34}, J_{13}+J_{24}-\sqrt{3}J_{45}, J_{23}-J_{14}+\sqrt{3}J_{35}\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_9 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34}\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{10} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45}\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{11} = \mathcal{L}O(4) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,4}\,\rangle$: $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{12} = \mathcal{L}O(5) = \langle J_{ab} \mid a, b = \overline{1,5}\,\rangle$: $\langle P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{13} = \langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \beta < \alpha < 1)$;

$f_{14} = \langle J_{12} + \alpha(J_{34} + J_{56})\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_{15} = \langle J_{12} + J_{34} + \beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \beta < 1)$;

$f_{16} = \langle J_{12} + J_{34} + J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;

$f_{17} = \langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 \leq \beta < \alpha \leq 1)$;

$f_{18} = \langle J_{12}+\alpha J_{56}, J_{34}+\alpha J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(0 < \alpha < 1)$;

$f_{19} = \langle J_{12} + J_{56}, J_{34} + J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{20} = \langle J_{12}, J_{34}, J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{21} = f_7 \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{22} = f_7 \oplus \langle J_{12} - J_{34}\rangle \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{23} = f_7 \oplus \langle J_{12} - J_{34} + aJ_{56}\rangle$: O, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$ $(a > 0)$;
$f_{24} = \mathcal{L}O(4) \oplus \langle J_{56}\rangle$: O, $\langle P_5, P_6\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{25} = \mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$: O,$\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
$f_{26} = \langle J_{12} + J_{45}, J_{13} + J_{46}, J_{23} + J_{56}\rangle$: O, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$;
f_{27}: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, где f_{27} — неприводимая подалгебра $\mathcal{L}O(6)$.

Доказательство. Приводимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(6)$ являются подалгебрами алгебр $\mathcal{L}O(5)$, $\mathcal{L}O(4) \oplus \langle J_{56}\rangle$, $\mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$. Подалгебры прямой суммы находим, используя алгоритм Ли–Гурса. Если подалгебра алгебры $\mathcal{L}O(6)$ является абелевой, то она сопряжена подалгебре алгебры Картана $\langle J_{12}, J_{34}, J_{56}\rangle$. На основании лемм 1.1, 4.2 абелевы подалгебры исчерпываются абелевыми подалгебрами $\mathcal{L}O(5)$ и такими алгебрами:

$\langle J_{12} + \alpha J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, $1 \geq \alpha \geq \beta > 0$;
$\langle J_{12} + \alpha J_{56}, J_{34} + \beta J_{56}\rangle$, $1 \geq \alpha \geq \beta \geq 0$, $\alpha \neq 0$;
$\langle J_{12}, J_{34}, J_{56}\rangle$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — такая подалгебра $\mathcal{L}O(4) \oplus \langle J_{56}\rangle$, что ее проекция $\mathfrak{A}_1$ на $\mathcal{L}O(4)$ является неабелевой алгеброй. Если $\mathfrak{A}_1 = \mathcal{L}O(3)$, то вследствие того, что $\mathcal{L}O(3)$ — простая алгебра, заключаем, что $\mathfrak{A} = \mathcal{L}O(3)\oplus\langle J_{56}\rangle$, а значит, $\mathfrak{A}$ сопряжена $\mathcal{L}O(3)\oplus \langle J_{45}\rangle$. Если $\mathfrak{A}_1 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle \oplus \delta\langle J_{12} - J_{34}\rangle$, где $\delta \in \{0, 1\}$, то $\mathfrak{A}$ совпадает с одной из алгебр:

$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle \oplus \langle J_{12} - J_{34} + aJ_{56}\rangle$ $(\delta = 1,\ a > 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle \oplus \langle J_{12} - J_{34}, J_{56}\rangle$ $(\delta = 1)$;
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}\rangle \oplus \langle J_{56}\rangle$, $(\delta = 0)$.

Неабелевы подалгебры алгебры $\mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$, несопряженные подалгебрам алгебры $\mathcal{L}O(5)$, исчерпываются алгебрами:

$\mathcal{L}O(3) \oplus \langle J_{45}, J_{46}, J_{56}\rangle$; $\langle J_{12} + J_{45}, J_{13} + J_{46}, J_{23} + J_{56}\rangle$.

Используя теорему 1.1 и лемму 1.2, находим подпространства пространства $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\rangle$, инвариантные относительно подалгебр алгебры $\mathcal{L}O(6)$. Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Нерасщепимые подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(6)$ исчерпываются относительно $E(6)$-сопряженности нерасщепимыми подалгебрами $\mathcal{L}E(5)$ и следующими подалгебрами:*

$\langle J_{12} + aP_6\rangle$: $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12} + \alpha J_{34} + aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(0 < \alpha < 1$, $a > 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34} + aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12} + aP_6, J_{34} + bP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_5\rangle$, $\langle P_3, P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(a \geq b \geq 0)$;
$\langle J_{12} + aP_5, J_{34} + bP_5 + cP_6\rangle$: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_3, P_4\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ $(a > 0$, $c > 0$, $b \geq 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23}, J_{12} - J_{34} + aP_6\rangle$: $\langle P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(a > 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{45} + aP_6\rangle$: O, $\langle P_4, P_5\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$ $(a > 0)$.

