W.I. Fushchych, Scientific Works 2000, Vol. 2, 538–556.

Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа-Ампера, Дирака

В.И. ФУЩИЧ, В.А. ТЫЧИНИН, Р.З. ЖДАНОВ

Методом нелокальных преобразований линеаризованы уравнения типа Монжа–Ампера и Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Построены в явном виде семейства точных решений таких уравнений. Получено общее решение двумерной нелинейной системы четырех уравнений Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Построено общее решение двумерно нелинейной системы Дирака–Максвелла.

Методом нелокальных преобразований [1–3] проведена линеаризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Монжа–Ампера, Борна–Инфельда и Дирака–Гейзенберга–Тирринга. Исследована локальная и нелокальная симметрии двумерной нелинейной системы четырех уравнений типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга, построено общее решение этого уравнения. Для двумерных уравнений квантовой электродинамики найдено общее решение.

§ 1. Введение

Уравнения Монжа–Ампера, Борна–Инфельда, Дирака–Гейзенберга–Тирринга, Максвелла–Дирака играют важную роль в геометрии, математической и теоретической физике. Простейшее двумерное уравнение Монжа–Ампера вида

$$|u_{ij}| \equiv u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = \phi(x, y, u, \underset{1}{u}), \qquad (i, j = x, y)$$

широко используется при изучении свойств выпуклых поверхностей [4, 5], при решении многомерной проблемы Минковского [6], в вариационных задачах, в квантовой теории.

С уравнениями Монжа–Ампера часто встречаются при решении прикладных задач, в частности, при интегрировании уравнений течения политропного газа [2] приходится рассматривать уравнение вида

$$|\xi_{ij}| \equiv \xi_{\psi\psi}\xi_{pp} - \xi_{\psi p}^2 = -\Gamma^2(\psi)P^2(p), \qquad (i, j = \psi, p). \tag{1}$$

Уравнения Монжа–Ампера оказываются полезными при решении задач, связанных с уравнениями минимальных поверхностей (Эйлера–Лагранжа), Борна–Инфельда и другими. Уравнения вида

$$|u_{ij}| \equiv u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)\phi(u_x, u_y), \qquad (i, j = x, y) \tag{2}$$

представляют самостоятельный интерес [4, 5], т.к. известные свойства решений (2) позволяют судить о свойствах сильно эллиптических уравнений Монжа–Ампера

$$|z_{ij}| = A(x, y, z, \underset{1}{z})z_{xx} + 2B(x, y, z, \underset{1}{z})z_{xy} + C(x, y, z, \underset{1}{z})z_{yy} + D(x, y, z, \underset{1}{z}). \tag{3}$$

Препринт № 85.88, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 28 с.

Несмотря на обширную область приложений уравнений Монжа–Ампера, точные решения для них найдены лишь в некоторых частных случаях. Наиболее известным методом получения общих интегралов уравнений Монжа–Ампера является метод промежуточного интеграла в форме Монжа (Monge) или Булла (Boole) [1].

В последние года находит распространение использование групповых свойств уравнений для построения их точных решений [7]. Этим методом в работе [8] получены новые точные решения уравнения

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \qquad (\mu, \nu = \overline{1, n}) \tag{4}$$

с n независимыми переменными – обобщением уравнения развертывающихся поверхностей

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \qquad (n = 2). \tag{5}$$

В работе [8] установлено также, что уравнение

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda u^{-(n+2)}, \qquad (\lambda = \text{const}) \tag{6}$$

обладает нетривиальной группой симметрии и, следовательно, решение может представлять определений интерес для прикладных исследований.

Систематическое использование метода нелокальных преобразований [3] позволило получить некоторые интегрируемые уравнения Монжа–Ампера и в ряде случаев построить их точные решения. Настоящая работа посвящена изложению полученных результатов.

§ 2. Нелокальная линеаризация уравнений с двумя независимыми переменными

Метод промежуточного интеграла для уравнений Монжа–Ампера опирается на предположение, что существует произвольная функция f, связывающая между собой дифференциальные выражения $u(x, y, z, \underset{1}{z})$ и $v(x, y, z, \underset{1}{z})$. С одной стороны, u и v должны допускаться данным уравнением Монжа–Ампера, с другой — u и v должны быть решениями некоторых дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Методу может быть дана интерпретация в терминах нелокальных преобразований.

Рассмотрим функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$F(x, y, u, \underset{1}{u}) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) назовем исходным. Выполним нелокальное преобразование первого порядка зависимой переменной [3]

$$\begin{aligned} &\tau: \quad u = f(v) = f[v(x, y, z, \underset{1}{z})], \\ &\tau F(u) = F[f(v(x, y, z, \underset{1}{z}))] = \Omega(x, y, z, \underset{1}{z}, \underset{2}{z}). \end{aligned} \tag{8}$$

Если в результате преобразования (8) уравнения (7) приходим к заданному уравнению Монжа–Ампера Ω, то имеет место сведение уравнения Ω к (7) нелокальным преобразованием (8), т.е.

$$\tau(7)\Big|_{\Omega} \equiv 0. \tag{9}$$

Указанный подход позволяет обобщить метод промежуточного интеграла, рассматривая нелокальные преобразования независимых и зависимой переменных.

Выполним преобразование переменных

$$\tau: \quad \begin{aligned} x' &= \varepsilon^x(x, y, u, \underset{1}{u}), \\ y' &= \varepsilon^y(x, y, u, \underset{1}{u}), \\ u' &= \varepsilon^0(x, y, u, \underset{1}{u}) \end{aligned} \tag{10}$$

уравнения

$$\beta^\mu(x', y', u')u'_\mu + \beta^0(x', y', u') = 0, \qquad (\mu = x, y). \tag{11}$$

Полученное уравнение имеет вид

$$a|u_{ij}| + bu_{xx} + du_{xy} + cu_{yy} + f = 0, \qquad (i, j = x, y). \tag{12}$$

