Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре $AP(2,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ЛАГНО, В.И. ФУЩИЧ

В работе изучаются для произвольного $n \geq 2$ подалгебры алгебры Ли $AP(2,n)$ обобщенной группы Пуанкаре $P(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Найдены в явном виде максимальные подалгебры и максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $AO(2,n)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в $AP(2,n)$.
Проведена частичная классификация относительно $P(2,3)$-сопряженности подалгебр алгебры $AP(2,3)$. Полностью описаны относительно $P(2,2)$-сопряженности подалгебры алгебры $AP(2,2)$.

Введение

Обобщенные группы Пуанкаре используются при решении ряда задач теоретической и математической физики. Примером может служить группа $P(2,3)$, которая имеет прямое отношение к задаче о расширении S-матрицы за массовую оболочку [1, 3] и к задаче описания частиц с внутренней структурой [4, 5]. В [4, 6] предложено использовать обобщенные группы Пуанкаре для описания физических систем с переменной массой и спином. Для решения многих задач важно знать подгрупповую структуру группы симметрии, допускаемой физической системой.

Описание подгрупповой структуры группы $P(2,n)$ необходимо для исследования инвариантных решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \Box u = 0,$$

а также уравнения [7]

$$i\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{l}\Box\varphi(t,x),$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \nabla^2$ — оператор Даламбера, $x = (x_2, \dots, x_{n+2})$ — точка в пространстве Минковского $M(1,n)$, l — постоянная величина.

В данной работе для произвольного $n \geq 2$ изучается подгрупповая структура группы $P(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Поскольку классификация непрерывных подгрупп группы $P(2,n)$ сводится к классификации подалгебр алгебры Ли $AP(2,n)$ группы $P(2,n)$, то мы исследуем подалгебры алгебры $AP(2,n)$ относительно $P(2,n)$-сопряженности. Полученные результаты являются дальнейшим развитием на случай алгебры $AP(2,n)$ идей работы [8], в которой предложен общий метод классификации относительно определенной сопряженности подалгебр конечно мерных алгебр Ли с нетривиальным абелевым идеалом.

Препринт 85.89, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 50 с.

Дадим кратную характеристику работы. В § 1 описаны максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$, а в § 2 найдены в явном виде максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$. Число этих подалгебр равно 3 при четном n и 4 при нечетном n.

§ 3 посвящен изучению вполне приводимых подалгебр алгебры $AO(2,n)$. На основании полученных результатов проблема классификации подалгебр алгебры $AP(2,n)$ с вполне приводимыми проекциями на $AO(2,n)$ сводится к классификации относительно $O(q,k)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(q,k)$ ($q=0,1,2$; $k=2,\ldots,n$).

В § 4 — § 6 проведена частичная классификация подалгебр алгебры $AP(2,3)$. Отметим как законченное исследование классификацию относительно $P(2,2)$-сопряженности подалгебр алгебры $AP(2,2)$, содержащуюся в § 5, § 6.

§ 1. Максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$

Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle Y_1,\ldots,Y_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1,\ldots,Y_s$; R^m — m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U=U_{2,n}$ — $2+n$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3-\cdots-x_{n+2}y_{n+2}; \tag{1.1}$$

$O(2,n)$ — группа линейных преобразований U, сохраняющих (X,X) для каждого $X\in U$. Будем предполагать, что $O(2,n)$ реализована в виде вещественных матриц порядка $2+n$.

Группой Пуанкаре $P(2,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta\in O(2,n)$, $Y\in R^{n+2}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Используя определение алгебры Ли, легко получить, что $AO(2,n)$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix}
0 & \alpha & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\
-\alpha & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\
\beta_1 & \gamma_1 & 0 & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1,n-1} & \delta_{1n} \\
\beta_2 & \gamma_2 & -\delta_{12} & 0 & \cdots & \delta_{2,n-1} & \delta_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
\beta_{n-1} & \gamma_{n-1} & -\delta_{1,n-1} & -\delta_{2,n-1} & \cdots & 0 & \delta_{n-1,n} \\
\beta_n & \gamma_n & -\delta_{1n} & -\delta_{2n} & \cdots & -\delta_{n-1,n} & 0
\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть E_{ik} — матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах ($i,k=1,2,\ldots,n+3$). Нетрудно получить, что базис алгебры $AP(2,n)$ образуют матрицы: $J_{12}=E_{12}-E_{21}$; $J_{ab}=-E_{ab}+E_{ba}$ ($a<b$; $a,b=3,\ldots,n+2$); $J_{ia}=-E_{ia}-E_{ai}$ ($i=1,2$; $a=3,\ldots,n+2$); $P_j=E_{j,n+3}$ ($j=1,2,\ldots,n+2$). Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}
[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}, \\
[P_\alpha,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha}=-J_{\alpha\beta}, \qquad [P_\alpha,P_\beta]=0,
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \cdots = -g_{n+2,n+2} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+2$).

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(2,n)$, а генераторы трансляций P_α — коммутативный идеал N, причем $AP(2,n) = N \mathbin{+\!\!\!\supset} AO(2,n)$. Легко видеть, что $[X,Y] = X \cdot Y$ для любых $X \in AO(2,n)$, $Y \in N$. Отождествим N и $U_{2,n}$, сопоставив P_i $n+2$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и с нулями на остальных местах ($i = 1, 2, \ldots, n+2$).

Пусть C — такая матрица порядка $n+3$ над R, что отображение $\varphi_C : X \to CXC^{-1}$ является автоморфизмом $AP(2,n)$. Если $C \in G$, где G — подгруппа группы $P(2,n)$, то φ_c называется G-автоморфизмом. Подалгебра L_1 и подалгебра L_2 алгебры $AP(2,n)$ будут называться $P(2,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(L_1) = L_2$ для некоторого $P(2,n)$-автоморфизма φ_C алгебры $AP(2,n)$.

Пусть W — невырожденное подпространство пространства U. Если F — подалгебра $AO(W)$, то тождественное отображение F является представлением F в $AO(W)$, ($O(W)$ — группа изометрий пространства W). Это представление будем называть тривиальным. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Подалгебра $F \subset AO(W)$ называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

Определение. *Пусть W — подпространство пространства U. Нормализатором W в $AO(2,n)$ называется множество*

$$\mathrm{Nor}\, W = \{X \in AO(2,n) \mid (\forall\, Y \in W)\ (X \cdot Y \in W)\}.$$

Лемма 1.1. *Нормализатор $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ в $AO(2,n)$ совпадает с алгеброй*

$$A\tilde{P}(1,n-1) = \langle G_2, \ldots, G_{n+1}\rangle \mathbin{+\!\!\!\supset} (AO(1,n-1) \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle),$$

где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ ($a = 2, \ldots, n+1$), $AO(1,n-1) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2, \ldots, n+1\rangle$. Базисные элементы алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ связаны такими коммутационными соотношениями:

$$[G_a, J_{1,n+1}] = G_a, \quad [J_{ab}, J_{1,n+2}] = [G_a, G_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b,$$
$$[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac} \quad (a,b,c,d = 2, \ldots, n+1).$$

Доказательство. Необходимо найти все матрицы X вида (1.2), для которых

$$X \cdot (P_1 + P_{n+2}) = \lambda(P_1 + P_{n+2}). \tag{1.4}$$

Непосредственными вычислениями получаем, что $\alpha = \gamma_n$, $\beta_i = -\delta_{in}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). Значит, $\mathrm{Nor}\,\langle P_1 + P_{n+2}\rangle = A\tilde{P}(1,n-1)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Если $W = \langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$, то* Nor W *совпадает с алгеброй $AOpt(1,n-1) = \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n\rangle \mathbin{+\!\!\!\supset} (AO(n-2) \oplus \langle C, \mathbb{D}, T, J_{1,n+2}\rangle)$, где*

$$G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}, \qquad H_a = J_{2a} - J_{a,n+1} \quad (a = 3, \ldots, n),$$
$$M = (J_{21} - J_{1,n+1}) + (J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}),$$
$$AO(n-2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 3, \ldots, n\rangle,$$
$$C = -J_{1,n+2} + J_{2,n+1}, \qquad \mathbb{D} = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{n+1,n+2} + J_{1,n+1} + J_{2,n+2}),$$
$$T = \tfrac{1}{2}(J_{1,n+1} + J_{2,n+2} - J_{12} - J_{n+1,n+2}).$$

Базисные элементы связаны следующими коммутационными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&[H_a, G_a] = M,\ [H_a, M] = [G_a, M] = [H_a, H_b] = [G_a, G_b] = [M, J_{ab}] = 0,\\
&[M, J_{1,n+2}] = M,\ [G_a, J_{1,n+2}] = G_a,\ [H_a, J_{1,n+2}] = [J_{ab}, J_{1,n+2}] = 0,\\
&[M, C] = [M, \mathbb{D}] = [M, T] = 0,\ [C, G_a] = G_a,\ [C, H_a] = -H_a,\\
&[\mathbb{D}, G_a] = -H_a,\ [\mathbb{D}, H_a] = [T, G_a] = 0,\ [T, H_a] = -G_a,\ [C, \mathbb{D}] = -2\mathbb{D},\\
&[C, T] = 2T,\ [T, \mathbb{D}] = C,\ [C, J_{1,n+2}] = 0,\ [\mathbb{D}, J_{1,n+2}] = -\mathbb{D},\ [T, J_{1,n+2}] = T.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Доказательство. Найдем все такие матрицы X вида (1.2), для которых $[X, W] \subset W$. Пусть $X \cdot (\mu(P_1 + P_{n+2}) + \rho(P_2 + P_{n+1})) \in W$. Тогда

$$
\mu \begin{pmatrix} \beta_1 + \delta_{1n} \\ \beta_2 + \delta_{2n} \\ \vdots \\ \beta_{n-2} + \delta_{n-2,n} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \gamma_1 + \delta_{1,n-1} \\ \gamma_2 + \delta_{2,n-1} \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} + \delta_{n-2,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha\rho + \beta_{n-1}\rho + \beta_n\mu = \beta_n\mu + \gamma_n\rho - \delta_{n-1,n}\rho,\\
&-\alpha\mu + \gamma_{n-1}\rho + \gamma_n\mu = \beta_{n-1}\mu + \gamma_{n-1}\rho + \delta_{n-1,n}\mu.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Решаем систему уравнений (1.6). Пусть $\mu = 0$, $\rho = 1$. Тогда $\delta_{i,n-1} = -\gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$. Если $\mu = 1$, $\rho = 0$, то $\delta_{in} = -\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$. Отсюда вытекает, что $G_a, H_a \in \mathrm{Nor}\ W$ $(a = 3, \ldots, n)$. Систему (1.7) можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\alpha\rho + \beta_{n-1}\rho = \gamma_n\rho - \delta_{n-1,n}\rho,\\
&-\alpha\mu + \gamma_n\mu = \beta_{n-1}\mu + \delta_{n-1,n}\mu.
\end{aligned}
$$

Поскольку μ и ρ могут быть ненулевыми, то

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta_{n-1} = \gamma_n - \delta_{n-1,n},\\
&-\alpha + \gamma_n = \beta_{n-1} + \delta_{n-1,n}.
\end{aligned}
$$

Отсюда находим, что $\delta_{n-1,n} = \gamma_n - \beta_{n-1} - \alpha$. Но тогда $\mathrm{Nor}\ W$ содержит

$$
\begin{aligned}
&\alpha J_{12} - \beta_{n-1}J_{1,n+1} - \gamma_n J_{2,n+2} + (\alpha + \beta_{n-1} - \gamma_n)J_{n+1,n+2} =\\
&\quad = \alpha(J_{12} + J_{n+1,n+2}) - \beta_{n-1}(J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}) - \gamma_n(J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}),
\end{aligned}
$$

для произвольных α, β_{n-1}, γ_n. Это значит, что $\mathrm{Nor}\ W$ содержит генераторы $Y_1 = J_{12} + J_{n+1,n+2}$, $Y_2 = J_{1,n+1} - J_{n+1,n+2}$, $Y_3 = J_{2,n+2} - J_{n+2,n+1}$. На элементы β_n, γ_{n-1} матрицы X не налагается никаких ограничений. Следовательно, $\mathrm{Nor}\ W$ содержит также генераторы $Y_4 = J_{1,n+2}$, $Y_5 = J_{2,n+1}$. По той же причине $J_{ab} \in \mathrm{Nor}\ W$ для $a, b = 3, \ldots, n$. Очевидно, $C = -Y_4 + Y_5$, $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3)$, $T = \frac{1}{2}(Y_2 + Y_3 - Y_1)$, $M = -Y_1 - Y_2 + Y_3$, $J_{2,n+1} = C + Y_4$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (1.5). Лемма доказана.