Теорема 4.6 вытекает из теоремы 1.2.

Замечание 4.1. Подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(3)$ описаны в [15], подалгебры алгебры $\mathcal{L}E(4)$ — в [19].

§ 5. Подалгебры алгебры Галилея $\mathcal{L}G(3)$

Через f_C будем обозначать автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(2)$, индуцируемой внутренним автоморфизмом $A \to CAC^{-1}$ группы $O(2)$ $(A, C \in O(2))$.

Лемма 5.1. *Пусть $\Lambda = \{\exp tG_a \mid t \in \mathbb{R}\}$. Подалгебры алгебры $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$ исчерпываются относительно Λ-сопряженности алгебрами:*

O, $\langle P_0\rangle$, $\langle P_a\rangle$, $\langle G_a\rangle$, $\langle G_a + \gamma P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0\rangle$, $\langle P_0, P_a\rangle$, $\langle G_a, P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0, P_a\rangle$, $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — ненулевая подалгебра алгебры $\langle P_0, P_a, G_a\rangle$. Если $\pi_0(\mathfrak{L}) \neq 0$, то $\mathfrak{L}$ содержит P_0 или $G_a + \alpha P_0$, где $\alpha > 0$. В этом случае двумерные подалгебры исчерпываются такими подалгебрами: $\langle P_0, P_a\rangle$, $\langle G_a + \alpha P_0, P_a\rangle$. Если $\pi_0(\mathfrak{L}) = 0$, то $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр: O, $\langle P_a\rangle$, $\langle G_a\rangle$, $\langle G_a + \gamma P_a\rangle$, $\langle G_a, P_a\rangle$ $(\gamma \neq 0)$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Трехмерные подалгебры алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ исчерпываются относительно $G(2)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2, P_1\rangle$ $(\alpha \geq 0)$; $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1 + \gamma_3 P_2\rangle$. Применяя автоморфизм $\exp tJ_{12}$, отображаем $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}' = \langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1\rangle$. Автоморфизм $\exp tP_0$ обращает γ_2 в 0. Остается установить, что алгебры $\langle G_1 + \gamma P_2, G_2, P_1\rangle$, $\langle G_1 + \delta P_2, P_1\rangle$ $O(2)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $|\gamma| = |\delta|$. Допустим, что для автоморфизма f_C алгебры $\mathcal{L}G(2)$, соответствующего матрице $C \in O(2)$, справедливо равенство $f_C\langle G_1 + \gamma P_2, G_2, P_1\rangle = \langle G_1 + \delta P_2, G_2, P_1\rangle$. Тогда $f_C(G_2) = G_2$, $f_C(P_1) = P_1$. Отсюда вытекает, что $C = \operatorname{diag}\{\pm 1, \pm 1\}$. Значит, $|\gamma| = |\delta|$.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle G_1 + \gamma_1 P_1, G_2 + \gamma_2 P_1, P_2\rangle$. За счет автоморфизма $\exp tP_0$, можно предполагать, что $\gamma_1 = 0$. Применяя автоморфизм $\exp \frac{\pi}{2} J_{12}$, отображаем $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{M}$.

Очевидно, алгебра $\langle G_1 + \gamma G_2, P_1, P_2\rangle$ сопряжена с алгеброй $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Трехмерные подалгебры алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ исчерпываются относительно $O(2)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle G_1 + \gamma_1 P_2, G_2 + \gamma_2 P_2, P_1\rangle$, $\langle G_2, P_1, P_2\rangle$ $(\gamma_1 \geq 0)$.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, G_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2\rangle$, $\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_1 + \overline{\alpha}_1 P_1 + \overline{\alpha}_2 P_2, G_2 + \overline{\beta}_1 P_1 + \overline{\beta}_2 P_2\rangle$, где $\alpha_2 > 0$, $\overline{\alpha}_2 > 0$. Алгебры $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ $O(2)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = \pm\beta_1$, $\overline{\beta}_1 = \pm\alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$ или имеет решение одна из таких систем уравнений:*

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha_2 + \overline{\beta}_1)x = \beta_2 - \overline{\beta}_2, \\ (\alpha_1 - \overline{\beta}_2)x = \beta_1 - \overline{\beta}_1, \\ (\overline{\alpha}_1 - \beta_2)x = \alpha_2 - \overline{\alpha}_2, \\ (\beta_1 + \overline{\alpha}_2)x = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1, \end{array}\right. \qquad (5.1) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_2 - \overline{\beta}_1)x = \beta_2 - \overline{\beta}_2, \\ (\alpha_1 - \overline{\beta}_2)x = \beta_1 + \overline{\beta}_1, \\ (\overline{\alpha}_1 - \beta_2)x = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2, \\ (\beta_1 - \overline{\alpha}_2)x = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1. \end{array}\right. \qquad (5.2)$$

