О симметрии, интеграле движения и некоторых частных решениях пространственной задачи трех тел

Ю.А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, И.В. РЕВЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

Еще Лагранжу были известны 10 интегралов движения пространственной задачи трех тел

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}, \qquad i = 1,2,3, \tag{1}$$

где

$$U = -m_1m_2F\left(r_{12}^2\right) - m_2m_3F\left(r_{23}^2\right) - m_3m_1F\left(r_{31}^2\right), \qquad m_i = 1, \quad i = 1,2,3,$$

(x_k, y_k, z_k) — координаты k-го тела, $k = 1,2,3$, $F(r^2)$ — произвольная достаточная гладкая функция, $r_{ij} = \left[(x_i-x_j)^2 + (y_i-y_j)^2 + (z_i-z_j)^2\right]^{1/2}$.

С теоретико-групповой точки зрения это значит, что лагранжиан и соответствующие уравнения движения инвариантны относительно 10-параметрической группы Галилея $G(1,3)$. Базисные элементы алгебры Ли этой группы имеют вид

$$\begin{gathered}
X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{y_3}, \\
X_3 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}, \qquad X_4 = t\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\
X_5 = t\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{y_3}\right), \qquad X_6 = t\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3}\right), \\
X_7 = y_k\frac{\partial}{\partial z_k} - z_k\frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad X_8 = z_k\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial z_k}, \\
X_p = x_k\frac{\partial}{\partial y_k} - y_k\frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{gathered} \tag{2}$$

В данной работе проведена теоретико-групповая классификация потенциалов в уравнении (1), в результате которой установлено, что при некоторых специальных видах U, например

$$U(r^2) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2, \tag{3}$$

уравнение (1) обладает более широкой группой инвариантности, чем группа Галилея $G(1,3)$. Для уравнения (1) с потенциалом (3) найден интеграл движения и построены частные решения.

1. Полную информацию о локальных симметрийных свойствах уравнения (1) дает

Доклады академии наук СССР, 1985, **280**, № 4, С. 799–804.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет дополнительную локальную группу симметрии только в таких случаях:*

$$F\left(r^2\right) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2, \tag{4.1}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2, \tag{4.2}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda r^{-2}, \tag{4.3}$$

$$F\left(r^2\right) = \lambda_5 \left(r^2\right)^{\beta}, \qquad \beta = \mathrm{const}, \qquad F\left(r^2\right) = \lambda_5 \ln\left(r^2\right), \tag{4.4}$$

где $\lambda_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Теорема 2. *Уравнения (1) с потенциалами (4.1)–(4.2) допускают следующие алгебры инвариантности*

а) $F\left(r^2\right) = \lambda_1 r^4 + \lambda_2 r^2$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, X_{10}\}, \tag{5}$$

где

$$X_{10} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\left\{(x_a - x_b)\frac{\partial}{\partial x_c} + (y_a - y_b)\frac{\partial}{\partial y_c} + (z_a - z_b)\frac{\partial}{\partial z_c}\right\}; \tag{6}$$

б) $F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_6, Y_k^{ij}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \quad j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
&Y_1^{ij} = v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_2^{ij} = v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},\\
&Y_3^{ij} = v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_4^{ij} = v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},\\
&Y_5^{ij} = v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j3}}, \quad Y_6^{ij} = v^{i3}\frac{\partial}{\partial v^{j1}} + v^{i1}\frac{\partial}{\partial v^{j2}} + v^{i2}\frac{\partial}{\partial v^{j3}},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$v^{1j} = x_j, \qquad v^{2j} = y_j, \qquad v^{3j} = z_j, \qquad j = 1, 2, 3;$$

в) $F\left(r^2\right) = \lambda_4 r^{-2}$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, A, D_1\}, \tag{9}$$

где

$$A = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + t y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + t z_k\frac{\partial}{\partial z_k}, \tag{10}$$

$$D_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial}{\partial z_k}; \tag{11}$$

