О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решения

В.И. ФУЩИЧ

Предложен способ построения пуанкаре- и галилеево-инвариантных нелинейных уравнений. Некоторые из полученных уравнений обладают более широкой симметрией, чем линейные волновые уравнения. Построены нелинейные уравнения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля. Рассмотрена новая модель взаимодействия спинорного и скалярного полей. Обсуждаются приемы для отыскания семейств частных решений нелинейных уравнений. Приведены примеры неразмножаемых решений для нелинейного спинорного уравнений.

Введение

При нелинейном обобщении волнового уравнения для скалярного поля $u(x)$ рассматривают уравнение [1]

$$p_\mu p^\mu u(x) + F_1(u, u^*)u(x) = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

$F_1(u, u^*)$ — некоторая нелинейная дифференцируемая функция от $u(x)$ и комплексно-сопряженной функции u^*,

$$p_\mu = ig^{\mu\nu}\partial_\nu, \qquad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Уравнение Дирака обобщают таким же путем, т.е. добавляют нелинейный член к свободному оператору Дирака

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi(x) + F_2(\bar{\Psi}, \Psi)\Psi(x) = 0, \tag{2}$$

$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$, $F_2(\bar{\Psi}, \Psi)$ — произвольная дифференцируемая функция от $\bar{\Psi}\Psi$. Уравнения (1), (2) инвариантны относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. В том случае, когда $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, уравнения (1), (2) инвариантны относительно конформной группы $C(1,3) \supset P(1,3) \supset O(1,3)$. Требование инвариантности относительно группы $C(1,3)$ дает возможность конкретизировать нелинейности в (1) и (2) [2].

При таком способе обобщения волновых уравнений симметрия его, по сравнению с линейным уравнением, не расширяется. В этой работе указан простой способ построения нелинейных волновых уравнений, симметрия которых может быть значительно шире, чем симметрия исходного линейного уравнения.

§ 1. О нелинейном обобщении уравнений Дирака и Даламбера

1. Рассмотрим линейную систему Дирака для Ψ и $\bar{\Psi}$

$$(i\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi(x) = 0, \tag{1.1}$$

Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, С. 4–19.

$$(i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\Psi) = 0. \tag{1.2}$$

Нелинейные уравнения типа (2) можно получить с помощью следующей замены:

$$m \to M = F_2(\bar{\Psi}\Psi) + F_3(\bar{\Psi}S_{45}\Psi) + F_4(V_\mu V^\mu) + F_5(V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}), \tag{1.3}$$

$$V_\mu = \bar{\Psi}S_{\mu 5}\Psi, \qquad V_{\mu\nu} = \bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi, \tag{1.4}$$

$$S_{\mu 5} = \frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad S_{5\mu} = -\frac{i}{2}\gamma_\mu, \qquad S_{45} = \frac{i}{2}\gamma_4, \qquad \gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{1.5}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \qquad S_{\mu 4} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_4 - \gamma_4\gamma_\mu). \tag{1.6}$$

Очевидно, что в формулах (1.3), не нарушая пуанкаре-инвариантности, можно добавить члены типа $\widetilde{F}_4(\widetilde{V}_\mu\widetilde{V}^\mu)$, $\widetilde{F}_5(\widetilde{V}_{\mu\nu}\widetilde{V}^{\mu\nu})$,

$$\widetilde{V}_\mu = \bar{\Psi}\gamma_4 S_{\mu 5}\Psi, \qquad \widetilde{V}_{\mu\nu} = \bar{\Psi}\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi. \tag{1.7}$$

Для нелинейных обобщений линейных уравнений, описывающих свободные поля произвольного спина, полезно заметить, что матрицы (1.5), (1.6) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы $O(1,5)$ [1]. Поэтому замена (1.3) может быть использована не только для обобщения уравнения Дирака.

