О симметрии нелинейных уравнений электродинамики

В.И. ФУЩИЧ, И.М. ЦИФРА

Выведены конформно-инвариантные и пуанкаре-инвариантные нелинейные уравнения электродинамики. Построены нелинейные конформно-инвариантные уравнения для векторного и спинорного полей.

Conformal-invariant and Poincaré-invariant nonlinear electrodynamics equations are derived. Nonlinear conformal-invariant equations for vector and spinor fields are also constructed.

Введение

Известно, что одних уравнений Максвелла

$$L_1 = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0,$$
$$L_2 = \frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \tilde{H}_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{0.1}$$

недостаточно, чтобы определить электромагнитное поле в различных средах. Уравнения (0.1) записаны в общепринятых обозначениях, т.е. $\tilde{H}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$(H^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.2}$$

Система (0.1) в терминах напряженностей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и индукции $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$$

Для описания электромагнитного поля в конкретных средах к уравнениям (0.1) добавляют дополнительные соотношения (условия), которые называются материальными уравнениями или уравнениями связи (см., например, [1]). Эти дополнительные условия чаще всего являются линейными или нелинейными соотношениями на $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Явный вид этих соотношений зависит от свойств среды и, как правило, слишком произвольный. Как будет показано ниже, явный вид материальных уравнений может быть существенно ограничен, если использовать

Теоретическая и математическая физика, 1985, **64**, № 1, С. 41–50.

принцип симметрии в качестве правила отбора этих дополнительных соотношений. Так, например, требование конформной инвариантности сильно сужает класс допустимых материальных уравнений.

Симметрийные свойства уравнений Максвелла в вакууме подробно исследованы Лоренцем, Пуанкаре, Эйнштейном, Канингхемом и Бейтменом.

Максимальной в смысле Ли [2] локальной группой инвариантности линейных уравнений для электромагнитного поля в вакууме при отсутствии зарядов является 16-параметрическая группа, содержащая в качестве подгруппы 15-параметрическую конформную группу $C(1,3)$ (современное изложение этого вопроса см., например, в [3]).

Симметрийные свойства уравнений (0.1) совместно с нелинейными материальными уравнениями совершенно не изучены [4]. Этой задаче посвящена настоящая работа. В частности, описаны нелинейные дополнительные условия на $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{H}$, при которых система (0.1) совместно с материальными уравнениями инвариантна относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$ и конформной группы $C(1,3)$. Предложены нелинейные конформно-инвариантные уравнения для векторного и спинорного полей. Получено новое нелинейное конформно-инвариантное дополнительное условие типа Лоренца на вектор-потенциал.

1. Симметрия уравнений (0.1)

Существенным отличием (0.1) от уравнений Максвелла в вакууме является то, что (0.1) — сильно недоопределенная система уравнений первого порядка для четырех векторов $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. По этой причине следует ожидать, что система (0.1) будет иметь более широкую симметрию, чем уравнения Максвелла в вакууме. Для сравнения напомним, что уравнения Максвелла в вакууме представляют собой переопределенную систему восьми уравнений из двух векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Симметрийные свойства уравнений (0.1) устанавливаются следующим утверждением.

Теорема 1. *Алгеброй инвариантности системы (0.1) является бесконечномерная алгебра, любой элемент которой задается операторами (или их линейными комбинациями)*