Теорема 1.1. *Максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2, n)$ исчерпываются относительно $O(2, n)$ сопряженности такими алгебрами:*

1) $A\tilde{P}(1, n-1)$;

2) $AOpt(1, n-1)$;

3) $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$, *где* $AO_1(1,k) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,3,\ldots,k+2\rangle$, $AO_2(1,n-k) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,k+3,\ldots,n+2\rangle$ $(k = 2,\ldots,[n/2];\ n \geq 4)$;

4) $AO_1(1,n)$;

5) $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$, *где* $AO_3(n-k) = \langle J_{ab} \mid a,b = k+3,\ldots,n+2\rangle$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$.

Доказательство. Пусть F — подалгебра алгебры $AO(2,n)$, U_1 — ненулевое подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U_1 — вырожденное пространство, то оно содержит F-инвариантное изотропное подпространство, сопряженное $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ или $\langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$. На основании лемм 1.1, 1.2 заключаем, что алгебра F $O(2,n)$-сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ или алгебры $AOpt(1,n-1)$.

Если U_1 — невырожденное пространство, то $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$, а потому в силу теоремы Витта нормализатор U_1 в $AO(2,n)$ сопряжен одной из алгебр: $AO_1(1,n)$; $AO_1(1,k) \oplus AO_2(1,n-k)$, $k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$ $(n \geq 4)$; $AO(2,k) \oplus AO_3(n-k)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Теорема доказана.

Отметим, что подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,3)$ классифицированы в [9], подалгебры алгебры $AO(2,3)$ в [10], а подалгебры алгебры $AOpt(1,3)$ в [11]. Содержание работ [9–11] дает почти полное решение задачи об описании относительно $O(2,4)$-сопряженности подалгебр алгебры $AO(2,4)$.

На основании теоремы 1.1 максимальные подалгебры алгебры $AP(2,n)$ исчерпываются относительно $P(2,n)$-сопряженности такими алгебрами:

1) $U \niplus F$, где F — неприводимая максимальная подалгебра алгебры $AO(2,n)$;

2) $A\tilde{G}(1,n-1) \niplus \langle J_{1,n+2}\rangle$, где $A\tilde{G}(1,n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом $P_1, P_1 + P_{n+2}, G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{ab}$ $(a,b = 2,\ldots,n+1)$;

3) $U \niplus AOpt(1,n-1)$;

4) $AP_1(1,k) \oplus AP_2(1,n-k)$, где $AP_1(1,k) = \langle P_1, P_3, \ldots, P_{k+2}\rangle \niplus AO_1(1,k)$, $AP_2(1,n-k) = \langle P_2, P_{k+3}, \ldots, P_{n+2}\rangle \niplus AO_2(1,n-k)$ $(k = 2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right], n \geq 4)$;

5) $AP(2,k) \oplus AP_3(n-k)$, где $AP_3(n-k) = \langle P_{k+3},\ldots,P_{n+2}\rangle \niplus AO_3(n-k)$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$.

§ 2. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$

Пусть B — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$. Так как неприводимые комплексные представления алгебры B одномерны, то степени неприводимых вещественных представлений алгебры B не превышают 2. Алгебра B — это алгебра некоторых линейных преобразований пространства $U = \langle P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}, P_{n+2}\rangle$. Если все неприводимые 6-инвариантные подпространства пространства U невырождены, то

$$B = \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{2k-1,2k}\rangle, \tag{2.1}$$

где $k = \left[\frac{n+2}{2}\right]$. Если существует изотропное B-инвариантное подпространство пространства U, то B сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$ или алгебры $AOpt(1,n-1)$.

Пусть B — подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n-1)$. Если $n-1$ — нечетное число, то $AO(1,n-1)$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle J_{2,n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}\rangle.$$

Следовательно, если n — четное число, то B сопряжена алгебре

$$\langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, J_{1,n+2}, J_{2,n+1} \rangle, \tag{2.2}$$

где $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$ $(a = 2, 3, \ldots, n+1)$.

Если $n-1$ — четное число, то $AO(1, n-1)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\langle J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1} \rangle, \quad \langle H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, J_{2,n+1} \rangle,$$

где $H_a = J_{2a} - J_{a,n+1}$ $(a = 3, \ldots, n)$. Следовательно, если n — нечетное число, то B сопряжена одной из алгебр:

$$\begin{gathered} \langle G_2, \ldots, G_{n+1}, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, J_{2,n+1}, J_{1,n+2} \rangle, \\ \langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1}, J_{1,n+2} \rangle. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Теперь рассмотрим случай, когда B — подалгебра алгебры $AOpt(1, n-1) = \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n \rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-2) \oplus \langle C, \mathbb{D}, T, J_{1,n+2} \rangle)$, где $AO(n-2) = \langle J_{ab} \mid a, b = 3, \ldots, n \rangle$. Алгебра $AO(n-2)$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m} \rangle, \quad m = \left[\frac{n}{2} \right].$$

Алгебра $\langle C, \mathbb{D}, T \rangle$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами: $\langle C, \mathbb{D} \rangle$, $\langle \mathbb{D} - T \rangle$. Отсюда вытекает, что $AOpt(1, n-1)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\begin{gathered} \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2} \rangle, \\ \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{2m-1,2m}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2} \rangle. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Если n — четное число, то алгебра $AO(2, n)$ обладает относительно $O(2, n)$-сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами:*

$$\begin{gathered} \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n+1,n+2} \rangle; \\ \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2} \rangle; \\ \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-1,n}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2} \rangle. \end{gathered}$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+2}{2}$, $\frac{5n-2}{2}$, $\frac{5n-4}{2}$.

Если n — нечетное число, то алгебра $AO(2, n)$ обладает относительно $O(2, n)$-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\begin{gathered} \langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n,n+1} \rangle; \quad \langle G_2, \ldots, G_{n+1}, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n,n+1}, J_{1,n+2} \rangle; \\ \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, C, \mathbb{D}, J_{1,n+2} \rangle; \\ \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n, J_{34}, J_{56}, \ldots, J_{n-2,n-1}, \mathbb{D} - T, J_{1,n+2} \rangle. \end{gathered}$$

Их размерности равны соответственно $\frac{n+1}{2}$, $\frac{3n+1}{2}$, $\frac{5n-3}{2}$, $\frac{5n-5}{2}$.

Доказательство. Пусть n — четное число. В результате проведенных ранее рассуждений, мы получили четыре разрешимые подалгебры (2.1), (2.2), (2.4) алгебры $AO(2, n)$, среди которых находятся все максимальные разрешимые подалгебры. Первая из полученных алгебр не сохраняет изотропное пространство, две последние являются подалгебрами оптической алгебры $AOpt(1,n-1)$, а потому эти алгебры попарно не сопряжены. Так как $[G_2, P_2+P_{n+1}] = P_1+P_{n+2}$, $[G_{n+1}, P_2+P_{n+1}] = -(P_1+P_{n+2})$, то алгебра (2.2) принадлежит $AOpt(1,n-1)$, и, следовательно, не является максимальной разрешимой подалгеброй.

Аналогично рассуждаем и в случае нечетного n. Теорема доказана.

Отметим, что в [12] предложен алгоритм, сводящий проблему классификации максимальных разрешимых подалгебр алгебры $AO(p,q)$ к аналогичной проблеме для алгебр $AO(p-1,q-1)$, $AO(p-2,q-2)$. Используемая в [12] матричная реализация алгебры $AO(p,q)$ отличается от реализации, принятой в нашей работе.

На основании свойств разрешимых алгебр получаем, что максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(2,n)$ исчерпываются относительно $P(2,n)$-сопряженности алгебрами $U \subset\!\!\!\!+ \ B$, где B — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$.

§ 3. Вполне приводимые подалгебры алгебры $AO(2,n)$

Пусть F — ненулевая вполне приводимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$, обладающая тем свойством, что из $GL(2+n,R)$-эквивалентности неприводимых подпредставлений тривиального представления F вытекает их $O(2,n)$-эквивалентность. Будем также предполагать, что если существуют F-инвариантные изотропные подпространства пространства U, то они необходимо аннулируются алгеброй F.

Пусть Γ — тривиальное представление алгебры F. Тогда

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_m,$$

где Γ_i — неприводимое представление F в $AO(W_i)$ $(i=1,\ldots,m)$. Положим $F_i = \{\Gamma_i(X) \mid X \in F\}$.

Тогда F_i — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W_i)$. Если $F_i \neq 0$, то алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Очевидно, алгебра F является подпрямой суммой своих неприводимых частей. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления представления Γ, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры F, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F. Если F совпадает со своей примарной частью, то F называется примарной алгеброй.

Отметим , что все подалгебры алгебры $AO(n)$ являются вполне приводимыми и удовлетворяют сформулированным выше ограничениям. Введенные понятия можно распространить и на алгебры $AO(p,q)$ для произвольных p, q.

Теорема 3.1. *Если $p+q \geq 3$ и одно из чисел p, q является нечетным, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(p,q)$ является полупростой и некомпактной.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(p,q)$. Тогда $F = Z(F) \oplus Q$, где $Z(F)$ — центр, а Q — фактор Леви [13]. Если F — абсолютно неприводимая алгебра, то по лемме Шура существует такая невырожденная матрица B порядка $p+q$ комплексными коэффициентами, что для каждого $X \in Z(F)$ имеет место равенство $B^{-1}XB = \lambda E$ $(\lambda \in C)$. Так как след матрицы X равен 0, то $\lambda = 0$. Значит, $Z(F) = 0$.

Предположим, что F не является абсолютно неприводимой алгеброй. Существует такая матрица B с комплексными коэффициентами, что для каждого F

$$B^{-1}XB = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \bar{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\Delta}$ — матрица, комплексно-сопряженная к матрице Δ. Поскольку Δ, $\bar{\Delta}$ — неприводимые комплексные представления алгебры F, то силу леммы Шура и условия $\mathrm{tr}\, X = 0$ имеем

$$B^{-1}Z(F)B \subset \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda E & 0 \\ 0 & -i\lambda E \end{pmatrix} \middle| \lambda \in R \right\}.$$

Отсюда вытекает, что $\dim Z(F) \leq 1$ и что квадрат ненулевой матрицы из $Z(F)$ совпадает с матрицей $-\lambda^2 E$, где $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$.

Если $X \in AO(p,q)$ и $X^2 = -E$, то X сопряжена матрице $\mathrm{diag}\,(J, J, \ldots, J)$, где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен матрицы X совпадает с $(x^2 + 1)^k$. С другой стороны, поскольку одно из чисел p, q является нечетным, то $\mathrm{ad}\, X$ обладает в $U_{p,q}$ одномерным инвариантным изотропным подпространством (каждое инвариантное пространство типа $(+,-)$ содержит изотропное инвариантное подпространство). Но тогда характеристический многочлен матрицы X делится на $x - \lambda$ ($\lambda \in R$). Противоречие. Следовательно, $Z(F) = 0$, т.е. F — полупростая алгебра.

Допустим, что F — компактная алгебра. Тогда существует такая симметрическая матрица $C \in GL(p+q, R)$, что $C^{-1}FC \subset AO(p+q)$. Так как $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1} \exp F \cdot C$, то в $O(p+q)$ существует неприводимая группа, сохраняющая одновременно $x_1^2 + \cdots + x_{p+q}^2$ и $\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \lambda_p^2 x_p^2 - \lambda_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q}^2 x_{p+q}^2$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_{p+q}$ — ненулевые вещественные числа).

Полученное противоречие заканчивает доказательство теоремы.

Замечание 3.1. При доказательстве теоремы 3.1 мы установили, что если неприводимая подалгебра F алгебры $AO(p,q)$, $p, q \geq 1$, $p + q \geq 3$, является полупростая, то F — некомпактная алгебра.