Коэффициенты уравнения (12) определяются подстановкой (10) и могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned}
&a = -\beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial q, \partial p} + \beta^y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial q, \partial p} - \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial q, \partial p}; \\
&b = \beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial p, D^1_y} + \beta^y[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{\partial p, D^1_y} + \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial p, D^1_y}; \\
&c = \beta^x[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D^1_x, \partial q} - \beta^y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{D^1_x, \partial q} + \beta^0[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D^1_x, \partial q}; \\
&d = \beta^x\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D^1_y, \partial q} - [\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial p, D^1_x}\right\} - \beta^y\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial q, D^1_y} - [\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial p, D^1_x}\right\} + \\
&\qquad + \beta^0\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial q, D^1_y} - [\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial p, D^1_x}\right\}; \\
&f = \beta^x\left\{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial y, D^1_x} - u_y[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{\partial u, \partial x}\right\} - \beta^y\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{\partial y, D^1_x} - u_y[\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{\partial u, \partial x}]\right\} + \\
&\qquad + \beta^0\left\{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D^1_x, \partial y} - u_y[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{\partial u, \partial x}\right\}; \\
&[\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta]_{\partial\mu, \partial\nu} \equiv \varepsilon^\alpha_\mu\varepsilon^\beta_\nu - \varepsilon^\alpha_\nu\varepsilon^\beta_\mu; \qquad D^1_\mu \equiv \partial_\mu + u_\mu\partial u; \\
&[\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta]_{\partial\mu, D^1_\nu} \equiv \varepsilon^\alpha_\mu D^1_\nu\varepsilon^\beta - D^1_\nu\varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^\beta_\mu; \qquad q \equiv u_y, \qquad p \equiv u_x.
\end{aligned} \tag{13}$$

Найдем нелокальное преобразование переменных первого порядка линейное по всем переменным

$$\begin{aligned} &\tau: \; x^{i\prime} = \varepsilon(x, y, u, \underset{1}{u}) = \alpha^{i\mu}u_\mu + \beta^i_j x^j, \quad i, j = 0, 1, 2; \\ &x^0 \equiv u, \quad \mu = 1, 2, \quad \alpha^{i\mu}, \beta^i_j = \text{const}, \end{aligned} \tag{14}$$

которое осуществляет приведение уравнения

$$u'_{x'} + u'_{y'} = 0 \tag{15}$$

к уравнению Монжа–Ампера (5). Определитель преобразования (14) имеет вид

$$\delta = \begin{vmatrix} D_x\varepsilon^x & D_x\varepsilon^y \\ D_y\varepsilon^x & D_y\varepsilon^y \end{vmatrix} = [\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x, D_y} \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \delta = {} & (u_{x\mu}\alpha^{1\mu} + \beta^1_0 u_x + \beta^1_x)(u_{y\mu}\alpha^{2\mu} + \beta^2_0 u_y + \beta^2_y) - \\ & -(u_{x\mu}\alpha^{2\mu} + \beta^2_0 u_x + \beta^2_x)(u_{y\mu}\alpha^{1\mu} + \beta^1_0 u_y + \beta^1_y), \end{aligned}$$

а производные $\underset{1}{u'}$ вычисляем по формулам

$$u'_{x'} = \frac{[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}, \qquad u'_{y'} = \frac{[\varepsilon^x, \varepsilon^0]_{D_x,D_y}}{[\varepsilon^x, \varepsilon^y]_{D_x,D_y}}.$$

Уравнение (15) в новых обозначениях может быть записано следующим образом:

$$\begin{vmatrix} D_x\varepsilon^0 & D_x\varepsilon^y \\ D_y\varepsilon^0 & D_y\varepsilon^y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_x\varepsilon^x & D_x\varepsilon^0 \\ D_y\varepsilon^x & D_y\varepsilon^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Условия для коэффициентов преобразования τ найдем, потребовав, чтобы в результате получалось уравнение (5), т.е. решая определяющее соотношение

$$\tau(15)\Big|_{(5)} = (16)\Big|_{(5)} \equiv 0. \tag{17}$$

Запишем уравнение (16) иначе

$$[\varepsilon^0, \varepsilon^y]_{D_x,D_y} - [\varepsilon^0, \varepsilon^x]_{D_x,D_y} = [\varepsilon^0, \varepsilon^y - \varepsilon^x]_{D_x,D_y} = 0.$$

Теперь уравнение (17) принимает вид

$$[\varepsilon^0, \varepsilon^y - \varepsilon^x]_{D_x,D_y}\Big|_{u_{xx}u_{yy}=u_{xy}^2} \equiv 0. \tag{18}$$

Расщепляя (18) по степеням производных второго порядка, получаем недоопределенную систему уравнений для пятнадцати коэффициентов

$$\begin{aligned}
&\alpha^{0x}(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}),\\
&\alpha^{0x}(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_y^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}),\\
&\beta_x^0(\alpha^{yx} - \alpha^{xx}) + \alpha^{0y}(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_y^0(\alpha^{yy} - \alpha^{xy}) + \alpha^{0x}(\beta_x^y - \beta_x^x),\\
&\alpha^{0y}(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\alpha^{yy} - \alpha^{xy}),\\
&\beta_x^0(\beta_0^y - \beta_0^x) = \beta_0^0(\beta_x^y - \beta_x^x),\\
&\beta_x^0(\beta_y^y - \beta_y^x) = \beta_0^y(\beta_x^y - \beta_x^x).
\end{aligned} \tag{A}$$

Полагая $k = \alpha^{yx} - \alpha^{xx}$, $\alpha^{0x} \neq 0$, $\alpha^{0y} \neq 0$, $\beta_0^0, \beta_y^0 \neq 0$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&\beta_y^0 - \beta_0^x = k\beta_0^0(\alpha^{0x})^{-1}, \qquad \beta_y^y - \beta_y^x = k\beta_y^0(\alpha^{0x})^{-1},\\
&\alpha^{yy} - \alpha^{xy} = k\alpha^{0y}(\alpha^{0x})^{-1}, \qquad \beta_x^y - \beta_x^x = k\beta_x^0(\alpha^{0x})^{-1}.
\end{aligned}$$

Решению исходного уравнения (15) $u' = \phi(x' - y')$, (ϕ — произвольная функция), отвечает уравнение

$$\begin{aligned}
\alpha^{0x}u_x + \alpha^{0y}u_y + \beta_0^0 u + \beta_x^0 x + \beta_y^0 y = \phi\,[&(\alpha^{xx} - \alpha^{xy})u_x +\\
&+(\alpha^{xy} - \alpha^{yy})u_y + (\beta_0^x - \beta_0^y)u + (\beta_x^x - \beta_x^y)x + (\beta_y^x - \beta_y^x)y] .
\end{aligned}$$

Таким образом всякое решение последнего уравнения, коэффициенты которого удовлетворяют системе (A), является в то же время решением уравнения Монжа–Ампера (5).

