Точные решения нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного поля

В.И. ФУЩИЧ, Р.З. ЖДАНОВ

Построены новые многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака и уравнений для взаимодействующих спинорного и векторного полей.

Введение.

В настоящей работе построены широкие классы точных решений нелинейной системы уравнений Дирака

$$\left[\gamma^\mu p_\mu + \lambda(\bar\psi\psi)^{1/2k}\right]\psi(x) = 0, \qquad k \neq 0, \tag{1}$$

γ_μ — 4×4 матрицы Дирака, $p_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $\bar\psi = \psi^+\gamma_0$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, ψ — четырехкомпонентный спинор, k, λ — параметры и системы восьми нелинейных уравнений

$$\begin{gathered}
[\gamma^\mu p_\mu + \lambda_1\gamma^\mu A_\mu + m_1]\psi(x) = 0, \\
p^\nu p_\nu A^\mu - p^\mu p_\nu A^\nu = e\bar\psi\gamma^\mu\psi + m_2 A^m + \lambda_2 A^\mu A_\nu A^\nu,
\end{gathered} \tag{2}$$

A^μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, λ_1, λ_2, m_1, m_2, e — константы. Если в системе (2) положить $m_2 = \lambda_2 = 0$, то она совпадает с уранениями классической электродинамики, описывающими взаимодействие электромагнитного и спинорного полей.

Для построения многопараметрических семейств точных решений (1), (2) существенно используются симметрийные свойства уравнений и анзатц

$$\psi(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x), \tag{3}$$

предложенный в [1, 2] и эффективно реализованный в [3–6] для ряда нелинейных волновых уравнений. $A(x)$ — 4×4-матрица, $B(x)$ — четырехкомпонентный спинор, алгоритм построения которых приводится ниже; $\varphi(\omega)$ — вектор-столбец, компоненты которого в общем случае зависят от трех инвариантных переменных $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ (более подробно об этом см. [1, 2]).

Далее рассматривается анзатц (3) при $B(x) = 0$.

Используя конечные преобразования, устанавливаем, что уравнение (1) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,3)$, т.е. группы Пуанкаре $P(1,3)$, дополненной группой масштабных преобразований. Базисные элементы алгебры Ли $A\tilde P(1,3)$ группы $\tilde P(1,3)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \\
&D = x_\mu p^\mu - ik, \qquad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).
\end{aligned} \tag{4}$$

Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, С. 20–30.

Общая схема построения решений уравнения (1) (аналогично строятся решения системы (2)) такова. Ищем решения уравнения (1), инвариантные относительно подгруппы группы $\tilde{P}(1,3)$, порождаемой линейной комбинацией всех базисных элелентов $A\tilde{P}(1,3)$,

$$Q = C^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + C^{00} D + C^{\mu} P_{\mu}, \tag{5}$$

где $C^{\mu\nu}$, C^{00}, C^{μ} — константы, $C^{\mu\nu} = -C^{\nu\mu}$, $0 \le \mu, \nu \le 3$. Матрица $A(x)$ ищется из условия

$$QA(x) = 0. \tag{6}$$

Инвариантные переменные являются первыми интегралами системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Эйлера–Лагранжа

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x)} = \frac{dx_a}{\xi^a(x)}, \qquad a = \overline{1,3}, \tag{7}$$

где $\xi^{\mu} = C^{\mu\nu} x_{\nu} + C^{00} x^{\mu} + C^{\mu}$.

Если построить явный вид матриц $A(x)$, удовлетворяющих уравнению (7), то для спинора $\varphi(\omega)$ получим уравнение, зависящее только от трех инвариантных переменных $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, т.е. анзатц (3) с матрицами $A(x)$, удовлетворяющими условию (7), приведет к “разделению” переменных в уравнении (1). Решения соответствующего уравнения для $\varphi(\omega)$, будучи подставленными в (3), дают решения исходного уравнения (1).