Предложение 3.1. *Если $m \geq 3$, то фактор Лови неприводимой подалгебры F алгебры $AO(2,m)$ является некомпактной алгеброй и аннулирует в пространстве $U_{2,m}$ только нулевое подпространство.*

Доказательство. На основании замечания 3.1 можно предполагать, что F не является полупростой алгеброй. Пусть $F = Q \oplus Z(F)$, где Q — фактор Леви, а $Z(F)$ — центр. Если $X \in Q$, $J \in Z(F)$, $Y \in U_{2,m}$, то в силу тождества Якоби $[X,[J,Y]] + [J,[Y,X]] + [Y,[X,J]] = 0$. При $[X,Y] = 0$ получаем, что $[X,[J,Y]] = 0$. Поэтому пространство $W = \{Y \in U_{2,m} \mid [Q,Y] = 0\}$ инвариантно относительно $Z(F)$, а значит, и относительно F. В силу неприводимости алгебры F заключаем, что $W = 0$. Это значит, что Q аннулирует в $U_{2,m}$ только нулевое подпространство.

На основании замечания 3.1 будем предполагать, что Q — приводимая алгебра. Тогда некоторая ее неприводимая часть Q_1 является полупростой неприводимой подалгеброй алгебры $AO(p,q)$, где $1 \leq p \leq 2$, $q \geq 1$ и $q > 1$ при $p = 1$. В силу замечания 3.1 Q_1 — некомпактная алгебра. Поскольку подалгебра компактной алгебры является компактной, то Q — некомпактная алгебра. Предложение доказано.

Теорема 3.2. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части подалгебры F алгебры $AO(2,n)$, V — подпространство пространства $U_{2,n}$, инвариантное относительно F. Тогда $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$, где $V_i = [K_i, V_i] = [K_i, V]$, $[K_j, V_i] = 0$ при $j \neq i$ $(i,j = 1,2,\ldots,q)$, $\tilde{V} = \{X \in V \mid [F,X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых некоммутативных подалгебр $S_1, S_2, \ldots, S_r$ соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$, то относительно $O(2,n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства $U_{2,n}$ с условием $[K,W] = W$ исчерпываются пространствами: W_1, $W_1 \oplus W_2$, …, $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Если $K = \langle J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2s-1,2s} \rangle$, то относительно $O(2,n)$-сопряженности ненулевые подпространства W пространства $U_{2,n}$ с условием $[K,W] = W$ исчерпываются пространствами: W_1^2, W_3^4, W_1^4, W_3^6, …, W_1^{2s-2}, W_3^{2s}, W_1^{2s}, $W_1^4(\lambda)$, $W_1^4(\lambda) \oplus W_5^6$, …, $W_1^4(\lambda) \oplus W_5^{2s}(\lambda)$, где $W_a^l = \langle P_a, \ldots, P_l \rangle$, $W_1^4(\lambda) = \langle P_1 + \lambda P_3, P_2 + \lambda P_4 \rangle$ $(\lambda > 0)$.

Доказательство. Разложение $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$ является следствием теоремы 3.1, предложения 3.1 и теоремы Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр Ли.

Пусть $[K,W] = W$, где K — некоммутативная примарная подалгебра алгебры $AO(2,n)$, W — подпространство пространства $U_{2,n}$. В силу полной приводимости алгебры K пространство W является прямой суммой неприводимых K-подпространств $W_1', \ldots, W_r'$, каждое из которых невырождено. Так как разложение тривиального представления алгебры K в сумму неприводимых представлений однозначно с точностью до $O(2,n)$-эквивалентности, то на основании теоремы Витта можно предполагать, что $W_1' = W_1$, …, $W_r' = W_r$. Теорема доказана.

Пусть π — проектирование алгебры $AP(2,n)$ на $AO(2,n)$, F — подалгебра $AO(2,n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $AP(2,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. Если алгебра $\hat{F}$ $P(2,n)$-сопряжена алгебре $W \niplus F$, где W есть F-инвариантное подпространство пространства $U_{2,n}$, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $AP(2,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F} \subset AP(2,n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F}) = F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(2,n)$.

Предложение 3.2. *Вполне приводимая подалгебра F алгебры $AO(2,n)$, не имеющая в $U_{2,n}$ изотропных инвариантных подпространств, обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $AP(2,n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или не сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(1,n)$, $AO(2,n-1)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Вследствие полной приводимости алгебры F можно предполагать, что F — неприводимая неполупростая подалгебра алгебры $AO(W)$, где W — невырожденное подпространство пространства $U_{2,n}$.

Пусть $F = Q \oplus T$, где Q — фактор Леви, а T — центр. Согласно теореме Витта $AO(W)$ — сопряжена $AO(2,2k)$ или $AO(2k)$, а потому можно считать, что $T = \langle J \rangle$, где $J = J_{12} + J_{34} + \cdots + J_{2k+1,2k+2}$ или $J = J_{34} + \cdots + J_{2k+1,2k+2}$. Если $\hat{F}$ содержит $J + Y$, где $Y \in W$, $Y \neq 0$, то $\hat{F}$ содержит $[Q,Y]$. В силу предложения 3.1

$W \subset \hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Предложение доказано.

§ 4. Подалгебры алгебры $AP(2,3)$

На основании теоремы 1.1 максимальные приводимые подалгебры алгебры $AO(2,3)$ исчерпываются относительно $O(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:

$AO(1,3) = \langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4,5\rangle$;

$AO(2) \oplus AO(3) = \langle J_{12}\rangle \oplus \langle J_{ab} \mid a,b = 3,4,5\rangle$;

$AO(2,2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3,4\rangle$;

$AO(2,1) \oplus AO(2) = \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3\rangle \oplus \langle J_{45}\rangle$;

$ASim(1,2) = \langle H_2, H_3, H_4\rangle \subset\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4\rangle \oplus \langle J_{15}\rangle)$, где $H_a = J_{1a} - J_{a5}$ $(a = 2,3,4)$;

$AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3\rangle \subset\!\!\!+ \langle C, \mathbb{D}, T, J_{15}\rangle$, где $G_3 = J_{13} - J_{35}$, $H_3 = J_{23} - J_{34}$, $M = J_{21} - J_{14} + J_{25} - J_{54}$, $C = -J_{15} + J_{24}$, $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(J_{12} + J_{25} + J_{14} + J_{45})$, $T = -\frac{1}{2}(J_{12} - J_{25}) + \frac{1}{2}(J_{14} - J_{45})$.

Пусть $K_1 = J_{25} + J_{14} + \sqrt{3}J_{13}$, $K_2 = -J_{15} + J_{24} - \sqrt{3}J_{23}$, $K_3 = -2J_{45} + J_{12}$. Тогда $[K_1, K_2] = -K_3$, $[K_1, K_3] = -K_2$, $[K_2, K_3] = K_1$. Следовательно $\langle K_1, K_2, K_3\rangle = AO(1,2)$. Как показано в [10], неприводимые подалгебры алгебры $AO(2,3)$ исчерпываются $\langle K_1, K_2, K_3\rangle$ и $AO(2,3)$.

Таким образом, описание подалгебр алгебр $AP(2,3)$ сводится к описанию относительно $P(2,3)$-сопряженности подалгебр таких алгебр:

1) $AP(1,3) \oplus \langle P_1\rangle$, где $AP(1,3) = \langle P_2, P_3, P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!+ \langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4,5\rangle$;

2) $AE(2) \oplus AE(3)$;

3) $AP(2,2) \oplus \langle P_5\rangle$;

4) $AP(2,1) \oplus AE(2)$, где $AP(2,1) = \langle P_1, P_2, P_3\rangle \subset\!\!\!+ \langle J_{ab} \mid a,b = 1,2,3\rangle$, а $AE(2) = \langle P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!+ \langle J_{45}\rangle$;

5) $A\tilde{G}(1,2) \subset\!\!\!+ \langle J_{15}\rangle$, где $A\tilde{G}(1,2) = \langle M, P_1, P_2, P_3, P_4, H_2, H_3, H_4\rangle \subset\!\!\!+ (\langle J_{ab} \mid a,b = 2,3,4\rangle \oplus \langle J_{15}\rangle)$, $M = P_1 + P_5$;

6) $\langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle \subset\!\!\!+ AOpt(1,2)$, где $AOpt(1,2) = \langle M, G_3, H_3, C, \mathbb{D}, T, J_{15}\rangle$.

Подалгебры алгебры $AP(1,3)$ классифицированы в [8, 14–16], подалгебры $AE(3)$ — в [17]. В этом параграфе мы описываем подалгебры алгебр $AE(2) \oplus AE(3)$, $AP(2,1) \oplus AE(2)$, $AP(1,3) \oplus \langle P_1\rangle$, $A\tilde{G}(1,2) \subset\!\!\!+ \langle J_{15}\rangle$. Подалгебры алгебры $AP(2,2)$ будут классифицированы в § 5, § 6. Описание подалгебр алгебры $AP(2,3)$ опирается на результаты § 3. Поскольку $AO(2,2) = AO(2,1) \oplus AO(1,2)$, то в случае алгебры $AP(2,2)$ кроме результатов § 3 будут использованы дополнительные вспомогательные утверждения, упрощающие процедуру нахождения инвариантных подпространств.

В дальнейшем пространство, порожденное $P_{a_1}, \ldots, P_{a_s}$ будем обозначать $(a_1, \ldots, a_s)$. Если среди базисных векторов имеется вектор $P_a + wP_b$, то вместо него будем употреблять символ awb $(w \neq 0)$; при $w = 1$ будем писать ab, а при $w = -1$ — $\overline{ab}$. Если речь идет об алгебрах $W_1 \subset\!\!\!+ F$, …, $W_s \subset\!\!\!+ F$, то будем употреблять обозначение $F : W_1, \ldots, W_s$. Наличие m в символе $F(m)$ указывает, что алгебра F имеет размерность m. Нижние индексы служат для нумерации факторалгебр и инвариантных пространств.

Предложение 4.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AE(2) \oplus AE(3)$ исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

O, (15), (1), (5), (1,2), (1,5), (3,5), (15,2), (15,3), (15,24), (1,2,5), (1,3,5), (15,2,3), (15,3,4), (15,24,3), (3,4,5), (15,2,3,4), (1,2,3,5), (1,3,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}\rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (3,4,5), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{45}\rangle$: O, (1), (3), (13), (1,2), (1,3), (13,2), (4,5), (1,2,3), (1,4,5), (3,4,5), (13,4,5), (1,2,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}+\alpha J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), (1,2,3), (3,4,5), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$, $\alpha\neq 1$);

$\langle J_{12}+J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), (1α4,2α5), (1,2,3), (3,4,5), (3,1α4,2α5), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$);

$\langle J_{12},J_{45}\rangle$: O, (3), (1,2), (4,5), (1,2,3), (3,4,5), (1,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34},J_{35},J_{45}\rangle$: O, (1), (1,2), (3,4,5), (1,3,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{34},J_{35},J_{45}\rangle$: O, (1,2), (3,4,5), (1,2,3,4,5).

Предложение 4.2. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$ исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12}+aP_5\rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (1,2,3), (1,2,3,4) ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1), (1,2), (4,5), (1,4,5) (1,2,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+P_3\rangle$: (13), (13,2), (13,4,5), (13,2,4,5);

$\langle J_{45}+aP_1\rangle$: O, (3), (4,5), (3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+P_2+P_3\rangle$: O, (1), (4,5), (1,4,5);

$\langle J_{45}+aP_2+P_3\rangle$: (13), (13,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_2\rangle$: (1), (13), (1,3), (1,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}+J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), (1α4,2α5), (1,2,4,5) ($a>0$, $\alpha\neq 0$);

$\langle J_{12}+\alpha J_{45}+aP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), (1,2,4,5) ($\alpha>0$, $\alpha\neq 1$, $a>0$);

$\langle J_{12}+aP_3,J_{45}+bP_3\rangle$: O, (1,2), (4,5), (1,2,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$).