Замена (1.3) не расширяет группу симметрии безмассового ($m = 0$) уравнения Дирака (1.1). Рассмотрим теперь следующие обобщения уравнения Дирака. Заменим в уравнении (1.1) оператор-вектор ∂_μ, вектор-матрицу γ_μ, спинор Ψ таким путем

$$\partial_\mu \to D_\mu \equiv A_1\partial_\mu + A_2 V_\mu + A_3 V_{\mu\nu}V^\nu, \tag{1.8}$$

$$\gamma_\mu \to \Gamma_\mu \equiv B_1\gamma_\mu + B_2 V_{\mu\nu}\gamma^\nu + B_3 V_\mu, \tag{1.9}$$

$$\Psi \to \Phi \equiv C_1\Psi + C_2 V_\mu\gamma^\mu\Psi + C_3 V_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\Psi, \tag{1.10}$$

где A_i, B_i, C_i — произвольные дифференцируемые функции от $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}S_{\mu\nu}\Psi\bar{\Psi}S^{\mu\nu}\Psi$, $\bar{\Psi}V_\mu\Psi\bar{\Psi}V^\mu\Psi$.

Уравнение (1.1) после замен (1.8)–(1.10) принимает вид

$$i\Gamma^\mu D_\mu\Phi - M\Phi = 0. \tag{1.11}$$

Уравнение для сопряженного спинора $\bar{\Phi}$ записывается очевидным образом. В формулах (1.8)–(1.10) можно добавить соответствующие члены с $\widetilde{V}_\mu$ и $\widetilde{V}_{\mu\nu}$.

В уравнении (1.11) операторы Γ_μ и D_μ не коммутируют, поэтому более симметричное нелинейное обобщиние уравнения Дирака выглядит как

$$\frac{i}{2}(\Gamma^\mu D_\mu + D_\mu\Gamma^\mu)\Phi - M\Phi = 0. \tag{1.12}$$

Из приведенного ясно, что с помощью указанных замен можно получить широкие классы пуанкаре-инвариантных нелинейных уравнений, которые не изучались ранее. Важно подчеркнуть, что при специальном выборе функций A_i, B_i, C_i, F_i получаем уравнения, которые обладают значительно более богатыми симметрийными свойствами, чем исходное безмассовое уравнение Дирака ($m = 0$) (1.1). Так, например, с помощью замены (1.8), (1.9), когда $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 1$, $F_i = 0$, получаем уравнение [2]

$$V_\mu \partial^\mu \Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} = 0. \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры конформную алгебру $AC(1,3)$ и алгебру Пуанкаре $AP(1,3)$. Это обстоятельство весьма существенное, поскольку чем выше симметрия нелинейного уравнения, тем больше надежд построить его решения. В некоторых случаях нелинейные уравнения, инвариантные относительно бесконечномерных алгебр, допускают линеаризацию с помощью локальных и нелокальных замен [3].

Замечание 1. Среди множества уравнений (1.12) имеются уравнения

$$\gamma_\mu(p^\mu + A_1\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)\Psi = m\Psi,$$
$$p^\mu(\gamma_\mu + A_1\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi)\Psi = m\Psi,$$
$$(\gamma_\mu p^\mu + S_{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi)\Psi = m\Psi,$$

которые можно трактовать как уравнения движения для спинорной частицы массы m, движущейся в собственном векторном $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ и тензорном $\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ полях. Точные решения этих уравнений могут быть построены с помощью анзатца [1, 2].

2. Обобщим линейное уравнение Даламбера

$$\partial_\mu \partial^\mu u = 0 \tag{1.14}$$

для комплексной скалярной функции u.

Если в (1.14) произвести замену

$$\partial_\mu \to D_\mu = A_1\partial_\mu + A_2 u^*\partial_\mu u + A_3 u\partial_\mu u^*, \tag{1.15}$$

$$u \to \widetilde{u} = F(uu^*)u, \tag{1.16}$$

то получим уравнение

$$D_\mu D^\mu \widetilde{u} = 0. \tag{1.17}$$

В этот класс уравнений входит, в частности, уравнение

$$\partial_\mu \partial^\mu u + (\partial_\nu u)(\partial^\nu u)u = 0, \tag{1.18}$$

которое можно представить через матрицы Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu i\gamma_\nu \partial^\nu \Psi(x) = 0. \tag{1.19}$$

Замены (1.3), (1.8)–(1.10) в уравнениях (1.18) и (1.19) дают нам две неэквивалентные системы нелинейных уравнений

$$D_\mu D^\mu \Phi = M^2\Phi, \tag{1.20}$$

$$\Gamma_\mu D^\mu \Gamma_\alpha D^\alpha \Phi = M^2\Phi. \tag{1.21}$$

Среди множества уравнений (1.20) имеется, в частности уравнение вида [5]

$$(\partial_\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)(\partial^\mu + \lambda_1 \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi)\Psi + \lambda_2 S_{\mu\nu} V^{\mu\nu}\Psi = m^2\Psi,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — произвольные параметры, которое можно интерпретировать как уравнение движения для частицы со спином 1/2, движущейся в собственном спинорном поле.