Для реализации этой схемы прежде всего нужно построить в явном виде матрицы $A(x)$, удовлетворяющие уравнению (7), т.е. найти частное решение линейной системы 16 дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) первого порядка с переменными коэффициентами. Решить эту систему ДУЧП стандартными методами непросто. Поэтому решаем ее таким образом. Оператор Q преобразуем с помощью обратимого оператора

$$W(x,p) = \exp\{\theta\Sigma\}, \qquad W^{-1}(x,p) = \exp\{-\theta\Sigma\} \tag{8}$$

к виду

$$Q' = WQW^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\Sigma = \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^{\mu} P_{\mu}. \tag{10}$$

Преобразование W выбирается таким, чтобы оператор Q' имел максимально простой вид. Этого всегда можно достичь, поскольку уравнение (1) инвариантно относительно преобразований Лоренца. На физическом языке это означает, что нелинейная система уравнений Дирака решается в фиксированной системе отсчета, а затем с помощью процедуры группового размножения строятся решения, которые не зависят от использованной системы отсчета.

§ 1. Точные решения нелинейного уравнения Дирака (1)

Приводим многопараметрические, неразмножаемые семейства решений уравнения (1). Неразмножаемость означает, что рассматриваемые семейства инвариантны по отношению к операции размножения размножения решений с помощью конечных преобразований из группы инвариантности уравнения (1). Указываются только те решения, которые являются существенно новыми.

1. $k \in R^1$, $k \neq 0$,

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)b \cdot z)\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a)2a \cdot z + \theta(b \cdot z)^2\right\}\chi, \tag{1.1}$$

$$\gamma \cdot a \equiv \gamma^\mu a_\mu, \qquad a \cdot z \equiv a^\mu z_\mu, \qquad z_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

χ — произвольный постоянный спинор, θ, θ_μ, a_μ, b_μ — произвольные константы, удовлетворяющие условиям:

$$a_\mu a^\mu = -1, \qquad b_\mu b^\mu = 0, \qquad a_\nu b^\nu = 0. \tag{1.2}$$

Неразмножаемость семейства (1.1) с помощью преобразований из группы сдвигов и группы масштабных преобразований вполне очевидна. Докажем, что это свойство выполнено, и для группы преобразований, порождаемой оператором J_{01}, имеет вид:

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1\alpha\right\}\psi_1(x'),$$

$$x_0' = x_0 \operatorname{ch}\alpha + x_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad x_1' = x_1 \operatorname{ch}\alpha - x_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

Применяя эту формулу, взяв в качестве $\psi_1(x)$ решение (1.1), после несложных преобразований получаем новое решение

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{\theta'}{2}(\gamma \cdot a')(\gamma \cdot b')b' \cdot z)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}'\chi')^{1/2k}(\gamma \cdot a')\left[2a' \cdot z + \theta'(b' \cdot z)^2\right]\right\}\chi',$$

где

$$a_0' = a_0 \operatorname{ch}\alpha + a_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad a_1' = a_1 \operatorname{ch}\alpha - a_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad a_2' = a_2, \quad a_3' = a_3,$$
$$b_0' = b_0 \operatorname{ch}\alpha + b_1 \operatorname{sh}\alpha, \quad b_1' = b_1 \operatorname{ch}\alpha - b_0 \operatorname{sh}\alpha, \quad b_2' = b_2, \quad b_3' = b_3,$$
$$\theta' = \theta, \quad \chi' = \exp\left\{\frac{\alpha}{2}\gamma_0\gamma_1\right\}\chi.$$

Нетрудно убедиться, что параметры a_μ', b_μ', θ' удовлетворяют условиям (1.2), т.е. решение $\psi_2(x)$ вновь принадлежит семейству (1.1), что и требовалось доказать. Инвариантность семейства (1.1) относительно остальных преобразований из группы $O(1,3)$ проверяется совершенно аналогично.