Предложение 4.3. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,1)\oplus AE(2)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$, исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{13}\rangle$: O, (13), (2), (4), (24), (2,4), (1,3), (4,5), (24,5), (13,2), (13,4), (13,24), (13,2,4), (13,4,5), (13,24,5), (2,4,5), (1,2,3), (1,3,4), (24,1,3), (1,2,3,4), (1,3,4,5), (1,24,3,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23}\rangle$: O, (13), (4), (13,2), (13,4), (13,2w4), (4,5), (1,2,3), (13,2w4,5), (13,2,4), (13,4,5), (1,2,3,4), (13,2,4,5), (1.2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{13}+aJ_{45}\rangle$: O, (2), (13), (1,3), (4,5), (13,2), (1,2,3), (2,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13}\rangle$: O, (13), (4), (13,2), (13,4), (13,2w4), (4,5), (1,2,3), (13,2w4,5), (13,2,4), (13,4,5), (1,2,3,4), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13}+aJ_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{13},J_{45}\rangle$: O, (13), (2), (1,3), (13,2), (4,5), (1,2,3), (2,4,5), (13,4,5), (1,3,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (4), (4,5), (1,2,3), (1,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12}-J_{23},J_{13},J_{45}\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (1,2,3), (13,4,5), (13,2,4,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{45}\rangle$: O, (4,5), (1,2,3), (1,2.3,4,5).

Предложение 4.4. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,1)\oplus AE(2)$, не сопряженные подалгебрам алгебры $AE(2)\oplus AE(3)$, исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle J_{13}+aP_2\rangle$: O, (13), (4), (4,5), (13,4), (1,3), (13,4,5), (1,3,4), (1,3,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2\rangle$: (24), (24,5), (13,24), (13,24,5), (1,24,3), (1,24,3,5);

$\langle J_{13}+aP_4\rangle$: O, (13), (2), (13,2), (1,3), (1,2,3) ($a>0$);

$\langle J_{13}+aP_5\rangle$: (4), (24), (2,4), (13,4), (13,24), (13,2,4), (1,3,4), (1,24,3), (1,2,3,4) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2+P_4\rangle$: O, (13), (1,3);

$\langle J_{13}+P_2+aP_5\rangle$: (24), (13,24), (1,24,3) ($a>0$);

$\langle J_{13}+P_2+P_5\rangle$: (4), (13,4), (1,3,4);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3\rangle$: O, (13), (4), (13,4), (4,5), (13,2), (13,2w4), (13,2w4,5), (13,2,4), (13,4,5), (13,2,4,5) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_4\rangle$: O, (13), (13,2), (1,2,3);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4), (1,2,3,4) ($w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3+aP_4\rangle$: O, (13), (13,2) ($a>0$, $w\neq 0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+P_3+aP_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4) ($a>0$, $w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2\rangle$: (13), (13,4), (13,2$w$4), (13,2$w$4,5), (13,4,5) ($a>0$, $w>0$, $w\neq 1$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_4\rangle$: O, (13), (13,2), (1,2,3) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_5\rangle$: (4), (13,4), (13,2$w$4), (13,2,4), (1,2,3,4) ($a>0$, $w>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_4, P_1+P_3\rangle$ ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_5, P_1+P_3, P_4\rangle$ ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2+bP_5, P_1+P_3, P_2+wP_4\rangle$: ($a,b>0$, $w>0$);

$\langle J_{13}+aJ_{45}+bP_2\rangle$: O, (13), (1,3), (4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}+J_{45}+aP_3\rangle$: O, (13), (13,2), (4,5), (13,4,5), (13,2,4,5) ($a>0$);

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aJ_{45}+bP_2\rangle$: (13), (13,4,5) ($a>0$, $b>0$);

$\langle J_{13}+aP_2, J_{45}+bP_2\rangle$: O, (13), (1,3), (4,5), (13,4,5), (1,3,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$);

$\langle J_{45}+P_1+P_3, J_{12}-J_{23}+aP_3\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}, J_{12}-J_{23}+P_3\rangle$;

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3\rangle$ ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_2\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+P_3, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_2\rangle$;

$\langle J_{45}+P_1+P_3, J_{12}-J_{23}+aP_3, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}, J_{12}-J_{23}+P_3, P_4, P_5\rangle$;

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+aP_2, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_4, P_5\rangle$ ($a>0$);

$\langle J_{45}+aP_3, J_{12}-J_{23}+P_3, P_1+P_3, P_2, P_4, P_5\rangle$ ($a\geq 0$);

$\langle J_{45}+P_3, J_{12}-J_{23}, P_1+P_3, P_2, P_4, P_5\rangle$;

$\langle J_{12}-J_{23}, J_{13}+aP_2, J_{45}+bP_2\rangle$: (13), (13,4,5) ($a\geq 0$, $b\geq 0$, $a^2+b^2\neq 0$).

Предложение 4.5. *Пусть $G_a=J_{2a}-J_{a5}$ ($a=3,4$). Расщепляемые подалгебры алгебры $\langle P_1\rangle\oplus AP(1,3)$, не сопряженные подалгебрам алгебр $AE(2)\oplus AE(3)$, $AP(2,1)\oplus AE(2)$, исчерпываются относительно $P(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle G_3\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,14), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4), (1,2,3,5), (2,3,4,5), (14,2,3,5), (1,2,3,4,5) ($w>0$);

$\langle G_3, G_4\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1,3), (25,1w3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($w > 0$);

$\langle G_3, J_{25}\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,3), (25,14), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4), (1,2,3,5), (2,3,4,5), (2,3,14,5), (1,2,3,4,5) ($w > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1,3), (25,1w3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($w > 0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle G_3, G_4, J_{25} + \lambda J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5) ($\lambda > 0$);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$: O, (1), (5), (15), (1,5), (2,3,4), (1,2,3,4), (2,3,4,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle G_3, G_4, J_{25}, J_{34}\rangle$: O, (1), (25), (1,25), (25,3,4), (2,3,4,5), (25,1,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{25}, J_{34}, J_{35}, J_{45}\rangle$: O, (1), (2,3,4,5), (1,2,3,4,5).

Предложение 4.6. *Пусть $G_a = J_{2a} - J_{a5}$ ($a = 3, 4$). Нерасщепляемые подалгебры алгебры $\langle P_1\rangle \oplus AP(1,3)$, не сопряженные подалгебрам алгебр $AE(2) \oplus AE(3)$, $AP(2,1) \oplus AE(2)$, исчерпываются такими алгебрами:*

$\langle G_3 + P_1\rangle$: O, (25), (4), (14), (25,4), (25,14), (25,3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,3,4), (25,3,14), (2,3,4,5), (14,2,3,5) ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_4\rangle$: O, (25), (1), (25,1), (25,3), (25,1w3), (2,3,5), (25,1,3), (1,2,3,5) ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_5\rangle$: O, (25), (1), (4), (14), (25,1), (25,4), (1,4), (25,14), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (25,1w3,4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,3), (25,3,4), (25,1,4), (25,3,14), (25,1,3,4) ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_1 + P_4\rangle$: O, (25), (25,3), (2,3,5);

$\langle G_3 + P_1, G_4 + \mu P_4 + \rho P_1\rangle$ ($\mu \geq 0$, $\rho \geq 0$);

$\langle G_3, G_4 + P_4\rangle$; $\langle G_3, G_4 + P_4, P_1\rangle$;

$\langle G_3 + P_4 + \gamma P_1, G_4 - P_3 + \mu P_4 + \delta P_1, P_2 + P_5\rangle$ ($\mu \geq 0$, $\gamma > 0 \vee \gamma = 0$, $\delta \geq 0$);

$\langle G_3 + \gamma P_1, G_4 + P_4 + \delta P_1, P_2 + P_5\rangle$ ($\gamma > 0 \vee \gamma = 0$, $\delta \geq 0$);

$\langle G_3 + P_1, G_4, P_2 + P_5\rangle$;

$\langle G_3 + P_4, G_4 - P_3 + \mu P_4, P_2 + P_5, P_1\rangle$ ($\mu \geq 0$);

$\langle G_3, G_4 + P_4, P_2 + P_5, P_1\rangle$;

$\langle G_3 + \alpha P_4 + \beta P_1, G_4 + P_1, P_2 + P_5, P_3\rangle$ ($\alpha > 0 \vee \alpha = 0$, $\beta \geq 0$);

$\langle G_3 + \alpha P_4 + \beta P_1, G_4 + P_2, P_2 + P_5, P_3\rangle$ ($\alpha > 0 \vee \alpha = 0$, $\beta \geq 0$);

$\langle G_3 + P_4 + \beta P_1, G_4, P_2 + P_5, P_3\rangle$ ($\beta \geq 0$);

$\langle G_3 + P_1, G_4, P_2 + P_5, P_3\rangle$;

$\langle G_3 + \alpha P_4 + \beta P_1, G_4 + P_1, P_2 + P_5, P_1 + wP_3\rangle$ ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_4 + \beta P_1, G_4, P_2 + P_5, P_1 + wP_3\rangle$ ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_1, G_4, P_2 + P_5, P_1 + wP_3\rangle$ ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_1, G_4, P_2 + P_5, P_3, P_4\rangle$;

$\langle G_3 + P_2, G_4 + \beta P_1, P_2 + P_5, P_3, P_4\rangle$ ($\beta \geq 0$);

$\langle G_3 + P_4, G_4, P_2 + P_5, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_3 + P_4, G_4 + \alpha P_2, P_2 + P_5, P_1, P_3\rangle$ ($\alpha > 0$);

$\langle G_3, G_4 + P_2, P_2 + P_5, P_1, P_3\rangle$;

$\langle G_3, G_4 + P_1, P_2 + P_5, P_1 + wP_3, P_4\rangle$ ($w > 0$);

$\langle G_3 + P_2, G_4 + \alpha P_1, P_2 + P_5, P_1 + wP_3, P_4\rangle$ ($\alpha \geq 0$, $w > 0$);

$\langle G_3 + P_1, G_4, P_2, P_3, P_4, P_5\rangle$; $\langle G_3 + P_2, G_4, P_2 + P_5, P_1, P_3, P_4\rangle$;

$\langle G_3, J_{25}+\alpha P_1\rangle$: O, (25), (4), (25,4), (25,3), (25,1w3), (25,3w4), (25,314), (2,3,5), (25,1w3,4), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha>0$, $w>0$);

$\langle G_3, J_{25}+P_1\rangle$: (14), (25,14), (25,3,14), (2,3,5,14);

$\langle G_3, J_{25}+\alpha P_3\rangle$: (25), (25,1), (25,4), (25,14), (25,314), (25,3w4), (25,3w4,1), (25,34,14), (25,1,4) ($\alpha>0$, $w>0$);

$\langle G_3, J_{25}+\gamma P_4\rangle$: O, (25), (1), (25,1), (25,3), (25,1w3), (2,3,5), (25,1,3), (1,2,3,5) ($\gamma>0$, $w>0$);

$\langle G_3, J_{25}+\alpha P_1+\beta P_3\rangle$: (25), (25,4), (25,3$w$4), (25,314) ($\alpha>0$, $\beta>0$, $w>0$);

$\langle G_3, J_{25}+\alpha P_1+\beta P_3, P_2+P_5, P_1+P_3+P_4\rangle$ ($\alpha>0$, $\beta\neq 0$);

$\langle G_3, J_{25}+P_1+P_4\rangle$: O, (25), (25,3), (2,3,5);

$\langle G_3, J_{25}+\beta P_3+\gamma P_4\rangle$: (25), (25,1), (25,1$w$3) ($\beta,\gamma,w>0$);

$\langle G_3, J_{25}+P_1+\beta P_3, P_1+P_4, P_2+P_5\rangle$ ($\beta>0$);

$\langle G_3, J_{25}+P_1+P_4+\beta P_3, P_2+P_5\rangle$ ($\beta>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}+\alpha P_1\rangle$: O, (25), (25,3), (25,1w3), (25,3,4), (25,1w3,4), (2,3,4,5) ($\alpha>0$, $w>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}+\gamma P_4\rangle$: (25), (1,25), (25,3), (25,1w3), (25,1,3) ($\gamma>0$, $w>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}+\alpha P_1+\gamma P_4\rangle$: (25), (25,3), (25,1$w$3) ($\alpha>0$, $\gamma>0$, $w>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34}+P_2+P_5\rangle$: O, (1);

$\langle G_3, G_4, J_{34}+\alpha P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34}+\alpha P_1+P_2, P_3, P_4, P_2+P_5\rangle$ ($\alpha>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{34}+P_2\rangle$: (25,3,4), (1,25,3,4);

$\langle G_3, G_4, J_{34}+\alpha J_{25}+\gamma P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha>0$, $\gamma>0$);

$\langle G_3, G_4, J_{25}+\alpha P_1, J_{34}+\beta P_1\rangle$: O, (25), (25,3,4), (2,3,4,5) ($\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$).