Доказательство. Если алгебры $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ сопряжены относительно $O(2)$, то $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$, где C — одна из матриц:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_1 &= \frac{\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_1 + \lambda^2\beta_2}{1+\lambda^2}, & \overline{\alpha}_2 &= \frac{-\lambda\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda^2\beta_1 + \lambda\beta_2}{1+\lambda^2}, \\ \overline{\beta}_1 &= \frac{\beta_1 + \lambda\beta_2 - \lambda\alpha_1 - \lambda^2\alpha_2}{1+\lambda^2}, & \overline{\beta}_2 &= \frac{-\lambda\beta_1 + \beta_2 + \lambda^2\alpha_1 - \lambda\alpha_2}{1+\lambda^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из равенств (5.3) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\lambda\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = \alpha_2 + \lambda\beta_2, \\ &\overline{\alpha}_1 - \lambda\overline{\alpha}_2 = \alpha_1 + \lambda\beta_1, \\ &\lambda\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 = \beta_2 - \lambda\alpha_2, \\ &\overline{\beta}_1 - \lambda\overline{\beta}_2 = \beta_1 - \lambda\alpha_1. \end{aligned}$$

Следовательно, λ является решением системы (5.1).

Если $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ для

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = -\beta_1$, $\overline{\beta}_1 = -\alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$.

Если $f_C(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ для

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} &\lambda(\alpha_2 - \overline{\beta}_1) = \beta_2 - \overline{\beta}_2, \\ &\lambda(\alpha_1 - \overline{\beta}_2) = \beta_1 + \overline{\beta}_1, \\ &\lambda(\overline{\alpha}_1 - \beta_2) = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2, \\ &\lambda(\beta_1 - \overline{\alpha}_2) = \overline{\alpha}_1 - \alpha_1. \end{aligned}$$

Значит, λ — решение системы (5.2).

При

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

получаем, что $\overline{\alpha}_1 = \beta_2$, $\overline{\alpha}_2 = \beta_1$, $\overline{\beta}_1 = \alpha_2$, $\overline{\beta}_2 = \alpha_1$. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если $\mathfrak{M}$ — двумерная подалгебра алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ и $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_1, P_2\rangle$, то $\mathfrak{M}$ $O(2)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha,\beta) = \langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \beta P_2\rangle$, где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Алгебры $\mathfrak{M}(\alpha,\beta)$ и $\mathfrak{M}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ сопряжены относительно $G(2)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \langle G_1 + \alpha_2 P_2, G_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2\rangle$, $\overline{\mathfrak{M}} = \langle G_1 + \overline{\alpha}_2 P_2, G_2 + \overline{\beta}_1 P_1 + \overline{\beta}_2 P_2\rangle$. Будем предполагать, что $\alpha_2 \geq |\beta_1|$, $\alpha_2 > 0$. Пусть

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенств (5.3) вытекает, что $(\exp tP_0 \cdot f_C)(\mathfrak{M}) = \overline{\mathfrak{M}}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}_2 - \overline{\beta}_1 = \alpha_2 - \beta_1, \\
&\overline{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2 - \lambda^2\beta_1 + \lambda\beta_2}{1+\lambda^2}, \\
&\overline{\beta}_2 = \frac{-2\lambda\alpha_2 - 2\lambda\beta_1 + \beta_2 - \lambda^2\beta_2}{1+\lambda^2}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Пусть

$$\overline{\alpha}_2 = -\overline{\beta}_1 = \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2}.$$

Отсюда и из второго равенства системы (5.4) находим, что $(\alpha_2 + \beta_1)\lambda^2 - 2\beta_2\lambda + (-\alpha_2 - \beta_1) = 0$. Так как это уравнение всегда имеет вещественное решение, то $\mathfrak{M}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha,\beta) = \langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \beta P_2\rangle$, где $\alpha > 0$.

Если

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то $f_{C_1}(\mathfrak{M}) = \langle -G_2 + \alpha P_1, G_1 + \alpha P_2 + \beta P_1\rangle$. Автоморфизм $\exp \beta P_0$ отображает $f_{C_1}(\mathfrak{M})$ на алгебру $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 - \beta P_2\rangle$. Поэтому можно считать, что $\beta \geq 0$.