$$X_1 = \xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_{F_{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} + \eta_{\tilde H_{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{\mu\nu}}, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} X_2 = F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv F_{01}\frac{\partial}{\partial F_{01}} + F_{02}\frac{\partial}{\partial F_{02}} + F_{03}\frac{\partial}{\partial F_{03}} + \\ + F_{12}\frac{\partial}{\partial F_{12}} + F_{13}\frac{\partial}{\partial F_{13}} + F_{23}\frac{\partial}{\partial F_{23}}, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} X_3 = \tilde H_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{\mu\nu}} \equiv \tilde H_{01}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{01}} + \tilde H_{02}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{02}} + \tilde H_{03}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{03}} + \\ + \tilde H_{12}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{12}} + \tilde H_{13}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{13}} + \tilde H_{23}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{23}}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$
\begin{aligned}
X_4 = F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{\mu\nu}} \equiv F_{01}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{01}} + F_{02}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{02}} + F_{03}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{03}} + \\
+ F_{12}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{12}} + F_{13}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{13}} + F_{23}\frac{\partial}{\partial \tilde H_{23}},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
X_5 = \tilde H_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv \tilde H_{01}\frac{\partial}{\partial F_{01}} + \tilde H_{02}\frac{\partial}{\partial F_{02}} + \tilde H_{03}\frac{\partial}{\partial F_{03}} + \\
+ \tilde H_{12}\frac{\partial}{\partial F_{12}} + \tilde H_{13}\frac{\partial}{\partial F_{13}} + \tilde H_{23}\frac{\partial}{\partial F_{23}},
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где $\xi^\mu(x)$ — произвольные дифференцируемые функции, $x = (x_0 = t, x_1, x_2, x_3)$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$;

$$
\eta_{F_{\mu\nu}} = -F_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - F_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu + u_{\mu\nu}, \tag{1.6}
$$

$$
\eta_{\tilde H_{\mu\nu}} = -\tilde H_{\mu\alpha}\xi^\alpha_\nu - \tilde H_{\alpha\nu}\xi^\alpha_\mu + \tilde v_{\mu\nu}, \tag{1.7}
$$

$\xi^\alpha_\mu \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}$, $\tilde v_{\mu\nu}$ — произвольные решения системы (0.1).

Доказательство. Следуя подходу Ли, векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, а значит, и компоненты тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde H_{\mu\nu}$ рассматриваем как независимые величины. Доказательство теоремы сводится к применению алгоритма Ли к системе (0.1). Алгоритм Ли подробно описан, например в [2], и состоит в построении всех дифференциальных операторов первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\tilde X = X + \sigma_i^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial r_i^{\mu\nu}} + \tilde\sigma_i^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \tilde r_i^{\mu\nu}},\\
&\sigma_i^{\mu\nu} = D_i(\eta_{F_{\mu\nu}}) - r_j^{\mu\nu} D_i(\xi^j),\\
&\tilde\sigma_i^{\mu\nu} = D_i(\eta_{\tilde H_{\mu\nu}}) - \tilde r_j^{\mu\nu} D_i(\xi^j),
\end{aligned}
$$

где D_i — оператор полного дифференцирования [2],

$$
r_\nu^{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}, \qquad \tilde r_\nu^{\lambda\mu} \equiv \frac{\partial \tilde H_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu},
$$

удовлетворяющих условиям:

$$
\begin{aligned}
&\tilde X\left(\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\Bigg|_{\substack{L_1=0\\ L_2=0}} = 0,\\
&\tilde X\left(\frac{\partial \tilde H_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \tilde H_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \tilde H_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\Bigg|_{\substack{L_1=0\\ L_2=0}} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Соотношения (1.8) являются, как известно, необходимым и достаточным условием инвариантности системы (0.1).

Из (1.8) получаем для координат $\xi^\mu(x, F_{\alpha\beta}, \tilde{H}_{\alpha\beta})$, $\eta(x, F_{\alpha\beta}, \tilde{H}_{\alpha\beta})$ инфинитезимального оператора X систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\xi^\mu}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial\tilde{H}_{ik}} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_{F_{\nu\alpha}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\eta_{F_{\alpha\mu}}}{\partial x^\nu} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\nu\alpha}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\alpha\mu}}}{\partial x^\nu} = 0, \\
\frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial F_{ik}} = \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial\tilde{H}_{ik}} = \xi^i_\nu\delta_{\mu k} - \xi^k_\nu\delta_{\mu i} + \xi^k_\mu\delta_{\nu i} - \xi^i_\mu\delta_{\nu k}, \\
\frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial\tilde{H}_{\mu\nu}} = C_1, \qquad \frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial F_{\mu\nu}} = C_2, \qquad \frac{\partial\eta_{F_{\mu\nu}}}{\partial\tilde{H}_{\mu\nu}} = C_3, \qquad \frac{\partial\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}}{\partial F_{\mu\nu}} = C_4,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — константы.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что произвольные функции $\xi^\mu(x)$, не зависящие от $F_{\alpha\beta}$, $\tilde{H}_{\alpha\beta}$ и $\eta_{F_{\mu\nu}}$ и $\eta_{\tilde{H}_{\mu\nu}}$ вида (1.6), (1.7), удовлетворяют уравнениям (1.9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 получаем важное для дальнейшего следствие.