Если в исходном уравнении (15) оставить одно слагаемое, т.е. положить

$$u'_{y'} = 0,$$

то соответствующую систему уравнений для коэффициентов преобразования τ, обеспечивающих получение уравнения (5), найдем из (А) при $\varepsilon^y = 0$, ($\alpha^{y\mu} = 0$, $\beta^y_j = 0$)

$$\begin{aligned}
&\alpha^{0x}\beta^x_0 = \beta^0_0\alpha^{xx}, \qquad \alpha^{0x}\beta^x_y = \beta^0_y\alpha^{xx}, \\
&\beta^0_x\alpha^{xx} + \alpha^{0y}\beta^x_y = \beta^0_y\alpha^{xy} + \alpha^{0x}\beta^x_x, \\
&\alpha^{0y}\beta^x_0 = \beta^0_0\alpha^{xy}, \qquad \beta^0_x\beta^x_0 = \beta^0_0\beta^x_x, \qquad \beta^0_x\beta^x_y = \beta^0_y\beta^x_x.
\end{aligned} \tag{Б}$$

При $\alpha^{0x} = 1$, $\beta^y_x = 1$, $\alpha^{yx} = 1$ и остальных нулевых значениях коэффициентов получаем подстановку, удовлетворяющую системе (Б). К найденной только что подстановке вернемся несколько позднее.

Замечание. Некоторые решения уравнения (5) можем найти методом разделения переменных, полагая $u = \phi(x)\psi(y)$. При этом получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения, определяющих ϕ и ψ:

$$\frac{\phi''\phi}{(\phi')^2} = \frac{(\psi')^2}{\psi''\psi} = \nu^2.$$

В случае $\nu = \pm 1$ находим решение

$$u = c_3c_4\exp[c_1x + c_2y], \qquad (c_i = \text{const},\ i = \overline{1,4}).$$

При $\nu \neq \pm 1$ решение имеет вид

$$u = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}[c_3y + c_4]\left\{-\nu^{-2}\frac{c_3y + c_4}{c_1x + c_2}\right\}^{1/(\nu^2-1)}.$$

Рассмотрим уравнение

$$u'_{y'} = \phi(x', y', u', u'_{x'}). \tag{19}$$

Это соответствует уравнению (11) с $\beta^y = 1$, $\beta^x = \phi_p = 0$, $\beta^0 = \phi$. Полученное на стр. 9 нелокальное преобразование переменных

$$\tau: \quad x' = u_y, \quad y' = x, \quad u' = u_x \tag{20}$$

выполним в уравнении (19). Это дает следующее уравнение Монжа–Ампера:

$$|u_{ij}| = u_{yy}\phi(u_y, x, u_x, u_{xy}\cdot u_{yy}^{-1}) \quad (i, j = x, y). \tag{21}$$

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения (21).

1) Полагая в (19) $\phi \equiv 0$, приходим к уравнению развертывающихся поверхностей (5)

$$|u_{ij}| = 0, \qquad (i, j = x, y). \tag{5}$$

Уравнение (19) $u'_{y'} = 0$ имеет решением произвольную функцию переменной x': $u' = f(x')$. Соответствующее решение уравнения (5) находим, заменяя в последнем переменные в соответствии с (20). Это дает уравнение первого порядка

$$u_x = f(u_y),$$

в котором f — произвольная функция.

Таким образом всякое ДУЧП первого порядка, не содержащею явно независимых переменных, имеет решения, удовлетворяющие (5).

Приведем несколько примеров таких решений.

Известно [10], что одним из решений уравнения

$$u_x^2 + u_y^2 = 1$$

является функция

$$u = \phi\left(\alpha \cdot x + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot y + \beta\right), \qquad (\alpha, \beta = \text{const}),$$

где ϕ — произвольная функция. Проверка показывает, что эта функция u удовлетворяет уравнению (5).

Решение $u = 2\sqrt{xy}$ уравнения

$$u_x u_y = 1 \tag{22}$$

также удовлетворяет (5).

Уравнение

$$u_x = \left[a^{-1}\left(c - bu_y^2\right)\right]^{1/2}$$

имеет решением функцию [9]

$$u = c^{1/2}\left[a^{-1}(x-A)^2 + b^{-1}(y-B)^2\right]^{1/2}.$$

A, B, a, b, c — произвольные постоянные. Эта функция также удовлетворяет уравнению (5). Можно привести много других примеров подобного рода.

2) Значению $\phi = 1$ соответствует уравнение

$$|u_{ij}| = u_{yy}, \qquad (i, j = x, y) \tag{23}$$

(оно получается из $u'_{y'} = 1$ подстановкой (20)). Решение исходного уравнения известно

$$u' = y' + f(x').$$

Здесь f — произвольная функция. Таким образом всякое решение уравнения

$$u_x = x + f(u_y)$$

в то же время является решением уравнения (23).

3) При $\phi = u'_{x'}$ в (19) получаем уравнение $u'_{y'} - u'_{x'} = 0$. Его решением является функция $u' = f(x' - y')$. Решения уравнения

$$|u_{ij}| = u_{xy}, \qquad (i, j = x, y) \tag{24}$$

находим, интегрируя уравнение первого порядка

$$u_x = f(u_y - x).$$

4) Полагая $\phi = (u'_{x'})^{-1}$, получаем уравнение

$$|u_{ij}| = u_{yy}^2 u_{xy}^{-1}, \qquad (u_{xy} \neq 0,\ u_{yy} \neq 0), \tag{25}$$

что соответствует исходному уравнению

$$u'_{x'} \cdot u'_{y'} = 1. \tag{22}$$

Решения последнего могут быть получены методом, описанным в [10], и определяются соотношениями

$$x' = \frac{1}{2}\mu^2\nu^2, \qquad y' = \frac{1}{2}\mu^2 + \psi'(\nu),$$
$$u' = \mu^2\nu + \nu\psi'(\nu) - \psi(\nu).$$

Заменяя в последних переменные x', y', u' на u_y, x, u_x, соответственно, и исключая параметры μ и ν, приходим к решениям уравнения (25).

5) Отметим, что исходное уравнение $u'_{y'} = \phi(x', u')$ подстановка (20) приводит к виду

$$|u_{ij}| = u_{yy}\phi(u_x, u_y). \tag{26}$$

Перечень примеров можно продолжить.