Допустим, что для некоторого $G(2)$-автоморфизма φ алгебры $\mathcal{L}G(2)$ имеет место равенство $\varphi(\mathfrak{M}(\alpha,\beta)) = \mathfrak{M}(\overline{\alpha},\overline{\beta})$. Если $\varphi = f_C \cdot \exp tP_0$, то в силу равенств (5.4) получаем, что $\overline{\alpha} = \alpha$, $\lambda\beta = 0$, $\overline{\beta}(1+\lambda^2) = \beta(1-\lambda^2)$. Если $\beta = 0$, то $\overline{\beta} = 0$. Если $\lambda = 0$, то $\overline{\beta} = \beta$. Пусть $\varphi = f_{C_2} \cdot f_C \cdot \exp tP_0$, где $C_2 = \operatorname{diag}\{1,-1\}$. Тогда $\overline{\alpha} = -\alpha$, откуда вытекает, что $\overline{\alpha} = \alpha = 0$. Противоречие.

Так как в процессе рассуждений мы не использовали условие $\beta \geq 0$, то случаи автоморфизмов $\varphi = f_{C_1} \cdot f_C \cdot \exp tP_0$, $\varphi = f_{C_2} \cdot f_{C_1} \cdot f_C \exp tP_0$, сводятся к рассмотренным. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если $\mathfrak{M}$ — двумерная подалгебра, алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ и $\pi_1(\mathfrak{M}) = \langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{M}) = \langle P_1, P_2\rangle$, то $\mathfrak{M}$ $O(2)$-сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle G_1 + \gamma P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + (\gamma+\beta)P_2\rangle$, где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Алгебры $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,\gamma)$, $\mathfrak{M}(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma})$ $O(2)$-сопряжены тогда и только тогда, когда $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$, $\gamma = \overline{\gamma}$.*

Доказательство. Поскольку $f_C \cdot \exp tP_0 = \exp tP_0 \cdot f_C$ для любой матрицы $C \in O(2)$, то в силу леммы 5.5 алгебра $\mathfrak{M}$ сопряжена алгебре $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,\gamma)$. Если $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,\gamma)$ сопряжена $\mathfrak{M}(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma})$, то на основании леммы 5.4 $\alpha \pm (-\overline{\alpha}) = 0$, $\overline{\gamma} + \overline{\beta} - \gamma = 0$, $\gamma + \beta - \overline{\gamma} = 0$, $-\alpha \pm \overline{\alpha} = 0$ или одна из систем (5.1), (5.2) имеет решение. В первом случае $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\beta} = \beta = 0$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Пусть μ — ненулевое решение системы (5.1). Тогда

$$\begin{aligned}
&\mu(\alpha - \overline{\alpha}) = \gamma + \beta - (\overline{\gamma} + \overline{\beta}), \\
&\mu(\gamma - \overline{\gamma} - \overline{\beta}) = -\alpha + \overline{\alpha}, \\
&\mu(\overline{\gamma} - \gamma - \beta) = \alpha - \overline{\alpha}, \\
&\mu(-\alpha + \overline{\alpha}) = \overline{\gamma} - \gamma.
\end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что $\overline{\beta} = \beta = 0$, $\mu(\alpha - \overline{\alpha}) = \gamma - \overline{\gamma}$, $\mu(\gamma - \overline{\gamma}) = -\alpha + \overline{\alpha}$. Но тогда $(\mu^2 + 1)(\alpha - \overline{\alpha}) = 0$, а значит, $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\gamma} = \gamma$.

Пусть λ — решение системы (5.2). Тогда

$$\lambda(\alpha+\overline{\alpha})=\gamma+\beta-(\overline{\gamma}+\overline{\beta}),$$
$$\lambda(\gamma-(\overline{\gamma}+\overline{\beta}))=-\alpha-\overline{\alpha},$$
$$\lambda(\overline{\gamma}-\gamma-\beta)=\alpha+\overline{\alpha},$$
$$\lambda(-\alpha-\overline{\alpha})=\overline{\gamma}-\gamma.$$

Отсюда следует, что $\lambda(\beta+\overline{\beta})=0$, а потому при $\lambda\neq 0$ имеем $\beta=\overline{\beta}=0$. Так как $\lambda(\alpha+\overline{\alpha})=\gamma-\overline{\gamma}$, $\lambda(\gamma-\overline{\gamma})=-(\alpha+\overline{\alpha})$, то $\gamma-\overline{\gamma}=0$, $\alpha+\overline{\alpha}=0$ или $\overline{\gamma}=\gamma$, $\alpha=\overline{\alpha}=0$. Если $\lambda=0$, то $\alpha=\overline{\alpha}=0$, $\gamma=\overline{\gamma}$, $\beta=\overline{\beta}$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathbb{R}_+=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid\lambda>0\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq 0$. Относительно $G(2)$-сопряженности подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(2)$ исчерпываются алгебрами*:*

$\sim O$, $\sim\langle P_0\rangle$, $\sim\langle P_1\rangle$, $\sim\langle G_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_2\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle J_{12}\rangle$, $\sim\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1\rangle$, $\sim\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1+\beta P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\sim\langle G_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_1\rangle$, $\langle G_1,P_1+\alpha P_2\rangle$, $\sim\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle G_1,G_2+\alpha P_1\rangle$, $\sim\langle G_1+\gamma P_1,G_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1,G_2+\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1+\beta P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_0\rangle$, $\sim\langle P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle P_0,G_1,P_1\rangle$, $\langle P_0,G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2+\beta P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1\rangle$, $\langle G_2,G_1+\alpha P_2,P_1\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12}+\alpha P_0,P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},G_1,G_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\sim\langle J_{12},P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0,G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},G_1,G_2,P_0,P_1,P_2\rangle$.