Аналогично обобщается уравнение Монжа–Ампера

$$\det \|\partial_\mu \partial_\nu u\| = 0. \tag{1.22}$$

После замены (1.15), (1.16) получим

$$\det \|D_\mu D^\nu \widetilde{u}\| = 0. \tag{1.23}$$

§ 2. О нелинейных уравнениях для релятивистской жидкости и электромагнитного поля

В этом параграфе, исходя из линейных уравнений, построим нелинейные уравнения движения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля.

1. Рассмотрим линейное пуанкаре-инвариантное уравнение для вектора-скорости v_μ

$$\lambda_1 \partial_\alpha \partial^\alpha v_\mu - \lambda_2 \partial_\mu(\partial_\nu v^\nu) = m^2 v_\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

где λ_1, λ_2, λ_3, m — произвольные параметры. В том случае, когда $\lambda_2 = 0$ или $\partial_\nu v^\nu = 0$ (условие неразрывности), уравнение (2.1) распадается на четыре независимые волновые уравнения

$$\lambda_1 \partial_\alpha \partial^\alpha v_\mu = m^2 v_\mu. \tag{2.2}$$

В случае $\lambda_1 = 0$ имеем зацепленную систему

$$\lambda_2 \partial_\mu(\partial_\nu v^\mu) = m^2 v_\mu. \tag{2.3}$$

Сделав в уравнениях (2.1)–(2.3) замены

$$\partial_\mu \to D_\mu = A_1 \partial_\mu + A_2 v_\mu + A_3 v_\nu \partial_\nu v_\mu, \tag{2.4}$$

$$v_\mu \to \widetilde{v}_\mu = C_1 v_\mu + c_2 v_\nu \partial_\nu v_\mu, \tag{2.5}$$

где A_1, A_2, A_3, C_1, C_2 — функции от $v_\alpha v^\alpha$, получим уравнения

$$\lambda_1 D_\alpha D^\alpha \widetilde{v}_\mu - \lambda_2 D_\mu(D_\nu \widetilde{v}^\nu) = m^2 \widetilde{v}_\mu, \tag{2.6}$$

$$\lambda_1 D_\alpha D^\alpha \widetilde{v}_\mu = m^2 \widetilde{v}_\mu, \tag{2.7}$$

$$\lambda_3 D_\mu(D_\nu \widetilde{v}^\nu) = m^2 \widetilde{v}_\mu. \tag{2.8}$$

Уравнения (2.6)–(2.8), при определенных выборах функций A_i, C_1, C_2, инвариантны относительно более широких групп, чем исходные линейные уравнения (2.1)–(2.3). Так, например, в класс уравнений (2.6) входит релятивистский аналог уравнения Эйлера

$$v_\nu \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{2.9}$$

которое инвариантно относительно бесконечномерной алгебры. Исходное линейное уравнение (2.1) не инвариантно относительно бесконечномерной алгебры. Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2.1) является группа $P(1,3)$.

Аналогичным путем можно получить уравнение типа Навье–Стокса. Для этого нужно исходить из линейного уравнения теплопроводности

$$(\partial_0 + \lambda_1 \partial_k \partial_k) v_a = \lambda_2 v_a, \qquad a = 1,2,3, \tag{2.10}$$

v_a — компоненты вектора скорости $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Сделав в (2.10) замену

$$\partial_0 \to D_0 = A_1(v^2)\partial_0 + A_2(v^2), \tag{2.11}$$

$$\partial_k \to D_k = A_{kl}(v^2)\partial_l + B_{kl}(v^2) v_l, \qquad k,l = 1,2,3, \tag{2.12}$$

получим

$$D_0 v_a + \lambda_1 D_k D_k v_a = \lambda_2 v_a. \tag{2.13}$$

В (2.11), (2.12) A_1, A_2, A_{kl}, B_{kl} — произвольные дифференцируемые функции от скаляра $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

Среди множества уравнений (2.13) содержится уравнение типа Навье–Стокса

$$D_0 v_a + v_k \frac{\partial v_a}{\partial x_k} + \lambda_1 \partial_k \partial_k v_a = 0. \tag{2.14}$$

На множестве уравнений (2.14) реализуется нелинейное представление группы Галилея $G(1,3)$ [2].