Преобразование (20), как следует из (19) и (21), меняет порядок производных. Вместе с тем, по виду оно напоминает известное преобразование Эйлера [9]:

$$\tau: \begin{array}{l} x' = \omega_\xi, \\ y' = y, \quad (\omega_{\xi\xi} \neq 0), \\ u' = \xi\omega_\xi - \omega, \end{array} \tag{27}$$

относящееся к контактным преобразованиям. При преобразовании (27) производные изменяются по закону

$$\begin{array}{l} u'_{x'} = \xi, \qquad u'_{y'} = -\omega_y, \qquad u'_{x'x'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}, \\ u'_{x'y'} = -\omega_{\xi y}\omega^{-1}\xi\xi, \qquad u'_{y'y'} = -|\omega_{\mu\nu}|\omega_{\xi\xi}^{-1}, \qquad (\mu\nu = \xi, y). \end{array} \tag{28}$$

Это позволяет установить соответствие для некоторых уравнений второго порядка и их решений.

1) Для исходного волнового уравнения $u'_{x'x'} - u_{y'y'} = 0$ получаем уравнение Монжа–Ампера

$$|\omega_{\mu\nu}| = -1, \qquad (\mu, \nu = \xi, y). \tag{29}$$

Решению исходного $u' = \phi(x'+y') + \psi(x'-y')$ при этом отвечает решение, определяемое системой

$$y = y, \qquad \xi = \phi'(x+y) + \psi'(x-y),$$
$$\omega = x\left[\phi'(x+y) + \psi'(x-y)\right] - \phi(x+y) - \psi(x-y),$$

в которой функции ϕ и ψ произвольны. Решение уравнения (29) получаем исключив из уравнений системы x.

2) Исходя из уравнений

$$u_{yy} = f(y, u_x)u_{xx}, \tag{30^а}$$

$$u_{yy} = f(y, u_y)u_{xx}, \tag{30^б}$$

получаем соответственно уравнения

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(y, \xi), \qquad (\mu, \nu = \xi, y), \tag{31$^{\text{а}}$}$$

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega_\xi, -\omega_y). \tag{31$^{\text{б}}$}$$

Преобразованием Лежандра [10]

$$\tau: \begin{array}{l} \xi = z_\mu, \qquad y = z_\nu, \\ \omega = \mu z_\mu + \nu z_\nu - z, \end{array}$$
$$\omega_\xi = \mu, \qquad \omega_y = \nu, \qquad \delta \equiv |z_{kl}| \neq 0, \qquad (l, k = \mu, \nu),$$
$$\omega_{\xi\xi} = \delta^{-1} z_{\nu\nu}, \qquad \omega_{\xi y} = -\delta^{-1} z_{\mu\nu}, \qquad \omega_{yy} = \delta^{-1} z_{\mu\mu}.$$

уравнений (31$^{\text{а}}$), (31$^{\text{б}}$) получаем соответственно

$$-|z_{kl}| = f^{-1}(z_\mu, z_\nu), \tag{32$^{\text{а}}$}$$

$$-|z_{kl}| = f^{-1}(\mu, -\nu). \tag{32$^{\text{б}}$}$$

3) Преобразование Эйлера уравнения

$$u_{yy} = f(x, u, u_x) u_{xx}$$

дает уравнение

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega_\xi, \xi\omega_\xi - \omega, \xi), \qquad (\mu, \nu = \xi, y).$$

В частности, из уравнения

$$u_{yy} = f(x u_x - u) u_{xx}$$

получаем следующее уравнение Монжа–Ампера:

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega).$$

Если же исходить из линейного уравнения

$$u_{yy} = f(x, y) u_{xx} + \alpha\phi(x, y),$$

находим

$$|\omega_{\mu\nu}| = \alpha.$$

Замечание. К числу уравнений (30$^{\text{а}}$), (30$^{\text{б}}$) относятся многие широко известные уравнения: Чаплыгина [11], [12]

$$u_{yy} = -K(y) u_{xx},$$

уравнение колебаний нелинейной струны [2]

$$u_{yy} = F^2(u_x) u_{xx}.$$

Преобразование Лежандра преобразует последнее в линейное, а преобразование Эйлера связывает с уравнением Монжа–Ампера

$$-|\omega_{\mu\nu}| = F^2(\xi).$$

Уравнение

$$u_{yy} = -y u_{xx}$$

подробно исследовано в книге [12].

Известные решения перечисленных уравнений позволяют с помощью преобразования Лежандра построить решения соответствующих уравнений Монжа–Ампера (см. табл. 1).

Значительный интерес для приложений представляет уравнение

$$\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2 = \left(1 + \omega_\xi^2 + \omega_y^2\right)^2. \tag{33}$$

Особенно часто оно встречается в теории выпуклых поверхностей. Преобразование Эйлера связывает (33) с исходным уравнением

$$-u_{yy} = \left(1 + x^2 + u_y^2\right)^2 u_{xx}. \tag{34}$$

Алгебру Ли инвариантности уравнения (34) определяем обычным методом С. Ли [11]. Полный набор операторов алгебры симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} &X_1 = \left(1 + x^2\right)\partial_x + xu\partial_u, \\ &X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = x\partial_u, \qquad X_4 = \partial_u. \end{aligned} \tag{35}$$

Инвариант преобразования, соответствующий оператору X_1,

$$J = \left(1 + x^2\right)^{1/2} u^{-1},$$

позволяет указать, например, решение (34)

$$u = iy\left(1 + x^2\right)^{1/2} + \phi(x), \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{36}$$

где ϕ — произвольная функция. Кроме того, очевидно, решением (34) является функция

$$u = Axy + Bx + Cy + D, \tag{37}$$

A, B, C, D — произвольные постоянные. Преобразование Эйлера этих решений дает следующие промежуточные интегралы уранения (33)

$$\xi\omega_\xi - \omega = iy\sqrt{1 + \omega_\xi^2} + \phi(\omega_\xi), \tag{38}$$

$$\xi\omega_\xi - \omega = Ay\omega_\xi + B\omega_\xi + Cy + D \tag{39}$$

и позволяет найти некоторые решения уравнения (33).

Положим, в частности, в (38) $\phi \equiv 0$. Тогда при $\omega_\xi = 0$ находим решение $\omega = -iy$, при $\omega_\xi = 1$ решение имеет вид

$$\omega = \xi + i\sqrt{2}y.$$

При $\omega_\xi = y$ функция

$$\omega = \xi y - iy\sqrt{1 + y^2}$$

также удовлетворяет уравнению (33).