Записанные алгебры не сопряжены относительно группы $G(2)$.

Доказательство. Если $\mathfrak{L}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{L}G(2)$ и $\pi(\mathfrak{L})\neq 0$, то $\mathfrak{L}$ содержит элемент $J_{12}+wP_0$. Допустим, что $(\pi_1+\pi_2)(\mathfrak{L})\neq 0$ и $w\neq 0$. Тогда $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12}+wP_0\rangle$ или $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12},P_0\rangle$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, инвариантное относительно J_{12}, P_0. Если $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, то $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ \langle J_{12}\rangle$, где $\mathfrak{M}\subset\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$. В первых двух случаях $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из пространств: $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$. В третьем случае $\mathfrak{M}$ сопряжено с одним из таких пространств: $\langle G_1,G_2\rangle$, $\langle P_1,P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2,G_2-\alpha P_1\rangle$ $(\alpha>0)$.

Классификацию подалгебр $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathcal{L}G(2)$ с условием $\pi(\mathfrak{L})=0$ проводим по схеме, изложенной в § 3 с использованием лемм 5.2–5.6.

Теорема 5.2. *Подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(2)$-сопряженности алгебрами, отмеченными в теореме 5.1 знаком $\sim$, полными пробразами подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(2)$ при гомоморфизме $\mathcal{L}G(2)$ на $\mathcal{L}G(2)$ с ядром $\langle M\rangle$ и такими алгебрами:*

$\langle P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0+\gamma M\rangle$;

$\langle P_0+\gamma M,P_1\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0\rangle$, $\langle J_{12},P_0+\gamma M\rangle$;

$\langle P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,G_1,G_2\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha M,P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M,P_0,P_1,P_2\rangle$, $\langle J_{12},P_0+\gamma M,P_1,P_2\rangle$ $(\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\gamma\neq 0)$.

Доказательство. Достаточно исследовать на сопряженность те подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$, которые не содержат M. Если $\mathfrak{L}$ — такая подалгебра и $\pi(\mathfrak{L})\neq 0$, то $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\subset\!\!\!\!+\ f$, где $\mathfrak{M}\subset\langle G_1,G_2,P_1,P_2\rangle$, а f — подалгебра алгебры $\langle J_{12},P_0,M\rangle$. Относительно $\widetilde{G}(2)$-сопряженности алгебра f совпадает с одной из алгебр: $\langle J_{12}+$

*$\sim$ стоит перед алгебрами, являющимися также подалгебрами $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$.

$\alpha M, P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M, P_0\rangle$, $\langle J_{12}, P_0+\gamma M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha M\rangle$, $\langle J_{12}+\alpha P_0+\gamma M\rangle$ $(\alpha > 0, \gamma \neq 0)$.

Допустим, что $\pi(\mathfrak{L}) = 0$. Если $\pi_1(\mathfrak{L}) = 0$, то в силу равенства $\exp(tG_a)(P_a + tM) = P_a$ алгебра $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр: $\langle P_0 + \gamma M\rangle$, $\langle P_0 + \gamma M, P_1\rangle$, $\langle P_0 + \gamma M, P_1, P_2\rangle$. Пусть $\pi_1(\mathfrak{L}) \neq 0$. Если $G_1 + \alpha P_0 + \lambda M \in \mathfrak{L}$, то $\exp(\lambda P_1)(\mathfrak{L})$ содержит $G_1 + \alpha P_0$. Значит, проекция $\mathfrak{L}$ на $\langle M\rangle$ равна нулю и мы получаем одну из алгебр, отмеченных в теореме 5.1 знаком $\sim$. Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Пусть $\alpha, \beta, w \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \neq 0$. Подалгебры алгебры $\mathcal{L}G(3)$ исчерпываются относительно $G(3)$-сопряженности подалгебрами алгебры $\mathcal{L}G(2)$ и такими алгебрами*:*