г) $F\left(r^2\right) = \lambda_5\left(r^2\right)^{\beta}$, $F\left(r^2\right) = \lambda_5 \ln\left(r^2\right)$, $\beta = 0$,

$$\mathcal{B} = \{X_0, X_1, \ldots, X_9, D_2\}, \tag{12}$$

где

$$D_2 = (1-\beta)t\frac{\partial}{\partial t} + x_k\frac{\partial}{\partial x_k} + y_k\frac{\partial}{\partial y_k} + z_k\frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{13}$$

Следствие. Оператор (6) порождает следующие преобразования координат:

$$\begin{aligned}
x'_k &= \left(x_k - \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(x_m - x_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \\
y'_k &= \left(y_k - \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(y_m - y_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \\
z'_k &= \left(z_k - \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)\cos\sqrt{3}a + \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon_{kmn}(z_m - z_n)\sin\sqrt{3}a + \frac{z_1+z_2+z_3}{3}, \qquad k = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства воспользуемся методом С. Ли, современное изложение которого приведено в [3]. Условие инвариантности уравнения (1) относительно преобразований, порождаемых инфинитезимальным оператором

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \eta^{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{y_i}\frac{\partial}{\partial y_i} + \eta^{z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{15}$$

где ξ, η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i} — функция от t, x_j, y_j, z_j, $j = 1,2,3$, имеет вид

$$\overset{\approx}{X}\Phi|_{\Phi=0} = 0, \tag{16}$$

где $\overset{\approx}{X}$ — второе продолжение оператора (15), Φ — многообразие, определяемое уравнением (1).

Решая уравнение (16), получаем условия на ξ, η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i}:

$$\begin{aligned}
&U_{x_k}\eta^{x_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{x_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{x_i}_{z_k} - 2U_{x_i}\xi_t = (\eta^{x_i} - \eta^{x_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{x_i} - \eta^{x_k})\dot{F}_{ik} + (x_i - x_j)\ddot{F}_{ij}X(r^2_{ij}) + (x_i - x_k)\ddot{F}_{ik}X(r^2_{ik}), \\
&U_{x_k}\eta^{y_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{y_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{y_i}_{z_k} - 2U_{y_i}\xi_t = (\eta^{y_i} - \eta^{y_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{y_i} - \eta^{y_k})\dot{F}_{ik} + (y_i - y_j)\ddot{F}_{ij}X(r^2_{ij}) + (y_i - y_k)\ddot{F}_{ik}X(r^2_{ik}), \\
&U_{x_k}\eta^{z_i}_{x_k} + U_{y_k}\eta^{z_i}_{y_k} + U_{z_k}\eta^{z_i}_{z_k} - 2U_{z_i}\xi_t = (\eta^{z_i} - \eta^{z_j})\dot{F}_{ij} + \\
&\quad + (\eta^{z_i} - \eta^{z_k})\dot{F}_{ik} + (z_i - z_j)\ddot{F}_{ij}X(r^2_{ij}) + (z_i - z_k)\ddot{F}_{ik}X(r^2_{ik}),
\end{aligned} \tag{17.1}$$

$$\begin{aligned}
&\xi = b_0t^2 + \gamma t + d, \\
&\eta^{x_i} = b_0x_it + a^{ix_j}x_j + a^{iy_j}y_j + a^{iz_j}z_j + a^{i0}t + d^{x_i}, \\
&\eta^{y_i} = b_0y_it + c^{ix_j}x_j + c^{iy_j}y_j + c^{iz_j}z_j + c^{i0}t + d^{y_i}, \\
&\eta^{z_i} = b_0z_it + e^{ix_j}x_j + e^{iy_j}y_j + e^{iz_j}z_j + e^{i0}t + d^{z_i},
\end{aligned} \tag{17.2}$$

где

$$\dot{F}_{ik} = \frac{dF\left(r_{ik}^2\right)}{d(r_{ik})^2}, \qquad i \neq j \neq k, \qquad i, j, k = 1, 2, 3;$$

b_0, γ, d, a^{ix_j}, a^{iy_j}, a^{iz_j}, a^{i0}, d^{x_i}, c^{ix_j}, c^{iy_j}, c^{iz_j}, c^{i0}, d^{y_i}, e^{ix_j}, e^{iy_j}, e^{iz_j}, e^{i0}, d^{z_i} — групповые постоянные;

$$X\left(r_{ij}^2\right) = 2(x_i - x_j)(\eta^{x_i} - \eta^{x_j}) + 2(y_i - y_j)(\eta^{y_i} - \eta^{y_j}) + 2(z_i - z_j)(\eta^{z_i} - \eta^{z_j}). \quad (18)$$

Изучение уравнений (17.1), (17.2) распадается на несколько случаев.