Таблица 1

№ п/п	Исходное уравнение	Уравнение, полученное преобразованием Эйлера	Уравнение, полученное преобразованием Лежандра
1.	$u_{yy} = F(x,y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = F(\omega_\xi, y),\ (\mu,\nu = \xi, y)$	$\omega_{\xi\xi} = F(\omega_\xi, \omega_\eta)\omega_{\eta\eta}$
2.	$u_{yy} = f(u_x)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(\xi)$	$\omega_{\xi\xi} = f(\xi)\omega_{\eta\eta}$
3.	$u_{yy} = f(u_x/u_y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(-\xi\omega_y^{-1})$	$\omega_{\xi\xi} = f(\xi/\eta)\omega_{\eta\eta}$
4.	$u_{yy} = f(y)u_{xx}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = f(y)$	$\omega_{\xi\xi} = f(\omega_\eta)\omega_{\eta\eta}$
5.	$u_{xx} = u_y u_{yy}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = -\omega_y^{-1}$	$\omega_{\eta\eta} = \eta\omega_{\xi\xi}$
6.	$u_{xy} + \dfrac{n}{x+y}(u_x + u_y) = 0$	$\omega_{\xi y} = \dfrac{n}{\omega_\xi - y}(\xi - \omega_y)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = \dfrac{n(\xi+\eta)}{\omega_\xi + \omega_\eta}\lvert\omega_{ij}\rvert$
7.	$u_{xy} = f(xu_x - u)$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega - \eta\omega_\eta)\lvert\omega_{ij}\rvert$
8.	$u_{xy} = f(xu_x + yu_y - u)$	$\omega_{\xi y} = -f(\omega - y\omega_y)\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\xi\eta} = -f(\omega)\lvert\omega_{ij}\rvert$
9.	$u_{xx}u_{yy} = 1$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = \omega_{\xi\xi}^2$	$\lvert\omega_{ij}\rvert^2 = \omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta}$
10.	$u_{xx} - u_{yy} = \dfrac{-4u_x}{x+y}$	$\lvert\omega_{\mu\nu} = 1 + 4\xi(\omega_\xi + y)^{-1}\omega_{\xi\xi}$	$\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\xi} = \dfrac{-4\xi}{\omega_\xi + \omega_\eta}\lvert\omega_{ij}\rvert$
11.	$u_{xx} + u_{yy} = -u_x x^{-1}$	$\lvert\omega_{\mu\nu}\rvert = -(\xi\omega_\xi^{-1}\omega_{\xi\xi} + 1)$	$\omega_{\eta\eta} + \omega_{\xi\xi} = -\xi\omega_\xi^{-1}\lvert\omega_{ij}\rvert$
12.	$u_{xy}^2 = 4\lambda(x,y)u_x u_y$	$\omega_{\xi y}^2 = -4\lambda(\omega_\xi, y)\xi\omega_y\omega_{\xi\xi}^2$	$\omega_{\xi\eta}^2 = 4\lambda(\omega_\xi, \omega_\eta)\xi\eta\lvert\omega_{ij}\rvert^2$

С другой стороны, для уравнения (33) известно решение [1]

$$\omega = \left[1 - (\xi - a)^2 - (y - b)^2\right]^{1/2} + c.$$

Так как преобразование Эйлера связывает уравнения (33) и (34), то решение последнего может быть найдено из соотношений

$$x = (\xi - a)\left\{\left[1 - (\xi - a)^2 - (y - b)^2\right]^{1/2} + c\right\}^{-1},$$
$$y = y, \qquad u = \xi x.$$

После исключения ξ находим следующее решение, заданное в неявной форме:

$$\left(x^2 - 1\right)^{-1}(xu - a) - a = x\left\{\left[1 - \left(\frac{xu - a}{x^2 - 1} - a\right)^2 - (y - b)^2\right]^{1/2} + c\right\}.$$

4) Преобразованием Эйлера уравнения

$$u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} \tag{40}$$

получаем уравнение Монжа–Ампера

$$-|\omega_{\mu\nu}| = f(\omega_\xi, y, \xi\omega_\xi - \omega, \xi, -\omega_y). \tag{41}$$

Таким образом, для построения точных решений уравнений типа (41) следует найти точные решения соответствующих уравнений (40) и обратно.

5) Выполняя преобразование Эйлера уравнения

$$u'_{y'y'} = \phi(x', y', u', u'_{x'}, u'_{y'})$$

получаем

$$-|\omega_{\mu\nu}| = \omega_{\xi\xi}\phi(\omega_\xi, y, \xi\omega_\xi - \omega, \xi, -\omega_y).$$

6) Уравнение

$$u'_{y'y'} = \phi(x', y', u', u'_{x'}, u'_{y'})u_{x'y'}$$

это же преобразование ставит в соответствие уравнение

$$|\omega_{\mu\nu}| = \omega_{\xi y}\phi.$$

7) Исходя из уравнения

$$u_{yy} = \phi(x, y, u, \underset{1}{u})u_{xx} + \alpha\psi(x, y, u, \underset{1}{u}),$$

где α — произвольный параметр, находим уравнение

$$-|\omega_{\mu\nu}| = \alpha\omega_{\xi\xi}\psi + \phi.$$

8) Выполним преобразование Эйлера (27) уравнения Борна–Инфельда [3], [10]

$$\left(1 - u_y^2\right)u_{xx} + 2u_xu_yu_{xy} - \left(1 + u_x^2\right)u_{yy} = 0. \tag{Б–И}$$

Ему отвечает такое уравнение Монжа–Ампера:

$$\left(1+\xi^2\right)|\omega_{\mu\nu}| = 2\xi\omega_y\omega_{\xi y} - \omega_y^2 + 1. \tag{42}$$

Некоторые решения уравнения Борна–Инфельда известны, известно также, что преобразование Лежандра сводит (Б–И) к линейному [10]. Из сказанного ясен метод получения решений уравнения (42) по соответствующим решениям уравнения (Б–И).

Нелокальную линеаризацию можно осуществлять исходя из исследуемого нелинейного уравнения [3].

Пусть дано уравнение [3]

$$z_{xy} - |z_{ij}| = 0, \qquad (i,j = x,y). \tag{24}$$

Найдем нелокальную подстановку τ, сводящую (24) к волновому

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{43}$$

$$\tau(24)\Big|_{(43)} \equiv 0, \tag{44}$$

т.е. многообразие задано уравнением (43) и его дифференциальными следствиями.