Предложение 4.7. *Пусть $H_a=J_{1a}-J_{a5}$ ($a=2,3,4$), $ASim(1,2)=\langle H_2,H_3,H_4, J_{23},J_{24},J_{34},J_{15}\rangle$, π — проектирование $AP(2,3)$ на $AO(2,3)$. Расщепляемые подалгебры $\hat F$ алгебры $AP(2,3)$, для которых $\pi(\hat F)\subset ASim(1,2)$ и $\pi(\hat F)$ не сопряжена подалгебре ни одной из алгебр $AO(2)\oplus AO(3)$, $AO(1,3)$, $AO(2,1)\oplus AO(2)$, $AO(2,2)$, исчерпываются относительно $O(2,3)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{34}+H_2\rangle$: O, (15), (15,2), (3,4), (15,3,4), (1,2,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}+H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}+H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (2,4), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (1,3,5), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}+H_4, H_2+H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}+H_2-H_4, J_{24}+2J_{15}\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+\alpha J_{34}, H_2\rangle$: O, (15), (15,2), (3,4), (15,3,4), (1,2,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$);

$\langle H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2), (15,3), (15,4), (15,2,3), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}+H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{24}, H_3\rangle$: $\langle (P_1+P_5)+(P_2+P_4), P_2-P_4\rangle$, $\langle (P_1-P_5)+(P_2-P_4), P_1+P_5, P_3\rangle$, $\langle (P_1-P_5)+(P_2-P_4), P_1+P_5, P_2+P_4, P_3\rangle$;

$\langle J_{15}+\alpha J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,3), (15,24), (1,3,5), (15,24,3), (15,2,4), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($\alpha>0$);

$\langle J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,24), (15,3), (15,2,4), (1,3,5), (15,24,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}+H_3, H_2+H_4\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34}+H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+cJ_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,3), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($c\neq 0,\pm 1,-2$);

$\langle 2J_{15}+J_{24}, J_{23}-J_{34}+H_4, H_2+H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}+H_2+H_4, H_2-H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,3), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-2J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,2), (15,3), (15,4), (15,2,3), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}+H_3, H_2, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}+H_4, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_3\rangle$: O, (15), (24), (2,4), (15,24), (15,3), (15,2,4), (1,3,5), (15,24,3), (1,24,3,5), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,4), (15,24), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+bJ_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5) ($0<|b|<1$);

$\langle J_{15}+J_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}-J_{24}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+\frac{1}{2}J_{24}, J_{23}-J_{34}+H_2, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{24}+H_2, J_{23}-J_{34}, H_2+H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+bJ_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($b>0$);

$\langle J_{15}+bJ_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($b>0$);

$\langle J_{15}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,4), (15,24), (15,2,4), (15,3,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}-J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}+J_{23}-J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (24), (15,24), (15,$\overline{24}$), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,$\overline{24}$,3), (15,2,3,4), (1,24,3,5), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$: O, (15), (1,5), (2,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2 + H_4, H_3\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2), (15,3,4), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,3), (15,2,4), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} + aJ_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5) ($a \neq 0, \pm 1$);

$\langle J_{15} + J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15} - J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{24}, J_{23} - J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,24), (15,24,3), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{23}, J_{24}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5);

$\langle J_{15}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, H_2, H_3, H_4\rangle$: O, (15), (15,2,3,4), (1,2,3,4,5).

§ 5 Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$

Так как известны классификация подалгебр алгебры $AO(2,2)$ [10], то изучение расщепляемых подалгебр алгебры $AP(2,2)$ сводится к нахождению подпространств пространства трансляций, инвариантных относительно подалгебр алгебры $AO(2,2)$.

Пусть

$$\begin{aligned}
&B_1 = -\tfrac{1}{2}(J_{14} + J_{23}), \qquad B_2 = \tfrac{1}{2}(J_{24} - J_{13}), \qquad B_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} - J_{34}),\\
&C_1 = \tfrac{1}{2}(J_{14} - J_{23}), \qquad C_2 = -\tfrac{1}{2}(J_{13} + J_{24}), \qquad C_3 = \tfrac{1}{2}(J_{12} + J_{34}).
\end{aligned}$$

Легко получить, что имеют место такие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}
&[B_2, B_1] = B_3, \quad [B_3, B_1] = B_2, \quad [B_2, B_3] = B_1,\\
&[C_2, C_1] = C_3, \quad [C_3, C_1] = C_2, \quad [C_2, C_3] = C_1,\\
&[B_i, C_k] = 0 \quad (i, k = \overline{1,3}),\\
&[B_1, P_1] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_1, P_2] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [B_1, P_3] = \tfrac{1}{2}P_2, \quad [B_1, P_4] = \tfrac{1}{2}P_1,\\
&[B_2, P_1] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [B_2, P_2] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_2, P_3] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [B_2, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_2,\\
&[B_3, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_2, \quad [B_3, P_2] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [B_3, P_3] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [B_3, P_4] = \tfrac{1}{2}P_3,\\
&[C_1, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_1, P_2] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [C_1, P_3] = \tfrac{1}{2}P_2, \quad [C_1, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_1,\\
&[C_2, P_1] = \tfrac{1}{2}P_3, \quad [C_2, P_2] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_2, P_3] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [C_2, P_4] = \tfrac{1}{2}P_2,\\
&[C_3, P_1] = -\tfrac{1}{2}P_2, \quad [C_3, P_2] = \tfrac{1}{2}P_1, \quad [C_3, P_3] = \tfrac{1}{2}P_4, \quad [C_3, P_4] = -\tfrac{1}{2}P_3.
\end{aligned}$$

В дальнейшем через V будем обозначать векторное пространство $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$, а через W — его подпространство.

Лемма 5.1. *Пусть Γ — линейный оператор конечномерного векторного пространства U над R и $\Gamma^2 = \alpha \cdot 1_U$, где $\alpha^2 = 1$, 1_U — тождественный оператор U. Если $\alpha = -1$ ($\alpha = 1$), то U разлагается в прямую сумму двумерных (одномерных) инвариантных относительно Γ подпространств.*

Доказательство. Пусть Q — вещественная линейная алгебра, порожденная Г. Q можно рассматривать как скрещенную групповую алгебру группы порядка 2 и поля R. Поскольку Q — полупростая алгебра, то по теореме Веддерберна каждый левый Q-модуль вполне приводим. При $\alpha = 1$ неприводимые Q-модули одномерны, а при $\alpha = -1$ — двумерны. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Подпространства пространства V, инвариантные относительно $F = \langle B_1 - B_3 \rangle$, исчерпываются относительно $O(2,2)$-сопряженности пространствами:* O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,2,3,4)$.

Доказательство. Так как $[B_1 - B_3, P_1 + P_3] = P_2 + P_4$, $[B_1 - B_3, P_2 + P_4] = 0$, $[B_1 - B_3, P_2 - P_4] = -(P_1 - P_3)$, $[B_1 - B_3, P_1 - P_3] = 0$, то V есть прямая сумма инвариантных относительно $B_1 - B_3$ подпространств $\langle P_1 + P_3, P_2 + P_4 \rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2 - P_4 \rangle$. Если $[F, W] \subset W$, $W \subset V$ и $\dim W = 1$, то $W = \langle \alpha(P_2 + P_4) + \beta(P_1 - P_3) \rangle$. Применяя автоморфизм $\exp(tC_3)$, отображаем W на $\langle P_1 - P_3 \rangle$. Если $\dim W \geq 2$, то W содержит $P_1 - P_3$, $\alpha(P_1 + P_3) + \beta(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$, $\alpha(P_2 + P_4)$. При $\alpha \neq 0$ получаем, что W содержит $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4$, $P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)$. Так как $\exp(2tC_3)(P_1 + P_3 + \delta(P_2 - P_4)) = (\cos t + \delta \sin t)(P_1 + P_3) + (\delta \cos t - \sin t)(P_2 - P_4)$, то, полагая $\cos t + \delta \sin t = 0$, находим, что W сопряжено с $\langle P_1 - P_3, P_2 + P_4, P_2 - P_4 \rangle = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4 \rangle$.

Если $\alpha = 0$, то $\exp(2tC_2)(W)$ содержит векторы $P_1 - P_3$, $\beta e^{2t}(P_2 + P_4) + \gamma(P_2 - P_4)$. При $\beta\gamma \neq 0$ полагаем $e^{2t}|\beta| = |\gamma|$. Получаем вектор $P_2 + P_4 \pm (P_2 - P_4)$, равный $2P_2$ или $2P_4$. Если $\dim W = 2$, то $W = (\overline{13}, 2)$ или $(\overline{13},4)$. Если $\dim W = 3$, то W совладеет с $(\overline{13},2,4)$. При $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ и $\dim W = 2$ имеем $W = (\overline{13}, \overline{24})$. При $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ и $\dim W = 2$ имеем $W = (\overline{13}, 24)$. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Если $W \neq 0$, $W \neq V$ и $[B_2, W] \subset W$, то W сопряжено с одним из пространств:* (13), $(1,3)$, $(13,\overline{24})$, $(13,24)$, $(13,2,4)$.

Доказательство. Так как $(2B_2)^2 = \operatorname{diag}\{1,1,1,1\}$, то по лемме 5.1 W является прямой суммой инвариантных одномерных подпространств. На основании (5.1), $V_1 = \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4 \rangle$ — линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению 1, а $V_2 = \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4 \rangle$ — линейная оболочка собственных векторов $2B_2$, относящихся к собственному значению -1. С точностью до автоморфизма $\exp(tC_3)$ одномерные инвариантные подпространства оператора B_2 исчерпываются $\langle P_1 \pm P_3 \rangle$. Автоморфизм, соответствующий матрице $\operatorname{diag}\{1,1,-1,-1\}$, отображает $\langle B_2 \rangle$ на $\langle B_2 \rangle$, а $\langle P_1 - P_3 \rangle$ на $\langle P_1 + P_3 \rangle$.

Пусть $V = \langle Y, Z \rangle$, где $Y \in V_1$, $Z \in V_2$. Применяя $\exp(tC_3)$, а затем $\exp(tC_2)$, получаем, что W сопряжено с одним из пространств: $(1,3)$, $(13,24)$, $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4 \rangle$.

Пусть

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\Lambda \in O(2,2)$, $\Lambda^{-1} B_2 \Lambda = -B_2$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = P_1 + P_3$, $\Lambda^{-1}(P_1 + P_3) = -(P_1 - P_3)$. Значит, $\langle P_1 + P_3, P_1 - P_3 + P_2 + P_4 \rangle$ сопряжено с $\langle P_1, P_3 \rangle$.

Если $\dim W = 3$, то $V_1 \subset W$ или $V_2 \subset W$, а потому $W = \langle P_1 + P_3, P_2, P_4\rangle$ или $W = \langle P_1, P_3, P_2 + P_4\rangle$. Автоморфизм $AP(2,2)$, соответствующей матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

не изменяет $\langle B_2\rangle$ и отображает $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3\rangle$ на $\langle P_1 + P_3, P_2, P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть* $F^a = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3)\rangle$ $(a = 1, 2)$. *Если* $[F^a, W] \subset W$, $W \neq 0$, $W \neq V$, *то* W *сопряжено с одним из пространств:* ($2a$), ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,$2w4$), (1,6–$2a$,3), ($\overline{13}$,2,4) $(w > 0)$.

Доказательство. Ограничимся случаем $a = 2$. Пусть $\Gamma = B_1 - B_3 + C_1 - C_3$, $X = \alpha(P_1 - P_3) + \beta(P_1 + P_3) + \gamma P_2 + \delta P_4 \in W$. Из (5.1) получаем, что $[\Gamma, X] = 2\beta P_2 - \gamma(P_1 - P_3)$, $[\Gamma, [\Gamma, X]] = -2\beta(P_1 - P_3)$. Если $\beta \neq 0$, то $P_1 - P_3, P_2, P_1 + P_3 + \rho P_4 \in W$. Если $\rho = 0$, то $W = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$. Допустим, что $\rho \neq 0$. Тогда $P_3 + \alpha P_4 \in W$, $\alpha \neq 0$. Легко получить, что $\exp(2t(B_1 - B_3)(P_3 + \alpha P_4)) = P_3 + \alpha P_4 + t(P_2 + P_4 + \alpha(P_1 - P_3))$. Отсюда вытекает, что $P_3 + (\alpha + t)P_4 \in W$. Полагая $t = -\alpha$, получаем, что $W = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$.