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$: $\sim O$, $\sim \langle P_0\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\sim \langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12}\rangle$: $\sim \langle P_3\rangle$, $\sim \langle G_3\rangle$, $\sim \langle G_3 + \alpha P_0\rangle$, $\sim \langle P_0, P_3\rangle$, $\langle G_3, P_3\rangle$, $\langle G_3 + \alpha P_0, P_3\rangle$, $\langle G_3, P_0, P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, G_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, G_3 + \alpha P_0\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, P_3\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, G_3 + \gamma P_3\rangle$, $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1, G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1, G_3+\gamma P_3\rangle$, $\sim \langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, G_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3, G_3 + \alpha P_0\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3 + \alpha P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3+\alpha P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12}+\alpha P_0\rangle$: $\sim \langle P_3\rangle$, $\langle G_3, P_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0, P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_3+\beta P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3 + \beta P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3\rangle$: $\sim O$, $\sim \langle P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha G_3\rangle$: $\sim O$, $\sim \langle P_3\rangle$, $\sim \langle P_0, P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 - \beta P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3 + \gamma P_3\rangle$, $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 - \beta P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 - \beta P_1, G_3 + \gamma P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3 P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha P_3\rangle$: $\sim O$, $\sim \langle P_0\rangle$, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_3 + \beta P_0\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 - \beta P_1\rangle$, $\sim \langle P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_3\rangle$, $\langle G_3 + \beta P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 - \beta P_1, G_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3 + \beta P_0, P_1, P_2\rangle$;

$\langle O\rangle$: $\sim \langle G_1 + \alpha P_2, P_3\rangle$, $\sim \langle G_2, G_1 + \alpha P_3\rangle$, $\sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2 + \alpha P_3\rangle$, $\sim \langle G_2, G_1 + \gamma P_1+\beta P_3\rangle$, $\sim \langle G_1+\gamma P_1+\beta G_2, G_2+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1, P_1+\alpha G_2+\beta P_3\rangle$, $\langle P_1+\alpha G_2, G_1+\beta P_3\rangle$, $\langle P_1 + \alpha G_2 + \gamma G_1, G_1 + \beta P_3\rangle$, $\langle G_1 + \gamma P_1, P_1 + \alpha G_2 + \beta P_3\rangle$, $\langle P_1 + \alpha G_2, G_1 + \gamma P_1 + \beta P_3\rangle$, $\langle G_1 + \gamma P_1 + \sigma P_3, P_1 + \alpha G_2 + \beta P_3\rangle$, $\langle G_1 + \alpha G_2, P_1 + \beta P_3\rangle$, $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 + \gamma P_1 + \rho P_2 + \beta P_3\rangle$, $\sim \langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\sim \langle G_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, P_1 + \alpha P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, G_1 + \alpha P_2, P_3\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, P_1 + \alpha G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1 + \gamma P_1, P_1 + \alpha G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2+\delta P_1, P_1+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_2, P_1, G_1+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \beta P_2, P_3\rangle$, $\langle G_2 + \lambda P_1, G_1 + \alpha P_2 + \mu P_1, P_1 + \beta P_3\rangle$, $\langle G_2 + \rho P_3, P_1, G_1+\alpha P_2+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, P_1, G_2+\beta P_3\rangle$, $\sim \langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1, P_1+\alpha G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1 + \gamma P_1, P_1 + \alpha G_2, G_3\rangle$, $\sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1 + \lambda P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + (\lambda + \beta)P_2, G_3\rangle$, $\sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2 + (\gamma + \beta)P_2, G_3\rangle$, $\sim \langle G_1 + \gamma P_1, G_2 + \gamma P_2, G_3\rangle$, $\langle G_1 + \lambda P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \lambda P_2, G_3\rangle$, $\langle G_2 + \lambda P_2, G_1 + \gamma P_1 + \mu P_2, P_2 + \alpha G_3\rangle$, $\langle G_2 + \lambda P_1, G_1 + \alpha P_2 + \mu P_1, P_1 + \beta G_3\rangle$, $\langle P_1 + \gamma P_2 + \lambda G_2, G_1 + \alpha P_2 + \mu G_2, G_2 +$

*$\sim$ стоит перед алгебрами, являющимися также подалгебрами алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$.