2. $k \in R^1$, $k \neq 1/2$,

$$\psi(x) = \left[(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2\right]^{(k-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a \cdot z}{b \cdot z}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-i(\gamma \cdot b)\frac{2k\lambda}{1-2k}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}\left[(a \cdot z)^2 + (b \cdot z)^2\right]^{(1-2k)/(4k)}\right\}\chi, \tag{1.3}$$

причем

$$a_\mu a^\mu = b_\mu b^\mu = -1, \qquad a_\nu b^\nu = 0, \tag{1.4}$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

3. $k = 1/2$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \left[(a\cdot z)^2 + (b\cdot z)^2\right]^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\right\}\times\\ \times\exp\left\{-i\lambda\frac{\bar\chi\chi}{2(1+\theta^2)}(\gamma\cdot b + \theta\gamma\cdot a)\Big[\ln\left[(a\cdot z)^2 + (b\cdot z)^2\right] + 2\theta\operatorname{arctg}\frac{a\cdot z}{b\cdot z}\Big]\right\}\chi,\end{gathered} \tag{1.5}$$

$z_\mu = x_\mu + \theta_\mu$; a_μ, b_μ, θ, θ_μ — произвольные константы, удовлетворяющие условию (1.4).

$$\begin{gathered}\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot b)b\cdot z\right\}\Big[(\gamma\cdot a + \beta\gamma\cdot b)(a\cdot z + \beta b\cdot z) +\\ + \frac{1}{4}\gamma\cdot c\left(c\cdot z + (b\cdot z)^2\right)\Big]\omega^{-1}\exp\left\{-i\frac{\lambda\bar\chi\chi}{\beta_1^2+\beta_2^2}(\beta_1(\gamma\cdot a + \beta\gamma\cdot b) +\right.\\ \left. + \frac{1}{2}\beta_2\gamma\cdot c)\left[\beta_1(a\cdot z + \beta b\cdot z) + \frac{1}{2}\beta_2\left(c\cdot z + (b\cdot z)^2\right)\right]\omega^{-1}\right\}\chi,\\ \omega = (a\cdot z + \beta b\cdot z)^2 + \frac{1}{4}\left(c\cdot z + (b\cdot z)^2\right)^2, \qquad z_\mu = x_\mu + \theta_\mu,\end{gathered} \tag{1.6}$$

θ_μ, a_μ, b_μ, c_μ, β, β_i — произвольные константы, удовлетворяющие условиям:

$$a^\mu b_\mu = b^\mu c_\mu = c^\mu a_\mu = b^\nu b_\nu = 0, \quad a_\mu a^\mu = -1, \quad c_\mu c^\mu = -4. \tag{1.7}$$

4. $k < 0$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(\gamma\cdot b)b\cdot z\right\}\times\\ \times\left\{\left[(\gamma\cdot a + \beta\gamma\cdot b)(a\cdot z + \beta b\cdot z) + \frac{1}{4}(\gamma\cdot c)(c\cdot z + (b\cdot z)^2)\right] + ig(\omega)\right\}\chi,\\ g(\omega) = \mp\sqrt{\frac{1+|k|}{|k|}}\omega^{1/2}f(\omega) = \mp\sqrt{\frac{1+|k|}{|k|}}\left\{\mp\frac{\sqrt{k^2+|k|}}{2\lambda(\bar\chi\chi)^k}\right\}^{2k}\omega^{-k/2},\\ \omega = (a\cdot z + \beta b\cdot z)^2 + \frac{1}{4}(c\cdot z + (b\cdot z)^2)^2, \qquad z_\mu = x_\mu + \theta_\mu,\end{gathered} \tag{1.8}$$

причем параметры a_μ, b_μ, c_μ, θ, β удовлетворяют условию (1.6), χ — произвольный постоянный спинор.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай $k = 1/3$. Уравнение (1) в этом случае инвариантно относительно конформной группы $C(1,3)$ (см. [7]) и поэтому, используя операцию размножения с помощью группы специальных конформных преобразораний, можно получить более широкое семейство решений уравнения (1) при $k = 3/2$. Соответствующие формулы имеют вид ([4]):

$$\begin{gathered}\psi_2(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\psi_1(x')\\ x'_\mu = \frac{x_\mu - \theta_\mu x^2}{\sigma(x)}, \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta\cdot x + \theta^2 x^2, \quad \theta^2 = \theta^\nu\theta_\nu, \quad x^2 = x^\nu x_\nu.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Используя в качестве $\psi_1(x)$ решения (1.1), (1.3) при $k = 3/2$, получаем решения конформно-инвариантного уравнения Дирака

$$\begin{gathered}\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\exp = \left\{\frac{\tilde\theta}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\frac{b\cdot x - b\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}\right\}\times\\ \times\exp\left\{-i\frac{\lambda}{2}(\bar\chi\chi)^{1/3}(\gamma\cdot a)\frac{2(a\cdot x - a\cdot\theta x^2)\sigma(x) + \tilde\theta(b\cdot x - b\cdot\theta x^2)^2}{\sigma^2(x)}\right\}\chi,\end{gathered} \tag{1.10}$$