Искомую подстановку разыскиваем среди преобразований, линейных по u и $\underset{1}{u}$:

$$\begin{gathered}\tau: \quad x^{i'} = \varepsilon^i(\xi,\eta,u,\underset{1}{u}) = \alpha^{i\mu}u_\mu + \beta^i u + \gamma^i,\\ (x^0\equiv u,\ x^1\equiv x,\ x^2\equiv y,\ \mu=\xi,\eta,\ i=0,1,2).\end{gathered} \tag{45}$$

Решение поставленной задачи нелокальной линеаризации [3] обеспечивает подстановка

$$\tau: \quad \begin{aligned} &z = \xi\eta + \xi u_\xi + \eta u_\eta - u + c_1,\\ &x = u_\xi + \eta + c_2, \qquad (c_i = \mathrm{const}),\\ &y = u_\eta + \xi + c_3, \qquad (i = \overline{1,3}).\end{aligned} \tag{45ᵃ}$$

При этом значения производных на многообразии вычисляем по формулам

$$\begin{gathered} z_x = \xi, \qquad z_y = \eta, \qquad \delta \equiv u_{\xi\xi}u_{\eta\eta} - 1 \neq 0,\\ z_{xx} = \delta^{-1}u_{\eta\eta}, \qquad z_{xy} = \delta^{-1}, \qquad z_{yy} = \delta^{-1}u_{\xi\xi}.\end{gathered} \tag{45ᵇ}$$

Решение волнового уравнения $u = \phi(\xi)+\psi(\eta)$ позволяет указать соответствующее решение уравнения (24), которое находим, исключая ξ и η из соотношений

$$\begin{aligned} &z = \xi\eta + \xi\phi' + \eta\psi' - \phi - \psi + c_1,\\ &x = \phi' + \eta + c_2,\\ &y = \psi' + \xi + c_3.\end{aligned}$$

Уравнение

$$|z_{ij}| + y^{-1}z_y z_{xx} + z_{yy} + y^{-1}(z_x + x)z_{xy} + y^{-1}z_y = 0 \tag{46}$$

также может быть приведено к линейному [3]

$$w_{yy} + \xi y^{-1}w_{\xi y} + y^{-1}w_y = 0. \tag{47}$$

Преобразование τ получаем, решая определяющее соотношение

$$\tau(46)\Big|_{(47)} \equiv 0. \tag{48}$$

Линеаризующая подстановка оказывается следующей [3]:

$$\tau: \quad \begin{aligned} &z = -\xi w_\xi - \frac{1}{2}w_\xi^2 + w + c_1, \\ &x = -w_\xi, \qquad y = y. \end{aligned} \tag{49}$$

В отличие от преобразований Эйлера и Лежандра рассмотренные преобразования (45^a) и (49) повышают порядок производных. Уравнение (47) точечной заменой переменных

$$\eta = \xi y^{-1}, \qquad \xi = \xi, \qquad u = w \tag{50}$$

преобразуем к волновому уравнению (43)

$$u_{\xi\eta} = 0, \tag{51}$$

решение которого известно

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta). \tag{52}$$

Теперь решение уравнения (46) получаем из (49)–(51), исключая ξ из соотношений

$$\begin{aligned} &z = -\xi x - \frac{1}{2}x^2 + \phi - \psi(\xi y^{-1}) + c_1, \\ &x = -\phi' + y^{-1}\psi'. \end{aligned} \tag{53}$$

§ 3. Некоторые уравнения Монжа–Ампера с тремя независимыми переменными

Успешное применение преобразований Эйлера, Лежандра и других при линеаризации некоторых уравнений Монжа–Ампера с двумя независимыми переменными позволяет надеяться на положительный эффект в случае большего числа независимых переменных.

Рассмотрим преобразование, полученное из (20) введением дополнительной независимой переменной z' следующим образом:

$$\tau: \quad \begin{aligned} &x' = \varepsilon^x = u_y, \qquad y' = \varepsilon^y = x, \\ &z' = \varepsilon^z = u_z, \qquad u' = \varepsilon^0 = u_x. \end{aligned} \tag{54}$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в работе [3], находим

$$\begin{aligned} &d = -(u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2) = -\delta, \\ &d^y = -|u_{ij}|, \qquad u'_{y'} = \delta^{-1}|u_{ij}|, \qquad (i,j = x,y,z), \\ &u'_{x'} = \delta^{-1}(u_{zz}u_{xy} - u_{xz}u_{zy}), \\ &u'_{z'} = \delta^{-1}(u_{yy}u_{xz} - u_{yz}u_{xy}). \end{aligned} \tag{55}$$

1) Преобразование (54), (55) позволяет линейному уравнению

$$u'_{y'} = 0, \qquad (u' = f(x', z')) \tag{56}$$

поставить в соответствие уравнение

$$|u_{ij}| = 0, \qquad (i, j = x, y, z). \tag{57}$$

Следовательно, решением последнего является всякое решение уравнения

$$u_x = f(u_y, u_z),$$

в котором f — произвольная функция.

2) Уравнению

$$u'_{y'} = \phi(x', y', z', u', u'_{x'}, u'_{z'}) \tag{58}$$

при подстановке (54) отвечает уравнение

$$\begin{aligned} |u_{ij}| = \left(u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2\right) \times \\ \times\phi\left(u_y, x, u_z, u_x, \frac{u_{zz}u_{xy} - u_{xz}u_{zy}}{u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2}, \frac{u_{yy}u_{xz} - u_{yz}u_{xy}}{u_{zz}u_{yy} - u_{zy}^2}\right). \end{aligned} \tag{58$^{\text{a}}$}$$

Можно построить несколько в равной степени полезных вариантов обобщения преобразования Эйлера (27) на три независимые переменные x, y, z. Основными требованиями к преобразованиям являются при этом неизменность порядка производных и относительная неизменность формы записи преобразования в сравнении с (27). Рассмотрим два возможных случая.

Пусть преобразование имеет вид

$$\tau_1 : \quad \begin{aligned} &x' = \varepsilon^x = \omega_\xi, \qquad y' = \varepsilon^y = y, \\ &z' = \varepsilon^z = z, \qquad u' = \varepsilon^0 = \xi\omega_\xi - \omega. \end{aligned} \tag{59}$$

Определитель этого преобразования $\delta = \omega_{\xi\xi} \neq 0$ совпадает с определителем преобразования (27). По формулам, данным в [3], находим закон преобразования производных для (59)

$$\begin{aligned} &u'_{x'} = \xi, \qquad u'_{y'} = -\omega_y, \qquad u'_{z'} = -\omega_z, \\ &u'_{x'x'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}, \qquad u'_{y'y'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2), \\ &u'_{x'y'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}\omega_{\xi y}, \qquad u'_{z'z'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{zz}\omega_{\xi\xi} - \omega_{z\xi}^2), \\ &u'_{x'z'} = -\omega_{\xi\xi}^{-1}\omega_{\xi z}, \qquad u'_{y'z'} = \omega_{\xi\xi}^{-1}(\omega_{\xi z}\omega_{\xi y} - \omega_{\xi\xi}\omega_{yz}). \end{aligned} \tag{60}$$

Из (60) ясно, что преобразование (59) — есть контактное преобразование.