Пусть $\beta = 0$ для всех $X \in W$. Если $\gamma = 0$, то W совпадает с одним из пространств: $\langle P_1 - P_3\rangle$, $\langle P_4\rangle$, $\langle P_1 - P_3 + \alpha P_4\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_4\rangle$. Так как $\exp(2t(B_1 - B_3)(P_1 - P_3 + \alpha P_4) = (1 + \alpha t)(P_1 - P_3) + \alpha P_4$, то, полагая $1 + \alpha t = 0$, находим, что пространство $\langle P_1 - P_3 + \alpha P_4\rangle$ сопряжено с $\langle P_4\rangle$. Если $\gamma \neq 0$, то $P_1 - P_3, P_2 + wP_4 \in W$. При $\dim W = 3$ имеем $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$.

Остается показать, что алгебры $L_1 = \langle P_1 - P_3, P_2\rangle \supset\!\!\!\!+ F^2$, $L_2 = \langle P_1 - P_3, P_4\rangle \supset\!\!\!\!+ F^2$, $L_3 = \langle P_1 - P_3, P_2 + wP_4\rangle \supset\!\!\!\!+ F^2$ попарно не сопряжены.

Так как при изоморфизме псевдоевклидовых пространств сохраняются длины векторов, то алгебры L_1 и L_2 несопряжены.

Допустим, что автоморфизм φ алгебры $AP(2,2)$, соответствующий матрице $\lambda = (\gamma_{ij}) \in O(2,2)$, отображает L_1 на L_3. Пусть $\varphi(\Gamma) = \mu\Gamma$, $\varphi(P_1 - P_3) = \alpha_1(P_1 - P_3) + \alpha_2(P_2 + wP_4)$, $\varphi(P_2) = \beta(P_1 - P_3) + \beta_2(P_2 + wP_4)$. Поскольку $[\varphi(\Gamma), \varphi(P_1 - P_3)] = [\Gamma, P_1 - P_3] = 0$, то $\alpha_2 = 0$ Из равенства $\lambda\Gamma = \mu\Gamma\lambda$ вытекает, что $\gamma_{42} = 0$, вследствие чего $\beta_2 = 0$. Мы получили, что $\varphi(\langle P_1 - P_3, P_2\rangle) = \langle P_1 - P_3\rangle$. Противоречие. Значит, алгебра L_1 не сопряжена с алгеброй L_3.

Аналогично доказываем несопряженность алгебр L_2 и L_3. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если нетривиальное подпространство* $W \subset V$ *инвариантно относительно* $F = \langle -B_1 + B_3 + C_2\rangle$, *то* W *сопряжено с одним из пространств:* ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), (13,24), ($\overline{13}$,2,4).

Доказательство. Пусть $X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 \in W$, $\Gamma = 2(-B_1 + B_3 + C_2)$ Из (5.1) получаем, что

$$[\Gamma, X] = (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)P_1 + (-\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4)P_2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4)P_3 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)P_4,$$
$$[\Gamma, [\Gamma, X]] = X + 2(\alpha_4 - \alpha_2)(P_1 - P_3) - 2(\alpha_1 + \alpha_3)(P_2 + P_4).$$

Если $\alpha_4 - \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$, то $P_1 - P_3$, $P_2 + P_4 \in W$. При $\dim W = 2$ имеем $W = \langle P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$, а при $\dim W = 3$ получаем одно из пространств: $\langle P_1, P_2 + P_4, P_3\rangle$, $\langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$.

Пусть $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_1+\alpha_3\neq 0$. Если $\alpha_1-\alpha_3\neq 0$, то $W=\langle P_1,P_2+P_4,P_3\rangle$. Если $\alpha_1-\alpha_3=0$, то $W=\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$.

Пусть $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$, $\alpha_1\neq 0$. Такими же рассуждениями как и в предыдущем случае получаем, что W совпадает с одним из пространств: $\langle P_1-P_3,P_2-P_4\rangle$, $\langle P_1-P_3,P_2,P_4\rangle$.

Если $\alpha_4-\alpha_2=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$ для всех $X\in W$, то W совпадает с одним из пространств; $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$.

Автоморфизм $AO(2,2)$, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

не изменяет F и отображает $\langle P_2+P_4\rangle$ на $\langle P_1-P_3\rangle$, $\langle P_1+P_3,P_2+P_4\rangle$ на $\langle P_1-P_3,P_2-P_4\rangle$, $\langle P_1,P_2+P_4,P_3\rangle$ на $\langle P_1-P_3,P_2,P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если $F=\langle -B_1+B_3\pm C_3\rangle$, $[F,W]\subset W$, $W\neq 0$, $W\neq V$, то $W=\langle P_1-P_3,P_2+P_4\rangle$.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $F=\langle -B_1+B_3+C_3\rangle$. Пусть $\Gamma=2(-B_1+B_3+C_3)$, $X=\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4P_4$. Тогда

$[\Gamma,X]=(2\alpha_2-\alpha_4)P_1+(-2\alpha_1-\alpha_3)P_2-\alpha_2P_3-\alpha_1P_4$,

$[\Gamma,[\Gamma,X]]=-X-2(\alpha_1+\alpha_3)(P_1-P_3)+2(\alpha_4-\alpha_2)(P_2+P_4)$.

Отсюда вытекает, что W содержит векторы

$Y=(\alpha_1+\alpha_3)(P_1-P_3)+(\alpha_2-\alpha_4)(P_2+P_4)$,

$[\Gamma,Y]=(\alpha_2-\alpha_4)(P_1-P_3)-(\alpha_1+\alpha_3)(P_2+P_4)$.

Определитель Δ из коэффициентов при P_1-P_3, P_2+P_4 равен $-(\alpha_1+\alpha_3)^2-(\alpha_2-\alpha_4)^2$. Если $\Delta\neq 0$, то $P_1-P_3,P_2+P_4\in W$. Предположив, что W содержит ненулевой вектор $\beta P_3+\gamma P_4$, получаем, что $W=V$. Значит, $W=\langle P_1-P_3,P_2+P_4\rangle$.

Если $\Delta=0$, то $\alpha_3=-\alpha_1$, $\alpha_4=\alpha_2$. Отсюда следует, что $X=\alpha_1(P_1-P_3)+\alpha_2(P_2+P_4)$, а значит, $W=\langle P_1-P_3,P_2+P_4\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Если $F=\langle B_2-eC_3\rangle$ $(e>0)$, $[F,W]\subset W$ и $W\neq 0$, $W\neq V$, то $W=\langle P_1+P_3,P_2-P_4\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma=2(B_2-eC_3)$, $X=\sum\alpha_iP_i$. Тогда

$[\Gamma,X]=(-e\alpha_2+\alpha_3)P_1+(e\alpha_1-\alpha_4)P_2+(\alpha_1+e\alpha_4)P_3-(\alpha_2+e\alpha_3)P_4$,

$[\Gamma,[\Gamma,X]]=(1-e^2)X+2e(\alpha_4P_1+\alpha_3P_2-\alpha_2P_3-\alpha_1P_4)$.

Легко получить, что

$$\exp(2tC_3)(X)=(\alpha_1\cos t+\alpha_2\sin t)P_1+(-\alpha_1\sin t+\alpha_2\cos t)P_2+ \\ +(\alpha_3\cos t-\alpha_4\sin t)P_3+(\alpha_3\sin t+\alpha_4\cos t)P_4.$$

Полагаем $\alpha_3\sin t+\alpha_4\cos t=0$. Если $\alpha_1=\alpha_2=0$, то $P_3\in W$. Отсюда, используя инвариантность W, находим последовательно, что $[\Gamma,P_3]=P_1-eP_4\in W$, $[\Gamma,P_1-eP_4]=2eP_2+(1-e^2)P_3\in W$, $P_2\in W$, $-eP_1-P_4\in W$. Значит, $W=V$. Противоречие. Поэтому можно предположить, что $X=P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3$. Пусть

$X_1=[\Gamma,X]=(-e\alpha_2+\alpha_3)P_1+eP_2+P_3-(\alpha_2+e\alpha_3)P_4$,

$X_2=\alpha_3P_2-\alpha_2P_3-P_4$, $\quad X_3=(-e\alpha_3-\alpha_2)P_1+P_2-eP_3-(\alpha_3-e\alpha_2)P_4$.

Пусть Δ — определитель, составленный из коэффициентов векторов X, X_1, X_2, X_3 при P_1, P_2, P_3, P_4. Находим, что

$$-\Delta = (e(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) - 2\alpha_2\alpha_3)^2 + (\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1 + 2e\alpha_2\alpha_3)^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то X, X_1, X_2, X_3 суть линейно независимы, а потому $W = V$.

Пусть $\Delta = 0$. Тогда $e(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) - 2\alpha_2\alpha_3 = 0$, $(\alpha_2^2 - \alpha_3^2 + 1) + e(2\alpha_2\alpha_3) = 0$. Так как $\begin{vmatrix} e & -1 \\ 1 & e \end{vmatrix} = e^2 + 1$, $e^2 + 1 \neq 0$, то $\alpha_2 - \alpha_3^2 + 1 = 0$, $\alpha_2\alpha_3 = 0$. Отсюда заключаем, что $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \pm 1$.

Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{1,-1,-1,1\}$, отображает $B_2 - eC_3$ в $-(B_2 - eC_3)$, $P_1 - P_3$ в $P_1 + P_3$. Поэтому можно предполагать, что $X = P_1 + P_3$, $W = \langle P_1 + P_3, P_2 - P_4\rangle$. Лемма доказана.

Пусть $F_i(m)$ — подалгебра размерности m алгебры $AO(2,2)$. Если речь идет о расщепляемых подалгебрах $W_1 \Subset F_i(m)$, …, $W_s \Subset F_i(m)$, то будем употреблять обозначение $F_{ij}(m) : W_1, \ldots, W_s$ $(j = \overline{1,s})$.

Теорема 5.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ исчерпываются алгебрами:*

$F_{1j}(0)$: O, (1), (3), (13), (1,2), (1,3), (1,24), (3,4), (24,3), (13,24), (1,2,3), (1,3,4), (1,24,3), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,14})$;

$F_{2j}(1) = \langle B_1 - B_3\rangle$: O, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,8})$;

$F_{3j}(1) = \langle B_2\rangle$: O, (13), (1,3), (13,24), (13,$\overline{24}$), (13,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,7})$;

$F_{4j}(1) = \langle B_3\rangle$: O, (1,2), (3,4), (13,24), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,5})$;

$F_{5j}(1) = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3\rangle$: O, (4), ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,2w4), (1,2,3), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(w > 0,\ j = \overline{1,9})$;

$F_{6j}(1) = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3\rangle$: O, (2), ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,2w4), (1,3,4), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(w > 0,\ j = \overline{1,9})$;

$F_{7j}(1) = \langle -B_1 + B_3 + C_2\rangle$: O, ($\overline{13}$), (13,24), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{8j}(1) = \langle -B_1 + B_3 + C_3\rangle$: O, ($\overline{13}$,24), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,3})$;

$F_{9j}(1) = \langle -B_1 + B_3 - C_3\rangle$: O, ($\overline{13}$,24), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,3})$;

$F_{10j}(1) = \langle B_2 + eC_2\rangle$: O, (13), (24), (1,3), (2,4), (13,24), (13,$\overline{24}$), (1,24,3), (13,2,4), (1,2,3,4) $(0 < e < 1,\ j = \overline{1,10})$;

$F_{11j}(1) = \langle B_2 + C_2\rangle$: O, (2), (4), (13) ,(24), (1,3), (2,4), (13,2), (13,4), (13,24), (13,2,4), (1,24,3), (1,2,3), (1,3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,15})$;