Теорема 2. *Система (0.1) инвариантна относительно 20-мерной алгебры Ли группы $IGL(4,R)$, содержащей в качестве подалгебры алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ и алгебры Галилея $G(1,3)$.*

Доказательство. Поскольку в теореме 1 $\xi^\mu(x)$ может быть произвольной функцией от x, достаточно положить в формуле (1.1) $\xi^\mu(x) = c^{\mu\nu}x_\nu + a^\mu$, $u_{\mu\nu} = \tilde{v}_{\mu\nu} = 0$, где $c_{\mu\nu}$, a_μ — произвольные константы. Если $c_{\mu\nu} = -c_{\mu\nu}$, то из операторов (1.1) получаем базисные элементы алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ в виде

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + (S_{\mu\nu}\Psi)_n\frac{\partial}{\partial\Psi_n}, \tag{1.10}$$

где по n подразумевается суммирование от 1 до 12, т.е. $n = \overline{1,12}$, Ψ — столбец $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$, матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix},$$
$$\hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

0 — нулевые 3×3-матрицы.

Если положить $c_{0\mu} = 0$, $c_{ab} = -c_{ba}$, то из (1.1) получим базисные элементы алгебры Ли группы Галилея:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad a = 1,2,3,\\
&J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a + S_{ab}\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n},\\
&G_a = tP_a + (M\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n},
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

где

$$
M = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}.
$$

Аналогичным образом доказывается, что среди множества операторов вида (1.1) содержится алгебра Ли конформной группы $C(1,3)$ и алгебры Ли группы Шредингера $Sch(1,3)$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что совокупность генераторов (1.10) и операторов

$$
\begin{aligned}
&D = x_\nu P^\nu + 2i\Psi_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n},\\
&K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu}\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

образует базис конформной алгебры $C(1,3)$.

Операторы (1.12) вместе с операторами

$$
\begin{aligned}
&D = 2x_0 P_0 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{P} + (\lambda_0\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n},\\
&A = x_0^2 P_0 + x_0(\lambda_0\Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{G},
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

где

$$
\lambda_0 = i\begin{pmatrix} 3\hat{I} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & 2\hat{I} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & 2\hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 3\hat{I} \end{pmatrix},
$$

$\hat{I}$ — единичная 3×3-матрица, образуют базис алгебры $Sch(1,3)$.

Таким образом, мы установили, что для *системы (0.1) без материальных уравнений выполняется как принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Энштейна, так и принцип относительности Галилея.*

Аналогичным свойством, как это отмечено в [5], обладает нелинейная система уравнений Эйлера для идеальной жидкости.

Замечание. Векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ при преобразованиях Галилея $x_0' = x_0$, $x_a' = x_a + x_a x_0$, преобразуются следующим образом:

$$
\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}, \qquad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}], \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - [\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]. \tag{1.15}
$$

Преобразования (1.15) задают правила пересчета величин $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ для наблюдателя, движущегося в инерциальной системе отсчета со скоростью $\boldsymbol{v}$.

2. Пуанкаре-инвариантные и конформно-инвариантные нелинейные материальные уравнения

1. Рассмотрим материальные уравнения в следующем виде:

$$H_{\mu\nu} = \Phi_{\mu\nu}(F_{01}, F_{02}, F_{03}, \ldots, F_{23}) \equiv \Phi_{\mu\nu}(F), \tag{2.1}$$

где $\Phi_{\mu\nu}$ — произвольные гладкие функции компонент тензора $F_{\mu\nu}$, удовлетворяющие условию $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$, $\Phi_{\mu\mu} = 0$.