$\beta G_3\rangle$, $\langle P_1+\gamma P_2+\lambda G_3, G_2, G_1+\alpha P_2+\beta G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, P_1+\gamma P_2+\beta G_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2+\sum\limits_1^3\beta_i P_i, G_3+\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2+\gamma P_1\rangle$ $(\beta_3>0)$, $\sim\langle G_1+\alpha P_0, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1+\beta P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1+wP_3, P_2\rangle$, $\langle G_1, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_2, G_1+\alpha P_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2+\alpha P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, P_1, P_2+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_3, G_2, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2, G_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1+\gamma P_2\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1, G_2, P_2, P_1+\alpha G_3\rangle$, $\langle G_1+\lambda P_1, G_2+\beta P_1, P_2, P_1+\alpha G_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1+\beta P_2, P_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1, P_3\rangle$, $\langle G_3, G_1+\lambda P_1+\alpha P_2, G_2+\mu G_1+\gamma P_1, P_3+\beta P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma_1 P_1, G_2+\beta G_1+\gamma_2 P_2, G_3, P_3+\alpha P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma_1 P_1, G_2+\beta G_1+\gamma_2 P_2, G_3, P_3+\alpha P_2\rangle$ $(\gamma_1\neq 0, \gamma_2\neq 0)$, $\langle G_1+\lambda P_1+\alpha P_3, G_2+\mu G_1+\beta P_1, G_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2+\lambda G_1+\alpha P_3, G_3, P_2\rangle$, $\sim\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_0, G_1+\alpha P_2, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_2, P_1+\beta P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+wP_3, P_1+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1+\gamma P_1, G_2, G_3, P_1+\beta P_3, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2, G_3, P_1, P_3\rangle$, $\langle G_1, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_3, G_2, P_0, P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, G_3, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2+\beta P_1, G_3, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_0, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}O(3)$ — простая алгебра, то всякая подалгебра $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathcal{L}G(3)$ с условием $\pi(\mathfrak{L})=\mathcal{L}O(3)$ является расщепимой. Пусть $\mathcal{R}(3)$ — радикал $\mathcal{L}G(3)$ и $\mathfrak{M}=\mathfrak{L}\cap\mathcal{R}(3)$. Если $\pi_1(\mathfrak{M})=0$, то в силу леммы 1.2 и того, что $\mathcal{L}O(3)$ действует неприводимо на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, заключаем, что $\mathfrak{M}$ совпадает с одним из пространств: O, $\langle P_0\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$. Если $\pi_2(\mathfrak{M})=0$, то $\mathfrak{M}$ сопряжено одному из пространств: O, $\langle P_0\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$.

Допустим, что $\pi_1(\mathfrak{M})\neq 0$, $\pi_2(\mathfrak{M})\neq 0$. На основании леммы 3.1 $\mathfrak{M}$ содержит $G_1+\mu P_1$. Так как $\exp(\mu P_0)(G_1+\mu P_1)=G_1$, то можно предполагать, что $G_1\in\mathfrak{M}$. Но в таком случае $\mathfrak{M}$ совпадает с $\langle G_1, G_2, G_3, P_1, P_2, P_3\rangle\oplus s\langle P_0\rangle$, где $s\in\{0,1\}$.

Если $\mathfrak{L}$ — подалгебра $\mathcal{L}G(3)$ и $\pi(\mathfrak{L})=\langle J_{12}\rangle$, то в силу леммы 3.1 $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}\niplus f$, где f — подалгебра $\langle J_{12}, P_0\rangle$, а $\mathfrak{M}$ — подалгебра $\mathcal{R}(3)$ и $\mathfrak{M}=[J_{12},\mathfrak{M}]\oplus\mathfrak{M}'$, где $\mathfrak{M}'\subset\langle G_3, P_0, P_3\rangle$. Алгебра $\mathfrak{M}'$ сопряжена с одной из алгебр, выписанных в лемме 5.1. При $[P_0,[J_{12},\mathfrak{M}]]=0$ следует считать, что $\mathfrak{M}'\neq\langle G_3+\gamma P_3\rangle$ $(\gamma\neq 0)$. Алгебра $[J_{12},\mathfrak{M}]$ сопряжена с одной из алгебр: O, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha>0)$.

Случаи, когда $\pi(\mathfrak{L})=0$, исследуются методом Ли–Гурса с использованием лемм 5.2–5.6. Проиллюстрируем это на примерах двух случаев.

Пусть $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, $\pi_1(\mathfrak{L})=\langle G_1\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{L})=\langle P_2, P_3\rangle$. В этом случае мы проводим классификацию алгебр $\mathfrak{L}$ относительно группы матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

где $A\in O(2)$. Так как каждый одномерный идеал алгебры $\langle P_2, P_3\rangle$ сопряжен с $\langle P_3\rangle$, то $\mathfrak{L}$ сопряжена с $\langle G_1, P_2, P_3\rangle$ или с $\langle G_1+\alpha P_2, P_3\rangle$ $(\alpha>0)$.

Пусть $\pi_0(\mathfrak{L})=0$, $\pi_1(\mathfrak{L})=\langle G_1, G_2\rangle$, $\pi_2(\mathfrak{L})=\langle P_1, P_2, P_3\rangle$. Будем предполагать, что $\mathfrak{L}$ не сопряжена алгебре $\mathfrak{L}'$ с проекциями $\pi_1(\mathfrak{L}')$, $\pi_2(\mathfrak{L}')$, отличными от $\pi_1(\mathfrak{L})$, $\pi_2(\mathfrak{L})$. Согласно теореме 5.1 подалгебры алгебры $\langle G_1, G_2, P_1, P_2\rangle$ исчерпываются относительно $G(2)$-сопряженности алгебрами:

$\langle G_1+\alpha P_2, G_2-\alpha P_1+\mu P_2\rangle$ $(\alpha>0,\ \mu\geq 0)$;

$\langle G_2, G_1 + \alpha P_2, P_1\rangle$ $(\alpha > 0)$; (5.5)
$\langle G_1, G_2, P_1, P_0\rangle$.