$F_{12j}(1) = \langle B_2 - eC_3\rangle$: O, (13,$\overline{24}$), (1,2,3,4) $(e > 1,\ j = \overline{1,3})$;

$F_{13j}(1) = \langle B_3 + eC_3\rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(0 < |e| < 1,\ j = \overline{1,4})$;

$F_{14j}(1) = \langle B_3 - C_3\rangle$: O, (1), (1,2), (3,4), (1,3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{15j}(1) = \langle B_3 + C_3\rangle$: O, (3), (1,2), (3,4), (1,2,3), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{16j}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2\rangle$: O, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,$\overline{24}$), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{17j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3\rangle$: O, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,2), ($\overline{13}$,4), ($\overline{13}$,24), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,7})$;

$F_{18j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_2\rangle$: O, ($\overline{13}$), ($\overline{13}$,24), (13,24), ($\overline{13}$,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{19j}(2) = \langle B_1 - B_3, C_3\rangle$: O, ($\overline{13}$,24), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,3})$;

$F_{20j}(2) = \langle B_2, C_2\rangle$: O, (13), (1,3), (13,24), (13,2,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,6})$;

$F_{21j}(2) = \langle B_2, C_3\rangle$: O, (13,$\overline{24}$), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,3})$;

$F_{22j}(2) = \langle B_3, C_3\rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(j = \overline{1,4})$;

$F_{23j}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 + C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (4), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3), (1,2,3,4) ($w > 0$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{24j}(2) = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3 - C_1 + C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (2), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,3,4), (1,2,3,4) ($w > 0$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{25j}(2) = \langle B_2+C_2, B_1-B_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, (13,24), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,24,3), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,11}$);

$F_{26j}(2) = \langle B_2 + \alpha C_2, B_1 - B_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, (13,24), (1,24,3), $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $j = \overline{1,9}$);

$F_{27j}(2) = \langle B_2 - \alpha C_3, B_1 - B_3\rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) ($\alpha > 0$, $j = \overline{1,3}$);

$F_{28j}(2) = \langle B_1 - B_3 - C_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{29j}(3) = \langle B_1, B_2, B_3\rangle$: O, (13,24), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{30j}(3) = \langle B_1 - B_3, B_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{31j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2, C_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,6}$);

$F_{32j}(3) = \langle B_1 - B_3, C_3, B_2\rangle$: O, $(\overline{13},24)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{33j}(3) = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,7}$);

$F_{34j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2-C_2, C_1-C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,5}$);

$F_{35j}(3) = \langle B_1-B_3, B_2+\alpha C_2, C_1-C_3\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($0 < |\alpha| < 1$, $j = \overline{1,6}$);

$F_{36j}(3) = \langle B_1 - C_1, B_2 + C_2, B_3 - C_3\rangle$: O, (2), (1,3,4), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,4}$);

$F_{37j}(3) = \langle B_1 + C_1, B_2 + C_2, B_3 + C_3\rangle$: O, (4), (1,2,3), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,4}$);

$F_{38j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1 - C_3\rangle$: O, $(\overline{13},\overline{24})$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{39j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_2\rangle$: O, (13,24), (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{40j}(4) = \langle B_1, B_2, B_3, C_3\rangle$: O, (1,2,3,4) ($j = 1, 2$);

$F_{41j}(4) = \langle B_1-B_3, B_2, C_1-C_3, C_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,5}$);

$F_{42j}(5) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1 - C_3, C_2\rangle$: O, $(\overline{13},\overline{24})$, (1,2,3,4) ($j = \overline{1,3}$);

$F_{43j}(6) = \langle B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\rangle$: O, (1,2,3,4) ($j = 1, 2$).

Доказательство. Для каждой из подалгебр алгебры $AO(2,2)$ необходимо найти инвариантные подпространства пространства $V = \langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$ и классифицировать их относительно $O(2,2)$-сопряженности.

Первым рассмотрим случай нулевой алгебры $F_1(0)$. Превратим V в псевдоевклидово пространство, положив $(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4$ для $X = \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum \beta_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). Пусть W — подпространство V. Если $\dim W = 1$, то по теореме Витта пространство W $O(2,2)$-сопряжено с одним из пространств: (1), (13), (3).

Пусть $\dim W > 1$. Если W содержит вектор X ненулевой длины, то W сопряжено с $\langle X\rangle \oplus W'$, где $X = P_1$, $W' \subset \langle P_2, P_3, P_4\rangle$ или $X = P_3$, $W' \subset \langle P_1, P_2, P_4\rangle$. Подпространства пространства $\langle P_2, P_3, P_4\rangle$ исчерпываются пространствами: O, (2), (24), (3), (2,3), (3,4), (24,3), (2,3,4). Подпространства пространства (1,2,4) исчерпываются пространствами: O, (1), (24), (4), (1,2), (1,24), (1,4), (1,2,4). Если W не содержит вектора ненулевой длины, то в силу теоремы о существовании ортогонального базиса и теоремы Витта заключаем, что $W = \langle P_1 + P_3\rangle$ или $W = \langle P_1 + P_3, P_2 + P_4\rangle$.

Большинство случаев одномерных подалгебр алгебры $AO(2,2)$ рассмотрены в леммах 5.2–5.7, остальные случаи исследуются аналогично.

Рассмотрим случай алгебры $F_{16}(2) = \langle B_1 - B_3, B_2\rangle$. При описании инвариантных относительно $F_2 = \langle B_1 - B_3\rangle$ подпространств пространства V, мы использовали только автоморфизмы $\exp(tC_i)$ $(i = 2, 3)$. Поскольку эти автоморфизмы алгебру F_{16} отображают в себя, то среди инвариантных пространств F_2 следует отобрать те, которые выдерживают действие B_2, а затем полученные пространства исследовать на сопряженность. Непосредственной проверкой убеждаемся, что инвариантные подпространства для F_{16} исчерпываются пространствами: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,2,3,4)$.

Пусть W — подпространство V, инвариантное относительно $F_{25} = \langle B_2 + C_2, B_1 - B_3\rangle$. Легко получить, что $W = W_1 \oplus W_2$, где $W_1 \subset \langle P_2, P_4\rangle$, а W_2 совпадает с одним из пространств: O, (13), $(\overline{13})$, $(1,3)$. Автоморфизм $\exp(tC_2)$ отображает $\langle P_2 + \gamma P_4\rangle$ $(\gamma \neq 0)$ на одно из пространств: (2), (4), (24), $(\overline{24})$. Используя коммутационные соотношения, находим, что W является одним из пространств: O, $(\overline{13})$, (24), $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(13,24)$, $(\overline{13},2,4)$, $(1,24,3)$,$(1,2,3,4)$.

Аналогично исследуются случаи остальных подалгебр алгебры $AO(2,2)$. Теорема доказана.

§ 6 Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$

Пусть $\widetilde{F}_i$ — такая подалгебра алгебры $AP(2,2)$, что $\pi(\widetilde{F}_i) = F_i = F_i(m)$. Запись $\widetilde{F}_i + W$ означает, что $[F_i, W] \subset W$ и $\widetilde{F}_i \cap V \subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\widetilde{F}_i + W_1, \ldots, \widetilde{F}_i + W_s$, то будем употреблять обозначение $\widetilde{F}_{ij} : W_1, \ldots, W_s$ $(j = \overline{1, s})$.

Лемма 6.1 *Нерасщепляемые подалгебры $\widetilde{F}$ алгебры $AP(2,2)$ с условием $\pi(\widetilde{F}) = \langle B_1 - B_3\rangle$ исчерпываются алгебрами:*

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$ $(j = \overline{8,10})$.

Доказательство. Пусть $X = B_1 - B_3 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$. Тогда $\exp(2Y)(X) = B_1 - B_3(\alpha_1 + t_2 - t_4)P_1 + (\alpha_2 - t_1 - t_3)P_2 + (\alpha_3 - t_2 + t_4)P_3 + (\alpha_4 - t_1 - t_3)P_4$, Полагая $\alpha_3 - t_2 + t_4 = 0$, $\alpha_4 - t_1 - t_3 = 0$, можно предположить, что алгебра $\widetilde{F}$ содержит $X = B_1 - B_3 + \alpha P_1 + \beta P_2$. Если $\widetilde{F} \cap V = 0$, то, применяя автоморфизм $\exp(2tC_3)$, получаем, что $\widetilde{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1\rangle$. Автоморфизм $AO(2,2)$, соответствующий матрице $\mathrm{diag}\,\{1, -1, -1, 1\}$, отображает $\langle B_1 - B_3 + \alpha P_1\rangle$ на $\langle B_1 - B_3 - \alpha P_1\rangle$. Поэтому будем предполагать, что $\alpha > 0$. Так как $\exp(t(B_2 - C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) = e^{-t}(B_1 - B_3 + \alpha e^t P_1)$, то можно считать, что $\alpha = 1$. В итоге получаем алгебру $\widetilde{F}_{21} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$.

Пусть $W = \langle P_1 - P_3, P_2\rangle$ или $W = \langle P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$. Тогда $\beta = 0$. Автоморфизм $\exp(t(B_2 + C_2))$ не изменяет W. Так как $\exp(t(B_2 + C_2))(B_1 - B_3 + \alpha P_1) = e^{-t}(B_1 - B_3) + \alpha(\operatorname{ch} tP_1 + \operatorname{sh} tP_3)$ и $\alpha(\operatorname{ch} tP_1 + \operatorname{sh} tP_3) + \alpha \operatorname{sh} t(P_1 - P_3) = \alpha e^t P_1$, то, полагая $|\alpha| e^{2t} = 1$, можно допускать, что $\alpha = 1$.

Аналогично исследуются остальные случаи. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Если $\widetilde{F}$ — нерасщепляемая подалгебра $AP(2,2)$ и $\pi(\widetilde{F}) = \langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3)\rangle$ $(a = 1, 2)$, то $\widetilde{F}$ сопряжена одной из алгебр:*

$\langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3) + P_{2a-1}\rangle$: O, $(2a)$, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$;

$\langle B_1 - B_3 + (-1)^a(C_1 - C_3) + P_{2a}\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},6 - 2a)$, $(1,3,6 - 2a)$.

Доказательство. Так как случаи $a = 1$ и $a = 2$ аналогичны, то ограничимся рассмотрением случая $a = 2$. Пусть $X = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$.

Тогда $\exp(2Y)(X) = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + (\alpha_1 + 2t_2)P_1 + (\alpha_2 - 2t_1 - 2t_3)P_2 + (\alpha_3 - 2t_2)P_3 + \alpha_4 P_4$. Полагаем $\alpha_1 + 2t_2 = 0$, $\alpha_2 - 2t_1 - 2t_2 = 0$. Отсюда вытекает, что с точностью до внутренних автоморфизмов $X = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3 + \beta P_4$.

Пусть $W = \widetilde{F} \cap V$ и пусть $W \neq \langle P_4 \rangle$, $W \neq \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. В этом случае автоморфизм $\exp(t(B_1 - B_3 - C_1 + C_3))$ не изменяет W и отображает X в $B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3 + (\beta + t\alpha)P_4 + (t\beta + \frac{t^2}{2})(P_1 - P_3)$, Так как $\exp(\lambda P_2)(B_1 - B_3 + C_1 - C_3) = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \lambda(P_1 - P_3)$, то можно допустить, что при $\alpha \neq 0$ $\widetilde{F}$ содержит $X_1 = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha P_3$. Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{1, -1, 1, 1\}$, позволяет считать $\alpha > 0$. Поскольку

$\exp(t(B_2 + C_2))(X_1) = e^{-t}(B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha e^t(\operatorname{ch} tP_3 + \operatorname{sh} tP_1)) = e^{-t}X_2$,
$\exp(-\alpha e^t \operatorname{sh} tP_2)X_2 = B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + \alpha e^{2t}P_3$,

то, полагая $\alpha e^{2t} = 1$, находим, что допустимо предполагать $\alpha = 1$.

Если $\alpha = 0$, то при помощи автоморфизмов $\operatorname{diag}\{1, 1, 1, -1\}$, $\exp(t(B_2 + C_2))$ получаем алгебру $\widetilde{F}$, содержащую $B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4$.