$a_\mu a^\mu = -1$, $b_\mu b^\mu = 0$, $a_\mu b^\mu = 0$; θ_μ, $\tilde\theta$ — произвольные константы, χ — произвольный постоянный спинор.

$$\begin{gathered}\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^{3/2}(x)}\left[((a\cdot x) - a\cdot\theta x^2)^2 + (b\cdot x - b\cdot\theta x^2)\right]^{1/4}\times\\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{b\cdot x - b\cdot\theta x^2}\right)\right\}\times\\ \times\exp\left\{-i\gamma\cdot b\frac{3\lambda}{2}\left[\frac{(a\cdot x - a\cdot\theta x^2)^2 + (b\cdot x - b\cdot\theta x^2)^2}{\sigma^2(x)}\right]^{-1/3}(\bar\chi\chi)^{1/3}\right\}\chi,\end{gathered} \tag{1.11}$$

$a_\mu a^\mu = b_\nu b^\nu = -1$, $a_\nu b^\nu = 0$, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

§ 2. Точные решения системы управления (2)

Будем искать решения системы (2) при $m_1 = m_2 = 0$. Нам удалосъ получить три класса точных решений:

1. $\lambda > 0$, $c_1 \neq 0$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \gamma\cdot b\cdot\exp\left\{-i\lambda_1\lambda_2^{-1/2}\mathrm{arctg}\left[\frac{\lambda_2^{1/2}}{k}(c_1 a\cdot x + c_2)\right]\right\}\chi,\\ A_\mu(x) = \pm b_\mu c_1^{-1/2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2} - a_\mu\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

2. $\lambda_2 < 0$, $c_1 \neq 0$

$$\begin{gathered}\psi(x) = \gamma\cdot b\exp\left\{i\frac{\lambda_1}{2|\lambda_2|^{1/2}}\ln\left|\frac{|\lambda_2|^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2) - k}{|\lambda_2|^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2) + k}\right|\right\}\chi,\\ A_\mu(x) = \pm b_\mu c_1^{-1/2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2} - a_\mu\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[(c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

3. $\lambda_2 < 0$

$$\psi(x) = \gamma \cdot b \exp\left\{-i\lambda_1|\lambda_2|^{-1/2}\ln\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x + c_3\right)\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm b_\mu\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x + c_3\right)^{1/2} - a_\mu\frac{k}{|\lambda_2|}\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}a\cdot x + c_3\right)^{-1}. \tag{2.3}$$

Здесь: $k = eb^\mu\bar{\chi}\gamma_\mu\chi/(a^\nu b_\nu)$, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор

$$b_\mu b^\mu = a_\mu a^\nu = 0, \qquad b_\mu a^\mu \neq 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что полученные решения зависят от параметров λ_1, e аналитически, в то время как параметр λ_2 входит в решение сингулярно. Это означает, что решения (2.1)–(2.3) не могут быть получены в рамках теории возмущений путем разложения в ряд по малому параметру λ_2.

Вводя обычным образом тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu$, для найденных решений получаем:

$$F_{\mu\nu} = \pm(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)c_1^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2)\left[c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1/2}, \tag{2.5}$$

$$F_{\mu\nu} = \pm(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)c_1^{1/2}(c_1 a\cdot x + c_2)\left[c_1 a\cdot x + c_2)^2 - \frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1/2}, \tag{2.6}$$

$$F_{\mu\nu} = \pm(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)k\lambda_2^{-1}(2k\lambda_2 a\cdot x + c_2)^{-1/2}. \tag{2.7}$$