Замечание 2. Если предполагать, что скорость жидкости меньше скорости в вакууме, то, видимо, члены типа $m^2 v_\mu$ должны присутствовать в уравнениях движения для релятивистской жидкости.

Замечание 3. Указанным способом получается нелинейное уравнение теплопроводности

$$D_0 u + D_k D_k u = 0, \qquad k = 1,2,3, \tag{2.15}$$

где

$$D_0 = A_0(x,u)\partial_0 + A_1(x,u), \tag{2.16}$$

$$D_k = A_{kl}(x,u)\partial_l + B_{kl}(x,u)\partial_l u, \tag{2.17}$$

A_0, A_1, A_{kl}, B_{kl} — произвольные дифференцируемые функции u, x, которое имеет более симметричную форму, чем общепринятое нелинейное уравнение теплопроводности

$$\partial_0 u + \frac{\partial}{\partial x_a}\left\{ c(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_a} \right\} = 0.$$

Если в (2.15) u — комплексная функция и в формулах (2.15), (2.16) сделать замену $\partial_0 \to p_0 = i\partial_0$, $\partial_k \to p_k = -i\partial_k$, то получим уравнение

$$\mathcal{P} u + \mathcal{P}_k \mathcal{P}_k u = 0, \tag{2.18}$$

где $\mathcal{P}_0 = D_0$ $(\partial_0 \to p_0)$, $\mathcal{P}_k = D_k$ $(\partial_k \to p_k)$, которое является обобщением линейного уравнения Шредингера.

2. Перейдем к построению уравнений движения для релятивистской жидкости и электромагнитного поля через спиноры. Предположим, что макроскопическая жидкость представляет собой некоторое образование (структуру) из взаимодействующих спинорных частиц (полей). Тогда один из простейших путей получения уравнения движения для спинорной жидкости состоит в следующем. Построим вектор скорости жидкости из спиноров по формуле

$$v_\mu = A_1(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_\mu\Psi + A_2(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi. \tag{2.19}$$

Взяв, например, в качестве макроскопического уравнения движения релятивистской жидкости уравнение (2.9) (или какое-либо другое пуанкаре-инвариантное уравнение), получим

$$(A_1\bar\Psi\gamma_\nu\Psi + A_2\bar\Psi\gamma_4\gamma_\nu\Psi)\frac{\partial}{\partial x_\nu}(A_1\bar\Psi\gamma_\mu\Psi + A_2\bar\Psi\gamma_4\gamma_\mu\Psi) = 0. \tag{2.20}$$

С помощью аналогичного приема строятся уравнения движения для электромагнитного поля из спиноров. Предположим, что макроскопическое электромагнитное поле — образование (структура) элементарных спинорных полей. Кроме того, предположим, что тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и вектор тока строятся из спиноров согласно формулам

$$F_{\mu\nu} = N_1(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi S_{\mu\nu}\Psi + N_2(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi, \tag{2.21}$$

$$j_\mu = K_1(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi S_{\mu5}\Psi + K_2(\bar\Psi\Psi)\bar\Psi\gamma_4 S_{\mu5}\Psi. \tag{2.22}$$

Подставляя (2.21), (2.22) в уравнение Максвелла

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu, \qquad \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0, \tag{2.23}$$

получаем уравнение движения для электромагнитного поля, построенного из спиноров.

Укажем еще на один способ построения тензор-матрицы $F_{\mu\nu}$ и вектор-матрицы A_μ через спинор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \lambda(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu), \tag{2.24}$$

$$A_\mu = \widetilde{K}_1(\bar\Psi\Psi)\gamma_\nu\bar\Psi S_{\mu\nu}\Psi + K_2(\bar\Psi\Psi)\gamma_\nu\bar\Psi\gamma_4 S_{\mu\nu}\Psi. \tag{2.25}$$

Для определения спинора Ψ можно взять, например, уравнение вида

$$\partial_\alpha p^\alpha A_\mu - \partial_\mu(\partial_\alpha A^\alpha) = 0 \tag{2.26}$$

или уравнение (2.9),полученное из соответствующего лагранжиана.