Аналогично рассматриваются и случаи, когда $W = \langle P_4 \rangle$, $W = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Все подалгебры $\widetilde{F}_i$ алгебры $AP(2,2)$ с условием $\pi(\widetilde{F}_i) = F_i$ ($i = 3, 4, \overline{7,13}, \overline{18,22}, \overline{27,32}, \overline{36,43}$) являются расщепляемыми.*

Доказательство. Алгебры F_i ($i = 29, 36, 37, 43$) являются полупростыми. В силу теоремы Уайтхеда [13] для них не существует нерасщепляемых расширений. Отсюда вытекает, что расщепляемыми будут также алгебры $\widetilde{F}_{38}$, $\widetilde{F}_{39}$, $\widetilde{F}_{40}$.

Пусть $X_1 = -B_1 + B_3 + C_2 + \sum \alpha_i P_i$, $Y = \sum t_i P_i$ ($i = \overline{1,4}$). Непосредственно находим, что

$$\begin{aligned} &\exp(2Y)(X) = -B_1 + B_3 + C_2 + (\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4)P_1 + \\ &\quad + (\alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4)P_2 + (\alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4)P_3 + (\alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3)P_4. \end{aligned}$$

Полагаем

$$\begin{aligned} &\alpha_1 - t_2 - t_3 + t_4 = 0, \\ &\alpha_2 + t_1 + t_3 - t_4 = 0, \\ &\alpha_3 - t_1 + t_2 - t_4 = 0, \\ &\alpha_4 + t_1 - t_2 + t_3 = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов при t_1, t_2, t_3, t_4 равен 1, то система (6.1) имеет решение. Следовательно, все алгебры $\widetilde{F}_7$ суть расщепляемые.

Рассмотрим случай алгебры $F_{18})2) = \langle B_1 - B_3, C_2 \rangle$. Алгебра $\widetilde{F}_{18}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 + \sum \alpha_i P_i$, $X_2 = C_2$. Так как $[X_2, [X_2, X_1]] = -\frac{1}{4}\sum \alpha_i P_i$, то $\widetilde{F}_{18}$ — расщепляемая алгебра.

Алгебра F_{28} содержит F_7. Следовательно, с точностью до внутренних автоморфизмов алгебра $\widetilde{F}_{28}$ содержит элементы $X_1 = B_1 - B_3 - C_2$, $X_2 = C_1 - C_3 + \sum \alpha_i P_i$. На основании коммутационных соотношений,

$$\begin{aligned} &X_2 - [X_1, X_2] = -\left(\tfrac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}\right)(P_2 + P_4) + \left(\tfrac{\alpha_2 - \alpha_4}{2}\right)(P_1 - P_3) + \left(\alpha_1 + \tfrac{\alpha_3}{2}\right)P_1 + \\ &\quad + \left(\alpha_2 + \tfrac{\alpha_4}{2}\right)P_2 + \left(\alpha_3 + \tfrac{\alpha_1}{2}\right)P_3 + \left(\alpha_4 + \tfrac{\alpha_2}{2}\right)P_4. \end{aligned}$$

Перебирая инвариантные пространства F_{28}, находим, что для каждого из них $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, т.е. алгебра $\widetilde{F}_{28}$ расщепляемая. Лемма доказана.

Лемма 6.4. *Если $\widetilde{F}$ — нерасщепляемая подалгебра $AP(2,2)$ и $\pi(\widetilde{F}) = F_{35}$, то $\widetilde{F}$ сопряжена одной из алгебр:*

$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$ $(j = 1, 2)$;

$\widetilde{F}_{35,3} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$;

$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 - \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_3\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = 4, 5)$.

Доказательство. На основании рассуждений, проведенных для $\widetilde{F}_{26}$, получаем, что $\widetilde{F}$ содержит элементы $X_1 = B_2 + \alpha C_2$, $X_2 = B_1 - B_3$, $X_3 = C_1 - C_3 + \sum \gamma_i P_i$. Из коммутационных соотношений находим, что

$$
\begin{aligned}
&\alpha X_3 + [X_1, X_3] = \left(\alpha\gamma_1 + \tfrac{1+\alpha}{2}\gamma_3\right) P_1 + \left(\alpha\gamma_2 + \tfrac{\alpha-1}{2}\gamma_4\right) P_2 + \\
&\qquad + \left(\alpha\gamma_3 + \tfrac{1+\alpha}{2}\gamma_1\right) P_3 + \left(\alpha\gamma_4 + \tfrac{\alpha-1}{2}\gamma_2\right) P_4, \\
&[X_2, X_3] = \left(\tfrac{\gamma_1+\gamma_3}{2}\right)(P_2 + P_4) + \left(\tfrac{\gamma_4-\gamma_2}{2}\right)(P_1 - P_3).
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Допустим, что $\widetilde{F} \cap V = \langle P_1 - P_3\rangle$. Тогда на основании (6.2) получаем, что $\gamma_3 + \gamma_1 = 0$. Можно предположить, что $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Получаем также условие

$$
\begin{aligned}
&\alpha\gamma_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)\gamma_4 = 0, \\
&\alpha\gamma_4 + \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)\gamma_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Определитель Δ этой системы равен $\frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{2}{4}\alpha - \frac{1}{4}$. Если $\Delta = 0$, то $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$. Так как $0 < |\alpha| < 1$, то система (6.3) имеет ненулевое решение только при $\alpha = \frac{1}{3}$. В этом случае $\gamma_4 = \gamma_2$. Автоморфизм, соответствующий $\operatorname{diag}\{-1, 1, -1, 1\}$, позволяет допускать, что $\gamma_2 > 0$. Так как

$$
\exp(t(B_2 - C_2))(C_1 - C_3 + \gamma_2(P_2 + P_4)) = e^t(C_1 - C_3 + \gamma_2 e^{-2t}(P_2 + P_4)),
$$

то считаем, что $\gamma_2 = 1$. Следовательно, алгебра $\widetilde{F}$ сопряжена с алгеброй $\langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4, P_1 - P_3\rangle$.

Аналогично рассматриваются остальные случаи. Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(2,2)$ исчерпываются алгебрами:*

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_1\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{2j} = \langle B_1 - B_3 + P_2\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(j = \overline{8,10})$;

$\widetilde{F}_{5j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_3\rangle$: O, (4), $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$ $(w > 0,\ j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{5j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3 + P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(1,2,3)$ $(j = \overline{8,11})$;

$\widetilde{F}_{6j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_1\rangle$: O, (2), $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = \overline{1,7})$;

$\widetilde{F}_{6j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3 + P_2\rangle$: O, $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$, $(1,3,4)$ $(j = \overline{8,11})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: O, (4), (13), $(1,3)$, $(13,4)$, $(1,3,4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,6})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: O, (2), (13), $(1,3)$, $(13,2)$, $(1,2,3)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{7,12})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$: O, (13), $(1,3)$ $(j = \overline{13,15})$;

$\widetilde{F}_{11j} = \langle B_2 + C_2 + P_2\rangle$: (24), $(13,24)$, $(1,24,3)$ $(j = \overline{16,18})$;

$\widetilde{F}_{14j} = \langle B_3 - C_3 + \alpha P_2\rangle$: O, (1), $(3,4)$, $(1,3,4)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,4})$;

$\widetilde{F}_{15j} = \langle B_3 + C_3 + \alpha P_4\rangle$: O, (3), $(1,2)$, $(1,2,3)$ $(\alpha > 0,\ j = \overline{1,4})$;

$\widetilde{F}_{17.1} = \langle B_1 - B_3 + P_2 - P_4, C_1 - C_3\rangle$; $\widetilde{F}_{17.2} = \langle B_1 - B_3 + P_4, C_1 - C_3 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.3} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.4} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3 + \beta P_2 + \gamma P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\beta, \gamma \in R)$;
$\widetilde{F}_{17.5} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.6} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 - P_1 + \beta P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.7} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.8} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + P_1 + \beta P_2, P_1 - P_3, P_4\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.9} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.10} = \langle B_1 - B_3 + \alpha P_2, C_1 - C_3 + P_1, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\widetilde{F}_{17.11} = \langle B_1 - B_3 + P_2, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{17.12} = \langle B_1 - B_3 + P_1, C_1 - C_3 + \beta P_3, P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$ $(\beta \in R)$;
$\widetilde{F}_{23j} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: O, $(\overline{13},2)$, $(\overline{13},2w4)$, $(1,2,3)$ $(\alpha > 0$, $w > 0$, $j = \overline{1,4})$;
$\widetilde{F}_{23.5} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\widetilde{F}_{23.6} = \langle B_1 - B_3 + C_1 - C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2, P_1 - P_3, P_4\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\widetilde{F}_{24j} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: O, $(\overline{13},4)$, $(\overline{13},2w4)$, $(1,3,4)$ $(\alpha > 0$, $w > 0$, $j = \overline{1,4})$;
$\widetilde{F}_{24.5} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2 + \beta P_4, P_1 - P_3\rangle$ $(\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\widetilde{F}_{24.6} = \langle B_1 - B_3 - C_1 + C_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4, P_1 - P_3, P_2\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$ $(\alpha > 0$, $j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$ $(\alpha > 0$, $j = 3, 4)$;
$\widetilde{F}_{25j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_4\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},\overline{24})$, $(1,24,3)$ $(j = \overline{5,7})$;
$\widetilde{F}_{25.8} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{25.9} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 \pm P_4, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_2 - P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$ $(j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{26j} = \langle B_2 + 3C_2, B_1 - B_3 + P_4\rangle$: (24), $(\overline{13},24)$, $(13,24)$, $(1,24,3)$ $(j = \overline{3,6})$;
$\widetilde{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_2, C_1 - C_3\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},4)$ $(\alpha > 0$, $j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{33j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + \alpha P_4, C_1 - C_3\rangle$: $(\overline{13})$, $(\overline{13},2)$ $(\alpha > 0$, $j = 3, 4)$;
$\widetilde{F}_{33.5} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_4, C_1 - C_3, P_1 - P_3, P_2 + P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{33.6} = \langle B_1 - B_3, B_2 + C_2 + P_2 + P_4, C_1 - C_3, P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{34.1} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, B_2 - C_2 + P_1 - P_3\rangle$;
$\widetilde{F}_{34.2} = \langle B_1 - B_3, C_1 - C_3, B_2 - C_2 + P_3, P_1 - P_3, P_2, P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2 + P_4\rangle$: O, $(\overline{13})$ $(j = 1, 2)$;
$\widetilde{F}_{35.3} = \langle B_1 - B_3, B_2 + \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_4, P_1 - P_3, P_2 - P_4\rangle$;
$\widetilde{F}_{35j} = \langle B_1 - B_3, B_2 - \frac{1}{3}C_2, C_1 - C_3 + P_2\rangle$: $(\overline{13},24)$, $(\overline{13},2,4)$ $(j = 4, 5)$.

Основные этапы доказательства проведены в леммах 6.1–6.4. Остальные этапы аналогичны.

1. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Extension of the S-matrix of the mass shell and momentum space of constant curwature, Preprint E2–6992, Dubna, Joint Institute for Nuclear Research, 1974, 36 p.
2. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Translation invariant quantum field with de-Sitter momentum space of the mass shell, Preprint E2–7936, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 1974, 22 p.
3. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Extension of the S-matrix of mass shell and momentum space of constant curvature, В кн.: Труды Математического института им. В.А. Стеклова, Т. CXXXYI, Тр. Междунар. конф. по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистике, ч. II, Поля, частицы, математические вопросы квантовой статистики, М., Наука, 1975, 85–129.
4. Fushchych W.I., On a motion equations for two particles in relativistics quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–168.
5. Aghassi J.J., Roman P., Sentilli R.M., Relation of the inhomogeneous de Sitter group to the quantum mechanics of elementary particles, *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, № 8, 2297–2301.
6. Фущич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, № 3, 360–382.
7. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844–849.
8. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1624.
9. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
10. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuos subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
11. Burdel G., Patera J., Perrin M. and Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
12. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., The maximal solvable subgroups of $SO(p,q)$ groups, *J. Math. Phys.*, 1974, **15**, № 11, 1932–1938.
13. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.
14. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. I, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 2, 145–186.
15. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. II, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 4, 193–202.
16. Lassnar W., Realizations of the Poincaré group on homogeneous spaces, *Acte Phys. Slov.*, 1973, **23**, № 4, 193–202.
17. Beckers J., Patera J., Perroud M. and Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.