Для получения новых семейств решений системы уравнений (2) воспользуемся тем фактом, что она инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$ (см. [6]). Легко убедиться, что решения (2.1)–(2.3) неразмножимы с помощью преобразований из расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3) \subset C(1,3)$. Поэтому для получения неразмножимых относительно группы $C(1,3)$ решений системы (2) достаточно размножить полученные решения с помощью группы специальных конформных преобразований. Как было показано в [8], формула размножения решений в этом случае имеет вид

$$\psi_2(x) = \frac{1 - (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x)}\psi_1(x').$$

$$\begin{aligned} 4.\quad & A_\mu^{(2)}(x) = \sigma^{-2}(x)\{g_{\mu\nu}\sigma(x) + 2(\theta_\mu x_\nu - \theta_\nu x_\mu + 2\theta x x_\mu\theta_\nu - \\ & \quad -x^2\theta_\mu\theta_\nu - \theta^2 x_\mu x_\nu)\}A^\nu_{(1)}(x'), \\ & x'_\mu = \frac{x_\mu - \theta_\mu x^2}{\sigma(x)}, \qquad \sigma(x) = 1 - 2\theta\cdot x + \theta^2 x^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя в формулу (2.8) вместо ψ, $A^\mu_{(1)}$ решения (2.1)–(2.3), получаем следующие семейства решений:

5. $\lambda_2 > 0,\ c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot c)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$
$$\times\exp\left\{-i\lambda_1\lambda_2^{-1/2}\mathrm{arctg}\left[\frac{\lambda_2^{1/2}}{k}\left(c_1\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)\right]\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm c_1^{-1/2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.9}$$
$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu b\cdot x - x_\mu b\cdot\theta + 2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot b - \theta_\mu x^2\theta\cdot b - x_\mu\theta^2 b\cdot x\right]\right\}-$$
$$-\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$
$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x - x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\cdot\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a - x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

6. $\lambda_2 < 0,\ c_1 \neq 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\lambda_1}{2|\lambda_2|^{1/2}}\ln\left|\frac{|\lambda_2|^{1/2}\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)-k}{|\lambda_2|^{1/2}\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)+k}\right|\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm c_1^{-1/2}\left[\left(\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.10}$$
$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu b\cdot x - x_\mu b\cdot\theta + 2\theta x\cdot b x_\mu - \theta_\mu x^2\theta\cdot b - x_\mu\theta^2 b\cdot x\right]\right\}-$$
$$-\frac{kc_1}{\lambda_2}\left[\left(c_1\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_2\right)^2-\frac{k^2}{\lambda_2}\right]^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$
$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x - x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a - x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

7. $\lambda_2 < 0$

$$\psi(x) = \frac{1-(\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\gamma\cdot b\times$$
$$\times\exp\left\{-i\lambda_1|\lambda_2|^{-1/2}\ln\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)\right\}\chi,$$
$$A_\mu(x) = \pm\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)^{1/2}\sigma^{-2}(x)\times \tag{2.11}$$
$$\times\left\{b_\mu\sigma(x)+2\left(\theta_\mu b\cdot x - x_\mu b\cdot\theta + 2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot b - \theta_\mu x^2\theta\cdot b - x_\mu\theta^2 b\cdot x\right)\right\}-$$
$$-k|\lambda_2|^{-1}\left(2k|\lambda_2|^{-1/2}\frac{a\cdot x-a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)}+c_3\right)^{-1}\sigma^{-2}(x)\times$$
$$\times\left\{a_\mu\sigma(x)+2\left[\theta_\mu a\cdot x - x_\mu a\cdot\theta+2x_\mu\theta\cdot x\theta\cdot a-\theta_\mu x^2\theta\cdot a - x_\mu\theta^2 a\cdot x\right]\right\}.$$

Выражения для тензора $F_{\mu\nu}$, соответствующие решениям (2.9)–(2.11), очень громоздки и их опускаем. По этой же причине не приводим доказательство неразмножаемости этих решений с помощью преобразований из группы $C(1,3)$.

§ 3. Точные решения уравнений для спинорного и скалярного полей

Подход, изложенный во введении, может быть применен к системе нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu p^\mu \psi = \left[\lambda_1 u + \lambda_2 (\bar\psi\psi)^{1/3}\right]\psi, \\ &p_\mu p^\mu u = \left[\mu_1 u + \mu_2 (\bar\psi\psi)^{1/3}\right] u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u = u_1(x) + iu_2(x)$ — комплекснозначная скалярная функция, λ_i, μ_i — действительные константы.