а) Пусть уравнение (1) инвариантно относительно оператора (10) . Расщепляя уравнения (17.1) по x_j, y_j, z_j, получаем

$$-2\dot{F}\left(r^2\right) = \ddot{F}\left(r^2\right) r^2. \quad (19)$$

Решением уравнения (19) является функция (4.3).

б) Пусть в уравнении (17.1) $X\left(r_{ik}^2\right) = 0$. Тогда уравнение (1) инвариантно относительно 10-мерной алгебры (3) для любой достаточно гладкой функции F.

в) Если $\ddot{F}_{ij} = 0$, то $F\left(r^2\right) = \lambda_3 r^2 + \delta$. Применяя алгоритм С. Ли [3] к уравнению (1) с потенциалом (4.2), устанавливаем максимальную алгебру инвариантности (7).

г) $X\left(r_{ik}^2\right) = f\left(r_{12}^2, r_{23}^2, r_{31}^2\right)$. Так как η^{x_i}, η^{y_i}, η^{z_i} линейны по x_j, y_j, z_j, то

$$X\left(r_{ik}^2\right) = 2\dot{h}_{ik}\left(r_{ik}^2\right) + 2h_j\left(r_{ij}^2 - r_{kj}^2\right), \qquad h_{ik}, h_j = \mathrm{const}. \quad (20)$$

Если $h_j = 0$, то $\xi = (1-\beta)t$, $\eta^{x_i} = x_i$, $\eta^{y_i} = y_i$, $\eta^{z_i} = z_i$, т.е. уравнение (1) инвариантно относительно оператора (13).

Уравнение для функции $F\left(r^2\right)$ имеет вид

$$\ddot{F}\left(r^2\right) r^2 = \dot{F}\left(r^2\right)(\beta - 1). \quad (21)$$

Решением уравнения (21) является функция (4.4).

Если $h_{ik} = 0$, то $\eta^{v^{jk}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}(v^{jm} - v^{jn})$, т.е. уравнение (1) инвариантно относительно оператора (6). В таком случае функция $F\left(r^2\right)$ должна удовлетворять уравнению

$$\ddot{F}\left(r^2\right) = \lambda_1, \quad (22)$$

решением которого является функция (4.1).

Доказательство теоремы 2 проводится непосредственным применением алгоритма С. Ли [3] к уравнению (1) с потенциалами (4.1)–(4.4).

2. **Интегралы движения.** Для уравнения (1) с потенциалом (4.1) возникает интеграл движения

$$J = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}[(x_a - x_b)\dot{x}_c + (y_a - y_b)\dot{y}_c + (z_a - z_b)\dot{z}_c]. \quad (23)$$

Его существование обусловлено инвариантностью соответствующего лагранжиана относительно оператора (6). Отметим, что в случае $y_a = z_a = 0$, $a = 1, 2, 3$ из формулы (23) получаем первый интеграл для одномерной задачи трех тел, впервые обнаруженный Ю.Д. Соколовым [1], а при $z_a = 0$ — интеграл движения для плоской задачи трех тел, найденный в [2]. Интеграл (23) без использования симметрийных свойств найден в [4].