Для каждой алгебры $\mathfrak{M}$ вида (5.5) классифицируем подалгебры алгебры $\mathfrak{M} \oplus \langle P_3\rangle$. С этой целью в $\mathfrak{M}$ находим идеалы $\mathfrak{U}$, для которых $\dim \mathfrak{M}|\mathfrak{U} = 1$, а затем классифицируем эти идеалы относительно нормализатора $\mathfrak{M}$ в $G(2)$. Подалгебры алгебры $\mathfrak{M} \oplus \langle P_3\rangle$, отличные от $\mathfrak{M} \oplus \langle P_3\rangle$, сопряжены алгебрам $\mathfrak{U} \oplus \langle X + \lambda P_3\rangle$, где $X \in \mathfrak{M}$, $X \notin \mathfrak{U}$. Применяя автоморфизм алгебры $\mathcal{L}G(3)$, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{1, 1, -1\}$, получаем, что $\lambda > 0$. Следовательно, $\mathfrak{L}$ сопряжена одной из алгебр:

$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + \mu P_2, P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \mu \geq 0)$;
$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 + \delta P_1 + \mu P_2 + \beta P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \delta \neq 0)$;
$\langle G_2, G_1 + \alpha P_2, P_1, P_3\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle G_2 + \lambda P_1, G_1 + \alpha P_2 + \mu P_1, P_1 + \beta P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$;
$\langle G_2 + \lambda P_3, P_1, G_1 + \alpha P_2 + \beta P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$;
$\langle G_1 + \alpha P_2, P_1, G_2 + \beta P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$;
$\langle G_1 + \lambda P_2, G_2, P_1, P_2 + \alpha P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \lambda \geq 0)$;
$\langle G_2, P_1, P_2, G_1 + \alpha P_3\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle G_1, G_2, P_1, P_2, P_3\rangle$.

Теорема доказана.

Теорема 5.4. *Подалгебры алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ исчерпываются относительно $\widetilde{G}(3)$-сопряженности подалгебрами алгебры $\mathcal{L}\widetilde{G}(2)$, алгебрами, отмеченными в теореме 5.3 знаком $\sim$, полными прообразами подалгебр алгебры $\mathcal{L}G(3)$ при гомоморфизме $\mathcal{L}\widetilde{G}(3)$ на $\mathcal{L}G(3)$ с ядром $\langle M\rangle$ и такими алгебрами:*

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0 + \gamma M\rangle$ $(\gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_0 + \gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12} + \beta M\rangle$: O, $\langle P_3\rangle$, $\langle G_3\rangle$, $\langle G_3 + \alpha P_0\rangle$, $\langle P_0, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, G_3 + \alpha P_0\rangle$, $\langle G_1, G_2, P_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3 + \gamma P_3\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12} + \alpha M, P_0 + \gamma M, P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0)$; $\langle J_{12}, P_0 + \gamma M, P_3\rangle$ $(\gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12}, P_0 + \gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle J_{12} + \alpha M, P_0 + \gamma M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12} + \alpha P_0 + \gamma M\rangle$: $\langle P_3\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0)$;

$\langle J_{12} + \alpha P_3 + \beta M\rangle$: $\langle P_0 + \lambda M\rangle$, $\langle P_0 + \lambda M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$;

$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 + \alpha P_1 + \lambda P_2 + \beta P_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$;

$\langle G_1 + \alpha P_2, G_2 + \alpha P_1 + \mu P_2 + (\alpha\lambda + \alpha^{-1}\gamma\mu)P_3, G_3 + \lambda G_1 + \alpha^{-1}\gamma G_2 + \gamma P_1\rangle$ $(\alpha > 0,\ \gamma \neq 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq -\alpha^{-2}\gamma\mu)$.

Доказательство теоремы 5.4 аналогично доказательству теоремы 5.2.

1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981, 342 с.

2. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

3. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.

4. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alambert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.

5. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. мат. физ.*, 1976, **26**, № 2, 206–220.

6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, № 7, 2319–2330.
7. Баранник Л.Ф., Об унитарных проективных представлениях группы Галилея, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 108–118.
8. Fushchych W.I., Krivsky I.Ju., On a possible approach to the variable mass problem, *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, № 1, 79–82.
9. Fushchych W.I., Krivsky I.Ju., On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space, *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, № 4, 573–585.
10. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. мат. физ.*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
11. Fushchych W.I., On a motion equations for two particles in relativistic quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–168.
12. Le Bellac M., Vary-Leblond J.M., Galilean electromagnetism, *Nuovo Cimento B*, 1973, **14**, № 1, 217–235.
13. Burdet G., Perrin M., Sorba P., *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, 1436; 2253.
14. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 808–810.
15. Beckers J., Patera J., Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.
16. Sorba P., The Galilei group and its connected subgroups, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 6, 941–953.
17. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
18. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 2, 2259–2288.
19. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.