Выполним преобразование (59) уравнения

$$\alpha u_{xx} + \beta u_{yy} + \gamma u_{zz} = \phi(x, y, z, u, \underset{1}{u}), \tag{61}$$

α, β, γ — произвольные постоянные. Приходим к уравнению

$$\begin{aligned} &\alpha - \beta(\omega_{\xi\xi}\omega_{yy} - \omega_{\xi y}^2) - \gamma(\omega_{zz}\omega_{\xi\xi} - \omega_{z\xi}^2) = \\ &\qquad = \omega_{\xi\xi}\phi(\omega_\xi, y, z, \xi\omega_\xi - \omega, \xi, -\omega_y, -\omega_z). \end{aligned} \tag{62}$$

§ 4. О линеаризации и общем решении системы типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга

В этом параграфе с помощью нелокальной линеаризации найдено общее решение нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга

$$i\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} = \lambda(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)\gamma^\mu\psi, \qquad \mu = 0, 1, \tag{63}$$

где $\psi = \psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вводя обычным образом вместо $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ двухкомпонентные спиноры φ, χ, перепишем систему (63) в следующем виде

$$\begin{aligned}
&i\left(i\sigma_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \sigma_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \\
&\qquad = \lambda\left\{i\left(|\varphi|^2 + |\chi|^2\right)\sigma_2 - i\left(\varphi^+\sigma_2\sigma_3\varphi + \chi^+\sigma_2\sigma_3\chi\right)\sigma_3\right\}\varphi, \\
&i\left(i\sigma_2\frac{\partial\chi}{\partial x_0} + \sigma_3\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right) = \\
&\qquad = \lambda\left\{i\left(|\varphi|^2 + |\chi|^2\right)\sigma_2 - i\left(\varphi^+\sigma_2\sigma_3\varphi + \chi^+\sigma_2\sigma_3\chi\right)\sigma_3\right\}\chi.
\end{aligned} \tag{64}$$

В конусных переменных

$$\xi = x_0 - x_1, \qquad \eta = x_0 + x_1$$

система (64) запишется в виде

$$\begin{aligned}
&i\varphi^0_\xi = -\lambda\left(|\chi^1|^2 + |\varphi^1|^2\right)\varphi^0, \\
&i\varphi^1_\eta = \lambda\left(|\chi^0|^2 + |\varphi^0|^2\right)\varphi^1,
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
&i\chi^0_\xi = -\lambda\left(|\chi^1|^2 + |\varphi^1|^2\right)\chi^0, \\
&i\chi^1_\eta = \lambda\left(|\chi^0|^2 + |\varphi^0|^2\right)\chi^1.
\end{aligned} \tag{66}$$

Система уравнений (65), (66) с помощью нелокальной обратимой замены

$$\begin{aligned}
&\varphi^0 = v^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2 + |v^1|^2\right)d\xi\right\}, \\
&\varphi^1 = v^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2 + |v^0|^2\right)d\eta\right\}, \\
&\chi^0 = u^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2 + |v^1|^2\right)d\xi\right\}, \\
&\chi^1 = u^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2 + |v^0|^2\right)d\eta\right\}
\end{aligned} \tag{67}$$

приводится к линейной системе дифференциальных уравнений

$$v^0_\xi = 0, \qquad u^0_\xi = 0, \qquad v^1_\eta = 0, \qquad u^1_\eta = 0. \tag{68}$$

Подставляя (67) в (65), (66), убеждаемся, что u^0, u^1, v^0, v^1 удовлетворяют уравнениям (68).

Таким образом, проблема нахождения общего решения исходного уравнения сведена к задаче интегрирования незацепленной системы уравнений (68). Интегрируя последние, получаем

$$u^0 = F^0(\eta), \qquad u^1 = F^1(\xi), \qquad v^0 = G^0(\eta), \qquad v^1 = G^1(\xi). \tag{69}$$

Подставляя (69) в формулы, находим общее решение системы (66)

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= F^0(x_0+x_1)\exp\left\{i\lambda\int^{x_0-x_1}\left(|F^1|^2+|G^1|^2\right)d\xi\right\},\\
\varphi^1 &= F^1(x_0-x_1)\exp\left\{-i\lambda\int^{x_0+x_1}\left(|F^0|^2+|G^0|^2\right)d\eta\right\},\\
\chi^0 &= G^0(x_0+x_1)\exp\left\{i\lambda\int^{x_0-x_1}\left(|F^1|^2+|G^1|^2\right)d\xi\right\},\\
\chi^1 &= G^1(x_0-x_1)\exp\left\{-i\lambda\int^{x_0+x_1}\left(|F^0|^2+|G^0|^2\right)d\eta\right\},
\end{aligned} \tag{70}$$

где F^0, F^1, G^0, G^1 — произвольные комплексные дифференцируемые функции своих аргументов.

Замечание. Возможность линеаризации двумерной системы типа Дирака–Гейзенберга–Тирринга связана с бесконечномерной локальной симметрией, допускаемой этой системой. Более того, общее решение (70) может быть получено из чисто теоретико-групповых соображений. Для этого необходимо найти частное решение и применить к нему операцию размножения решений с помощью преобразований из группы симметрии уравнения. Отметим также тот замечательный факт, что нелинейная система (64) допускает нелокальную группу преобразований

$$\begin{aligned}
\chi^{0'} &= a\chi^0\exp\left\{i\lambda\int\left[\left(|b|^2-1\right)|\chi^1|^2+\left(|d|^2-1\right)|\varphi^1|^2\right]d\xi\right\},\\
\chi^{1'} &= b\chi^1\exp\left\{-i\lambda\int\left[\left(|a|^2-1\right)|\chi^0|^2+\left(|c|^2-1\right)|\varphi^0|^2\right]d\eta\right\},\\
\varphi^{0'} &= c\varphi^0\exp\left\{i\lambda\int\left[\left(|b|^2-1\right)|\chi^1|^2+\left(|d|^2-1\right)|\varphi^1|^2\right]d\xi\right\},\\
\varphi^{1'} &= d\varphi^1\exp\left\{-i\lambda\int\left[\left(|a|^2-1\right)|\chi^0|^2+\left(|c|^2-1\right)|\varphi^0|^2\right]d\eta\right\},
\end{aligned}$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные числа.