Для нахождения точных решений системы (3.1) используем анзатц

$$\begin{aligned} &\psi(x) = \left(\gamma^\mu \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} f(\omega) + ig(\omega)\right)\chi, \\ &u(x) = \phi_1(\omega) + i\phi_2(\omega), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\omega = \omega(x)$ — неизвестная дифференцируемая функция, χ — произвольный постоянный спинор, f, g, ϕ_i — функции, подлежащие определению. Подставляя (3.2) в (3.1), получаем редуцированную систему уравнений

$$\begin{aligned} &p_\mu p^\mu \omega + A(\omega) = 0, \qquad (p_\mu\omega)(p^\mu\omega) + B(\omega) = 0, \\ &A(\omega)\dot\phi_i + B(\omega)\ddot\phi_i + \left[\mu_1|\phi| + \mu_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right]\phi_i = 0, \quad i = 1,2, \\ &\dot g - \left[\lambda_1|\phi| + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right] f = 0, \\ &A(\omega)f + B(\omega)\dot f - \left[\lambda_1|\phi| + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\left(g^2 + B(\omega)f^2\right)^{1/3}\right] g = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по ω.

Подробный анализ уравнений (3.3) будет проведет позже. Здесь приведем некоторые классы точных решений системы (3.1), полученные из (3.3):

$$\begin{aligned} 1.\quad &\psi(x) = \pm\sqrt{c_1}\frac{1 - (\gamma\cdot x)(\gamma\cdot\theta)}{\sigma^2(x)}\times \\ &\times\left\{\gamma\cdot a\sin\left[\left(\lambda_1 c + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}c_1^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + c_2\right] + \right.\\ &\left. + i\cos\left[\left(\lambda_1 c + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}c_1^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + c_3\right]\right\}\chi, \\ &u(x) = \pm\frac{c}{\sigma(x)}\exp\left\{\pm i\left(\mu_1 c + \mu_2 c^{1/3}(\bar\chi\chi)^{1/3}\right)\frac{a\cdot x - a\cdot\theta x^2}{\sigma(x)} + iC_3\right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

θ_μ, a_μ, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

$$\begin{aligned} 2.\quad &\psi(x) = q_1\left(x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2\right)^{-3/4}\left(\frac{\gamma\cdot x + \gamma\cdot\theta}{\sqrt{x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2}} \pm i\right)\chi, \\ &u(x) = q_2\left(\lambda_1 q_2 + \lambda_2(\bar\chi\chi)^{1/3}\right)^{-1}\left(x^2 + 2\theta\cdot x + \theta^2\right)^{-1}\exp\{ic\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $q_1 = \left[\pm 3 \cdot 2^{-4/3}\left(\lambda_1 q_2 + \lambda_2(\bar{\chi}\chi)^{1/3}\right)\right]^{3/2}$, C— постоянная, χ — произвольный постоянный спинор и выполнено условие

$$\left[\frac{\mu_1 q_2 + \mu_2(\bar{\chi}\chi)^{1/3}}{\lambda_1 q_2 + \lambda_2(\bar{\chi}\chi)^{1/3}}\right]^2 = \frac{4}{9}.$$

Можно доказать, что семейства решений (3.4), (3.5) являются неразмножаемыми относительно конформной группы $C(1,3)$, которая является максимальной локальной группой инвариантности уравнения (3.1), но из-за большой громоздкости выкладок мы опускаем доказательство.

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Об инвариантных решениях нелинейного уравнения Дирака, *Докл. АН СССР*, 1983, **269**, № 1, 88–92.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, **16**, № 2, 271–277.
5. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *Докл. АН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
6. Фущич В.И., Цифра И.М., О симметрии нелинейных уравнений электродинамики, *Теор. и мат. физика*, 1985, **64**, № 1, 41–50.
7. Gürsey F., On conformal-invariant spinor wave equation, *Nuovo Cim.*, 1956, **111**, № 5, 980–997.
8. Fushchych W.I., Shtelen W.M., On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics, *Phys. Lett. B*, 1983, **128**, № 3–4, 215–217.