3. **Частные решения.** Для построения решений уравнения (1) совместим центр тяжести системы трех тел с полюсами системы координат и сделаем следующую замену переменных:

$$
\begin{aligned}
3x_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right),\\
3y_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi k}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi(k+1)}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right),\\
3z_k &= S_1\cos\left(\alpha_1+\frac{2\pi(k+1)}{3}\right)+S_2\cos\left(\alpha_2-\frac{2\pi k}{3}\right)+\\
&\quad +S_3\cos\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right)+S_4\sin\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{2\pi(k-1)}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

В новых переменных $\{S_1,S_2,S_3,S_4,\alpha_1,\alpha_2\}$ выражение для кинетической энергии принимает вид

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)=\frac{1}{4}\Bigg[\dot{S}_1^2+\dot{S}_2^2+\dot{S}_3^2+\dot{S}_4^2+(S_1\dot{\alpha}_1)^2+(S_2\dot{\alpha}_2)^2+\\
&\quad+\left(S_3^2+S_4^2\right)\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+(\dot{S}_3S_4-S_3\dot{S}_4)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Потенциал взаимодействия (3) зависит только от S_i, $i=1,2,3,4$:

$$
\begin{aligned}
U &= \lambda_1\left[r_{12}^4+r_{23}^4+r_{31}^4\right]+\lambda_2\left[r_{12}^2+r_{23}^2+r_{31}^2\right]=\frac{3}{2}\lambda_2\left[S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right]+\\
&+\lambda_1\left[\frac{3}{4}\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)^2+\frac{3}{8}\left(S_4^2-S_3^2-2S_1S_2\right)^2+\frac{3}{2}(S_3S_4)^2\right].
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ddot{S}_1-\frac{1}{2}S_1\dot{\alpha}_1^2=-\frac{\partial U}{\partial S_1},\qquad \frac{1}{2}\ddot{S}_2-\frac{1}{2}S_2\dot{\alpha}_2^2=-\frac{\partial U}{\partial S_2},\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{S}_3+\frac{1}{4}S_4(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)\right]-\frac{1}{2}S_3\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\dot{S}_4(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)=-\frac{\partial U}{\partial S_3},\\
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{S}_4+\frac{1}{4}S_3(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)\right]-\frac{1}{2}S_4\left(\frac{\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\dot{S}_3(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)=-\frac{\partial U}{\partial S_4},\\
&\frac{d}{dt}\left[S_1^2\dot{\alpha}_1+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\dot{S}_3S_4-S_3\dot{S}_4)\right]=0,\\
&\frac{d}{dt}\left[S_2^2\dot{\alpha}_1+\frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot{\alpha}_2-\dot{\alpha}_1)+\frac{1}{2}(S_3\dot{S}_4-\dot{S}_3S_4)\right]=0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Отметим, что если положить в уравнениях (27) $S_3 = S_4 = 0$, то приходим к уравнениям, полученным в [2] для плоской задачи трех тел.

Если предположить, что S_1, S_2, S_3, S_4, $\dot\alpha_1$, $\dot\alpha_2$ постоянны, то в этом случае система дифференциальных уравнений (27) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
S_1\dot\alpha_1^2 = \lambda_1\left[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_1 + \frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_2\right] + 3\lambda_2 S_1, \\
S_2\dot\alpha_2^2 = \lambda_1\left[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_2 + \frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_1\right] + 3\lambda_2 S_2, \\
S_3(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)^2 = 8\lambda_1\Big[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_3 + \\
+\frac{3}{2}\left(2S_1S_2+S_3^2-S_4^2\right)S_3 + 3S_3S_4^2\Big] + 24\lambda_2 S_3, \\
S_4(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2)^2 = 8\lambda_1\Big[3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2\right)S_4 + \\
+\frac{3}{2}\left(S_4^2-S_3^2-2S_1S_2\right)S_4 + 3S_3^2S_4\Big] + 24\lambda_2 S_4, \\
S_1^2\dot\alpha_1 + \frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot\alpha_1-\dot\alpha_2) = C_1, \qquad S_2^2\dot\alpha_2 + \frac{1}{4}\left(S_3^2+S_4^2\right)(\dot\alpha_2-\dot\alpha_1) = C_2,
\end{gathered} \tag{28}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Разрешая систему (28), получаем частные решения уравнения (32), а значит, и пространственной задачи трех тел (1).

1. Соколов Ю.Д., *ДАН*, 1945, **46**, № 3, 99–102.
2. Егервари Е., *ДАН*, 1947, **55**, № 9, 805–807.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978, 400 с.
4. Газархи Л.А., *Укр. мат. журн.*, 1956, **8**, № 1, 5–11.