В заключение отметим, что максимальной локальной группой инвариантности уравнений (64) является

$$G = O(4) \times O(4) \times A_\infty,$$

где A_∞ — бесконечномерная группа Ли преобразований вида

$$x_0' = \frac{1}{2}\left[\int^{x_0-x_1} f_1^{-2}(\xi)d\xi + \int^{x_0+x_1} f_0^{-2}(\eta)d\eta\right],$$

$$x_1' = \frac{1}{2}\left[\int^{x_0+x_1} f_0^{-2}(\eta)d\eta - \int^{x_0-x_1} f_1^{-2}(\xi)d\xi\right],$$

f_0, f_1 — произвольные действительные функции,

$$\varphi^{0'} = f_0(x_0+x_1)\varphi^0, \qquad \varphi^{1'} = f_1(x_0-x_1)\varphi^1,$$
$$\chi^{0'} = f_0(x_0+x_1)\chi^0, \qquad \chi^{1'} = f_1(x_0-x_1)\chi^1.$$

§ 5. О линеаризации и общем решении нелинейных двумерных уравнений электродинамики

Метод нелокальных преобразований оказывается эффективным и для нахождения общего решения двумерных уравнений квантовой электродинамики, получающихся из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma_\mu\psi_\mu - \bar\psi_\mu\gamma_\mu\psi) + e\bar\psi\gamma_\mu\psi A^\mu +$$
$$+\frac{1}{2}(A^\mu_\nu A^\mu_\nu - A^\mu_\nu A^\nu_\mu) + \frac{1}{2}\lambda(\bar\psi\gamma_\mu\psi)(\bar\psi\gamma^\mu\psi), \qquad \mu,\nu = 0,1,$$

где e, λ — постоянные величины, A_μ — векторный потенциал электромагнитного поля.

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &[i\gamma_\mu\partial_\mu + e\gamma_\mu A^\mu + \lambda\bar\psi\gamma_\mu\psi\gamma^\mu]\psi = 0,\\ &\Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = -e\bar\psi\gamma_\mu\psi, \qquad \mu = 0,1. \end{aligned} \tag{71}$$

Расписывая систему (71) покомпонентно и переходя к конусным переменным

$$\xi = x_0 - x_1, \qquad \eta = x_0 + x_1,$$

получаем

$$\begin{aligned} i\psi^0_\xi &= -\left[\frac{1}{2}e(A_1 - A_0) + \lambda(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2)\right]\psi^0,\\ i\psi^1_\eta &= \left[\frac{1}{2}e(A_1 + A_0) + \lambda(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2)\right]\psi^1,\\ i\psi^2_\xi &= -\left[\frac{1}{2}e(A_1 - A_0) + \lambda(|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2)\right]\psi^2,\\ i\psi^3_\eta &= \left[\frac{1}{2}e(A_1 + A_0) + \lambda(|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2)\right]\psi^3, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta+A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(|\psi^0|^2+|\psi^1|^2+|\psi^2|^2+|\psi^3|^2\right),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta-A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(-|\psi^0|^2+|\psi^1|^2-|\psi^2|^2+|\psi^3|^2\right).$$

Система уравнений (72) линеаризуется с помощью следующей нелокальной обратимой замены переменных

$$\begin{aligned}
\psi^0&=u^0(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi+\frac{i}{2}e\int(A^1-A^0)d\xi\right\},\\
\psi^1&=u^1(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta-\frac{i}{2}e\int(A^1+A^0)d\eta\right\},\\
\psi^2&=u^2(\xi,\eta)\exp\left\{i\lambda\int\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi+\frac{i}{2}e\int(A^1-A^0)d\xi\right\},\\
\psi^3&=u^3(\xi,\eta)\exp\left\{-i\lambda\int\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta-\frac{i}{2}e\int(A^1+A^0)d\eta\right\}.
\end{aligned}\tag{73}$$

Подставляя (73) в (72), получаем систему для нахождения функций u^0, …, u^3, A^0, A^1:

$$\begin{aligned}
&u^0_\xi=0,\qquad u^1_\eta=0,\qquad u^2_\xi=0,\qquad u^3_\eta=0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta+A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(|u^0|^2+|u^1|^2+|u^2|^2+|u^3|^2\right),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(A^0_\eta-A^0_\xi+A^1_\eta+A^1_\xi\right)=e\left(-|u^0|^2+|u^1|^2-|u^2|^2+|u^3|^2\right).
\end{aligned}\tag{74}$$

Интегрируя уравнений (74) и подставляя полученный результат в формулы (73), находим общее решение исходной системы (71)

$$\begin{aligned}
A^0&=e\int^{x_0+x_1}\int^{z}\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)d\eta dz+\frac{\partial f}{\partial x_0},\\
A^1&=-e\int^{x_0-x_1}\int^{z}\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)d\xi dz-\frac{\partial f}{\partial x_1},\\
\psi^0&=u^0(x_0+x_1)\exp\left\{i\int^{x_0-x_1}\left[\lambda\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1-A^0)\right]d\xi\right\},\\
\psi^1&=u^1(x_0-x_1)\exp\left\{-i\int^{x_0+x_1}\left[\lambda\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1+A^0)\right]d\eta\right\},\\
\psi^2&=u^2(x_0+x_1)\exp\left\{i\int^{x_0-x_1}\left[\lambda\left(|u^1|^2+|u^3|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1-A^0)\right]d\xi\right\},\\
\psi^3&=u^3(x_0-x_1)\exp\left\{-i\int^{x_0+x_1}\left[\lambda\left(|u^0|^2+|u^2|^2\right)+\frac{1}{2}e(A^1+A^0)\right]d\eta\right\},
\end{aligned}$$

где $u^0, \dots, u^3$ — произвольные комплексные функции, а $f = f(x_0, x_1)$ — произвольная действительная функция.

1. Forsyth A.R., Theory of differential equations. Vol. 5, 6, N.Y., Dover Publication, 1959, 478 p., 596 p.
2. Ames W.F., Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 1, 2, N.Y., Academic press, 1965, 511 p., 1972, 301 p.
3. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт 82.33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.
4. Александров А.Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М., Гостехиздат, 1948, 622 с.
5. Погорелов А.В., Об уравнениях Монжа–Ампера эллиптического типа, Харьков, госуниверситет, 1960, 110 с.
6. Погорелов А.В., Многомерная проблема Минковского, М., Наука, 1975, 79 с.
7. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 6–27.
8. Фущич В.И., Серов Н.И., Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера, *ДАН СССР*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
9. Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, М., Наука, 1966, 260 с.
10. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, М–Л., Гостехиздат, 1951, 514 с.
11. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 399 с.
12. Бицадзе А.В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., Наука, 1981, 448 с.