Теорема 3. *Система уравнений (0.1), (0.2) инвариантна относительно группы Пуанкаре тогда и только тогда, когда*

$$H_{\mu\nu} = MF_{\mu\nu} + N\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

где $M = M(C_1, C_2)$, $N = N(C_1, C_2)$ — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов электромагнитного поля

$$C_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2, \qquad C_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Доказательство. Поскольку в систему (0.1) входят только производные от $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\alpha\beta}$, а в материальные уравнения (2.1) не входят производные от полей, то для доказательства теоремы достаточно найти условия на $\Phi_{\mu\nu}$, при которых (2.1) инвариантно относительно базисных элементов алгебры $P(1,3)$ (1.10).

Уравнение (2.1) будет пуанкаре-инвариантным, если

$$P_\mu\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0, \tag{2.3}$$

$$J_{\mu\nu}\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0. \tag{2.4}$$

Используя формулы (1.10), условия инвариантности (2.3), (2.4) запишем, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка для функции $\Phi_{\mu\nu}$

$$(S_{\mu\nu}\Psi)_n\frac{\partial}{\partial\Psi_n}\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}} = 0. \tag{2.5}$$

В развернутой записи система (2.5) для $\mu = 1$, $\nu = 2$ выглядит так:

$$\begin{aligned}
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{01}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{02},\\
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{02}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{01},\\
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{03}}{\partial F_{13}} = 0,\\
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial F_{13}} = -\Phi_{31},\\
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{31}}{\partial F_{13}} = \Phi_{23},\\
&F_{01}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{02}} - F_{02}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{01}} + F_{13}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{32}} - F_{32}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial F_{13}} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогичную структуру имеет система (2.5) для других μ и ν. Ради экономии места мы не приводим здесь подробную запись системы (2.5). Детальный анализ системы (2.5) дает возможность найти ее общее решение, которое задается формулой (2.2). Теорема доказана.

В терминах $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ формула (2.2) имеет вид

$$\boldsymbol{D} = M\boldsymbol{E} + N\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{H} = M\boldsymbol{B} - N\boldsymbol{E}. \tag{2.6}$$

Если в (2.6) $M = \varepsilon = \text{const}$, $N = \mu = \text{const}$, то (2.6) совместно с (0.1) совпадает с линейными уравнениями Максвелла.

Если в (2.6) положить $M = 1/L$, $N = \boldsymbol{BE}/L$,

$$L = \sqrt{1 + \left(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2\right) - (\boldsymbol{BE})^2}, \tag{2.7}$$

то система (0.1) совместно с (2.6) совпадает с нелинейными уравнениями для электромагнитного поля, предложенными Борном [6] и известными в литературе как уравнения Борна–Инфельда.

Приведем еще один конкретный пример материальных уравнений. Если положить в (2.6) $M = \varepsilon$, $N = -\mu\boldsymbol{BE}$, $\varepsilon, \mu = \text{const}$, то явная структура нелинейных материальных уравнений выглядит следующим образом:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\left\{1 + \frac{\mu^2(\boldsymbol{EH})^2}{\varepsilon^2\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\right\}\boldsymbol{E} - \frac{\mu(\boldsymbol{EH})}{\varepsilon\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{H}}{\varepsilon} - \mu\frac{\boldsymbol{EH}}{\varepsilon\left(\varepsilon + \mu\boldsymbol{E}^2\right)}\boldsymbol{E}.$$

Рассмотрим материальные уравнения такого частного вида:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})\boldsymbol{H}. \tag{2.8}$$

Структура материальных уравнений вида (2.8) широко используется для описания распространения электромагнитного поля в реальных средах. Из теоремы 3 вытекает такое утверждение (используется система единиц, в которой скорость света в вакууме $c = 1$).

Следствие 1. *Система уравнений (0.1), (2.8) будет пуанкаре-инвариантна только тогда, когда*

$$\varepsilon(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) \cdot \mu(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = 1. \tag{2.9}$$

Следствие 2. *Если $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$, то в силу теоремы 3 $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ могут быть только линейными функциями $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$, т.е.*

$$\boldsymbol{D} = \mu\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{H} \qquad (\mu = \text{const}). \tag{2.10}$$

2. Выясним теперь вопрос о том, какие ограничения накладывает на материальные уравнения (2.2) требование конформной инвариантности. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. *Система уравнений (0.1), (2.2) инвариантна относительно конформной группы $C(1,3)$, если*

$$M = M(C_1/C_2), \qquad N = N(C_1/C_2), \tag{2.11}$$

где M, N — произвольные дифференцируемые функции, зависящие только от отношения инвариантов C_1 и C_2.