Замечание 4. Если в (2.23) сделать замены

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \to D_\mu = A_1\partial_\mu + A_2 F_{\mu\nu}\partial_\nu + A_3\partial_\nu F_{\mu\nu},\\
&j_\mu \to A_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3, $A_{\mu\alpha\beta}$ — произвольные функции от инвариантов электромагнитного поля

$$W_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad W_2 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta},$$

то получим нелинейное обобщение уравнений Максвелла.

В заключение приведем нелинейное уравнение для скалярного поля $u(x)$, построенного из спиноров

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}^\mu u(x) = \widetilde{M}^2 u(x), \qquad u = \bar{\Psi}\Psi,\\
&\mathcal{P}_\mu = A_0(\bar{\Psi}\Psi)p_\mu + A_1(\bar{\Psi}\Psi)\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi + A_2\bar{\Psi}\gamma_4\gamma_\mu\Psi,\\
&\widetilde{M}^2 = m^2 + \lambda_1(\bar{\Psi}\Psi)^{n_1} + \lambda_2\left(\bar{\Psi}\gamma_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\Psi\right)^{n_2},
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где λ_1, λ_2, n_1, n_2 — произвольные постоянные.

Замечание 5. Все сказанное выше переносится и на уравнение высокого порядка. При этом в качестве исходных линейных уравнений можно выбрать уравнения

$$\begin{aligned}
&\Box u + \lambda_2\Box^2 u + \cdots + \lambda_n\Box^n u = 0,\\
&(p_0 + \lambda p_a p_a)u + \lambda_2(p_0 + \lambda p_a p_a)^2 u + \cdots + \lambda_n(p_0 + \lambda p_a p_a)^n u = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Последнее уравнение [2] является естественным обобщением основного уровня движения квантовой механики.

Детальному анализу НДУЧП, полученных в этом параграфе, будут посвящены отдельные публикации.

§ 3. О новой модели взаимодействия спинорного и скалярного полей

Общепринято считать, что взаимодействие скалярного и спинорного полей описывается с помощью добавления нелинейных слагаемых в свободные уравнения Клейна–Гордона–Фока (КПФ) и Дирака. При этом получаем зацепленную нелинейную систему уравнений второго порядка. Здесь мы предложим систему пяти уравнений первого порядка для описания взаимодействия скалярного и спинорного полей.

Для описания скалярного поля будем использовать не уравнение КГФ, а нелинейное релятивистское уравнение Гамильтона

$$\partial_\mu u\partial^\mu u = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}\frac{\partial u}{\partial x^\mu} = -m^2, \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{3.1}$$

которое получается из релятивистского соотношения для энергии и импульса $E^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2$ заменой

$$E \to i\frac{\partial u}{\partial x_0}, \qquad p_a \to -i\frac{\partial u}{\partial x_a}.$$

Уравнение (3.1) инвариантно относительно вращений и сдвигов в пятимерном псевдоевклидовом пространстве (x_0, x_1, x_2, x_3, u) [2].

Одна из простых возможностей описания взаимодействия скалярного поля u со спинорным полем Ψ состоит в рассмотрении системы

$$\partial_\mu u\partial^\mu u = -M^2, \tag{3.2}$$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi - m_1\Psi + \lambda_3 u(\bar{\Psi}\Psi) + \lambda_4 \frac{\partial u}{\partial x^\nu}\gamma^\nu\Psi = 0, \tag{3.3}$$

где

$$M^2 = m^2 + \lambda_1(\bar{\Psi}\Psi)^{n_1} + \lambda_2(\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)^{n_2}. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.2) легко обобщается с помощью замены типа (1.8): $\partial_\mu \to D_\mu$. В уравнении (3.2) "масса" M скалярного поля порождается спинорным полем.

По-видимому, представляет интерес и такая пуанкаре-инвариантная система уравнений

$$p_0 u = \left\{p_a u p_a u + M^2\right\}^{1/2}, \tag{3.5}$$

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi - m\Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{3.6}$$

Замечание 5. Системы уравнения (3.2)–(3.6) совершенно не изучены; даже простейшее линейное уравнение КГФ с нелинейной связью

$$p_\mu p^\mu u = m_1^2 u, \tag{3.7}$$

$$p_0 u = \left\{p_a u p_a u + m_2^2\right\}^{1/2}. \tag{3.8}$$

Уравнение типа (3.8) [1] может быть использовано для выделения из множества решений (3.7) только таких, которые бы имели, например, положительную энергию. Положив в основу уравнения (3.1) или (3.8), можно исследовать задачу о движении скалярной частицы во внешнем электромагнитном поле (замена $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$) и "внешнем" спинорном поле (замена $p_\mu \to p_\mu + \lambda\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$).

§ 4. О неразмножаемых семействах решений нелинейных уравнений

Нелинейные дифференциальные уравнения, инвариантные относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$, конформной группы $C(1,3)$, группы Галилея $G(1,3)$ или более общих групп, обладают тем важнейшим свойством, что если известно хотя бы одно частное решение (иногда даже тривиальное), то с помощью групповых преобразований можно построить целое семейство точных решений [2, 3].

Обозначим через G — максимальную локальную группу инвариантности НДУЧП. Пусть M — некоторое множество решений НДУЧП.

Определение 1. *Множество решений M — назовем неразмножаемым относительно G, если оно инвариантно относительно G.*

Определение 2. *Множество M решений НДУЧП назовем размножаемым, если оно инвариантно относительно подгруппы $G_1 \subset G$.*

В этом параграфе приведем в явном виде несколько семейств неразмножаемых решений линейного и нелинейного уравнения Дирака. Широкий класс неразмножаемых решений получен в [4].

1. *Неразмножаемые решения уравнения Дирака.* Рассмотрим уравнение

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi + \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{4.1}$$

Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (4.1) является группа $G = C(1,3)$ — 15-параметрическая группа Ли.

В линейном случае ($\lambda = 0$) простейшие множества M задаются формулами:

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\chi, \tag{4.2}$$

χ — постоянный спинор, $s^2 = x^2 + 2ax + a^2 \neq 0$, $x^2 = x_\mu x^\mu$, $ax = a_\mu x^\mu$, $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ — параметры, $\gamma x = \gamma_\mu x^\mu$, $\gamma a = \gamma_\mu a^\mu$;

$$\Psi = (\gamma x + \gamma a)s^{-2}(\gamma b)\chi(\omega_1), \tag{4.3}$$

$\omega_1 = \frac{bx+ba}{s^2}$, $b^2 = b_\mu b^\mu = 0$, χ — произвольный спинор, зависящий только от одной переменной ω_1;

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\left\{(\gamma b + \gamma d)\chi_1(\omega_2) + (\gamma b - \gamma c)\chi_2(\omega_3)\right\}, \tag{4.4}$$

$\omega_2 = \frac{(bx+dx)+(b+d)a}{s^2}$, $\omega_3 = \frac{(b-d)x+(b-d)a}{s^2}$, $ab = a_\nu b^\nu = 0$, $a^2 = b^2 = 1$, χ_1, χ_2 — произвольные спиноры, зависящие только от инвариантных переменных.

В нелинейном случае ($\lambda \neq 0$) простейшие неразмножаемые множества решений задаются формулами

$$\Psi = \frac{\gamma x + \gamma a}{s^2}\exp\left\{-i\lambda\frac{\gamma b}{b^2}(\bar\chi\chi)^{1/3}\frac{bx+ba}{s^2}\right\}\chi, \tag{4.5}$$

$$\Psi = A(s^2)^{-3/4}\left\{\frac{\gamma x + \gamma a}{(s^2)}^{1/2} \pm i\gamma_0^2\right\}, \tag{4.6}$$

$A = \frac{1}{4}\left\{\pm 3\lambda(\bar\chi\chi)^{1/3}\right\}^{-3/2}$, χ — постоянный спинор.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при любом преобразовании из группы $C(1,3)$ многопараметрические семейства (4.2)–(4.6) являются неразмножаемыми.

§ 5. О некоторых способах решения нелинейных пуанкаре-инвариантных уравнений

В этом параграфе укажем простые приемы, которые позволяют строить семейства частных решений нелинейных волновых уравнений.

1. Ради конкретности рассмотрим нелинейное уравнение Даламбера ($F(u) = u^3$)

$$p_\mu p^\mu u + \lambda F(u) = \partial_0^2 u - \partial_1^2 u - \partial_2^2 u - \partial_3^2 u + \lambda F(u) = 0, \tag{5.1}$$

НДУЧП (1) поставим в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\partial_0^2 u + \lambda F(u) = 0, \qquad F(u) = u^3, \tag{5.2}$$

которое получается из (5.1) вычеркиванием членов $\partial_1^2 u$, $\partial_2^2 u$, $\partial_3^2 u$. Уравнение (5.2) имеет, помимо хорошо известных решений в классе эллиптических функций, простое частное решение

$$u_1(x) = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}x_0^{-1}, \qquad \lambda \neq 0. \tag{5.3}$$

Воспользовавшись преобразованиями из группы Лоренца $x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu$, размножаем решение (5.3) до решений, зависящих от всех переменных (x_0, x_1, x_2, x_3)

$$u_2 = i\sqrt{\frac{2}{\lambda}}(ax)^{-1}, \qquad a_\mu a^\mu = 1. \tag{5.4}$$

Используя конформные преобразования

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x_\mu + c_\mu x^2), \qquad \sigma = 1 + 2c_\nu x^\nu + c^2x^2, \tag{5.5}$$

размножаем решения (5.4) до семипараметрического семейства решений

$$u_3 = \sigma^{-1/2}u_2(x_0 \to x'_0, x_1 \to x'_1, x_2 \to x'_2, x_3 \to x'_3). \tag{5.6}$$

Очевидно, что уравнению (5.1) можно сопоставить обыкновенное уравнение вида

$$-\partial_1^2 u + \lambda u^3 = 0. \tag{5.7}$$

В этом случае получим такие семейства уравнения (5.1):

$$\begin{gathered}\widetilde{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}(a_\alpha x^\alpha)^{-1}, \qquad a_\mu a^\mu = -1,\\ \widetilde{u}_3 = \sigma^{-1/2}\widetilde{u}_2(x_\mu \to x'_\mu).\end{gathered} \tag{5.8}$$

2. С помощью указанного приема построим решения нелинейной системы Дирака (2) с нелинейностью $F_2(\bar\Psi\Psi) = \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}$. Расмотрим систему нелинейных обыкновенных уравнений вида

$$i\gamma_0\partial_0\Psi + \lambda(\bar\Psi\Psi)^{1/3}\Psi = 0. \tag{5.9}$$

Общее решение (5.9) задается формулой

$$\Psi_1 = \exp\{-i\lambda\gamma_0 x_0\}\chi, \qquad \chi \text{ — постоянный спинор.} \tag{5.10}$$

Размножая решения с помощью преобразований Лоренца и конформных преобразований (5.5), получаем следующее неразмножаемое семейство решений:

$$\Psi_2 = \frac{1 - (\gamma x)(\gamma c)}{\sigma^2}\exp\left\{i\lambda(\gamma a)\frac{ax - (ac)x^2}{\sigma}\right\}\chi. \tag{5.11}$$

Следует отметить, что размножать решения НДУЧП можно не только с помощью преобразований, образующих группу Ли. Так, например, уравнения

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu + \lambda_1(x_\alpha x^\alpha)^{-1/2}\right\}\Psi = 0, \tag{5.12}$$

$$\Box u + \lambda_1(x_\alpha x^\alpha)^{-1}u = 0 \tag{5.13}$$

не инвариантны относительно конформных преобразований (5.5), но инвариантны относительно инверсии

$$x_\mu \to x'_\mu = \frac{x_\mu}{x^2}, \qquad x^2 \neq 0. \tag{5.14}$$

Преобразования (5.14) не образуют группу Ли. Если Ψ_1 и u_1 — решения уравнений (5.12), (5.13), то новые решения Ψ_2 и u_2 строятся по формулам

$$\Psi_2 = \frac{\gamma x}{(x^2)^2}\Psi_1\left(x_0 \to \frac{x_0}{x^2}, x_1 \to \frac{x_1}{x^2}, x_2 \to \frac{x_2}{x^2}, x_3 \to \frac{x_3}{x^2}\right), \tag{5.15}$$

$$u_2 = \frac{1}{x^2}u_1\left(x_0 \to -\frac{x_0}{x^2}, x_1 \to -\frac{x_1}{x^2}, x_2 \to -\frac{x_2}{x^2}, x_3 \to -\frac{x_3}{x^2}\right). \tag{5.16}$$

Формулы (5.15), (5.16) можно рассматривать как обобщение известной теоремы Кельвина для уравнения Лапласа на линейные и нелинейные волновые уравнения. Описанный выше прием пригоден и для отыскания частных решений галилеево-инвариантных уравнений типа (2.18).

Другой способ построения частных решений НДУЧП состоит в замене многомерного уравнения (5.1) системой двумерных уравнений вида

$$\partial_0^2 u - \partial_1^2 u + F(u) = 0, \tag{5.17}$$

$$\partial_2^2 u + \partial_3^2 u = 0. \tag{5.18}$$

Двумерную систему (5.17), (5.18) легче решить, чем исходное многомерное уравнение (5.1). Построив частные решения системы (5.17), (5.18), размножаем их до неразмножаемых решений уравнения (5.1). В том случае, когда $F(u) = \lambda \exp u$, уравнение (5.17) имеет общее решение, зависящее от двух произвольных функций. Подставив эти решения в (5.18), получим уравнение для определения двух произвольных функций. Если $F(u) = \sin u$, уравнение (5.17), как известно, имеет солитонные решения.

Третий способ отыскания частных решений уравнения (5.1) состоит в его "линеаризации". Уравнение (5.1) заменяем на линейное уравнение с "потенциалом"

$$\Box u + \lambda V(x)u = 0 \tag{5.19}$$

или

$$\Box u = \lambda V(x). \tag{5.20}$$

"Потенциал" $V(x)$ можно конкретизировать либо из требования, инвариантности (5.19) относительно, например, конформных преобразований, либо из физических соображений. Если в уравнении (5.1) $F(u) = u^3$, то естественно требовать, чтобы и уравнение (5.19) было инвариантно относительно конформных преобразований (5.5). Это приводит к тому, что $V(x) = (x_\alpha x^\alpha)^{-1} = u^2$. Построив решения уравнения (5.19), получим решения исходного нелинейного уравнения (5.1).

Для отыскания решений мы, обычно, используем анзатц [1–5]

$$\Psi(x) = A(x)\varphi(\omega), \tag{5.21}$$

где $A(x)$ — матрица 4×4, $\varphi(\omega)$ — вектор-столбец $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, каждая компонента которого зависит только от одной или двух инвариантных переменных $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Более общий анзатц для уравнения Дирака имеет вид

$$b_{\mu\nu}(x, \Psi, \Psi^*)\Psi_\nu = a_{\mu\nu}(x, \varphi^*, \varphi)\varphi_\nu(\omega), \qquad \mu, \nu = \overline{0,3}, \tag{5.22}$$

функции $b_{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}$ определяются из условия “разделения” переменных. С помощью анзатца (5.18) могут быть получены решения, которые определяют спинор Ψ неявным образом, т.е. решения задаются в виде системы четырех (или восьми для Ψ и Ψ^*) уравнений

$$N_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, \Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Примером неявного анзатца может быть такое соотношение:

$$\begin{aligned}&\left\{f_1(x)\gamma_\alpha x^\alpha + f_2(x)(\bar\Psi\Psi) + f_3(x)x^\alpha\bar\Psi\gamma_\alpha\Psi + f_4(x)\gamma^\alpha\bar\Psi\gamma_\alpha\Psi\right\}\Psi = \\ &\qquad = f_5(x)\gamma^\alpha x_\alpha\varphi(\omega) + f_6(x)\gamma^\alpha(\bar\varphi\gamma_\alpha\varphi)\varphi(\omega),\end{aligned}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_6$ — произвольные гладкие функции.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.

2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.

3. Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouvil, D'alembert and eikonal equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 15, 3645–3656.

4. Фущич В.И., Жданов Р.З., Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей, в кн.: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 20–30.

5. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z., On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions, *Phys. Lett. B*, 1985, **159**, № 2–3, 189–191.