Доказательство. Требование инвариантности материальных уравнений (2.2) относительно масштабных преобразований, порождаемых оператором D (1.13), приводит к тому, что функции M и N в (2.2) могут зависеть только от отношения $C_1/C_2 = k$. Таким образом, материальные уравнения

$$H_{\mu\nu} = M(k)F_{\mu\nu} + N(k)\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

инвариантны относительно масштабных преобразований. Воспользовавшись явным видом (1.13) операторов K_μ, легко убедиться, что условие

$$K_\mu\{H_{\alpha\beta} - \Phi_{\alpha\beta}(F)\}|_{H_{\alpha\beta}=\Phi_{\alpha\beta}(F)} = 0,$$

выполняется, если имеет место (2.12). Теорема доказана.

Приведем явный вид конформно-инвариантных материальных уравнений. Положим в (2.12) $M = \mu\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right)/\boldsymbol{BE}$, $N = 0$, тогда конформно-инвариантные материальные уравнения запишутся в виде

$$\boldsymbol{D} = \sqrt{\frac{\mu\boldsymbol{H}^2}{\mu\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{EH}}}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \sqrt{\frac{\mu\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{EH}}{\mu\boldsymbol{H}^2}}\boldsymbol{H}.$$

Следствие 3. *Нелинейные уравнения Борна–Инфельда не инвариантны относительно конформной группы $C(1,3)$.*

3. Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для векторного и спиноорного полей

Хорошо известно, что линейные уравнения для векторного и спинорного полей

$$\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0, \tag{3.1}$$

$$\gamma_\mu P^\mu \Psi = 0, \tag{3.2}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, Ψ — четырехкомпонентный спинор, инвариантны относительно конформной группы $C(1,3)$.

Уравнение (3.1) инвариантно еще и относительно градиентных преобразований

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{3.3}$$

Если на поле A_μ наложить условие Лоренца

$$P_\mu A_\mu = 0, \tag{3.4}$$

то система (3.1), (3.2) не будет инвариантна относительно конформных преобразований. Поэтому представляет интерес описать дополнительные условия (типа

Лоренца), нелинейные добавки к уравнениям (3.1), (3.2), при которых уравнения для полей A_μ и Ψ инвариантны относительно группы $C(1,3)$.

Базисные элементы конформной алгебры инвариантности уравнения (3.1) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu},\\
&D = x_\nu P^\nu - A_\nu P^{A_\nu}, \qquad P_{A_\mu} = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A^\nu},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
K_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2x^\nu(A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu}). \tag{3.6}
$$

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$
\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = F(A_\nu A^\nu)A_\mu, \tag{3.7}
$$

где $F(A_\nu A^\nu)$ — произвольная дифференцируемая функция от свертки $A_\nu A^\nu$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Система (3.7) инвариантна относительно конформной алгебры (3.5), (3.6) только тогда, когда*

$$
F = \lambda A_\nu A^\nu, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{3.8}
$$

Доказательство. Релятивистская инвариантность уравнения (3.7) очевидна. Рассмотрим вопрос, при каких F уравнение (3.7) конформно-инвариантно. Сделаем бесконечно малые конформные преобразования x_μ, A_ν:

$$
x'_\mu = [g_{\mu\nu}(1 - 2\boldsymbol{Cx}) - x_\nu C_\mu]x^\nu, \tag{3.9}
$$

$$
A'_\mu = [g_{\mu\nu}(1 - 2\boldsymbol{Cx}) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)]A^\nu. \tag{3.10}
$$

Тогда уравнение (3.7) переходит в

$$
\begin{aligned}
&\{g_{\mu\nu}(1 - 6\boldsymbol{Cx}) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)\}\{\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_k A^k)\} +\\
&\quad + F\left[g_{\mu\nu}\left(1 - \left(2\boldsymbol{Cx} + \frac{\partial F}{\partial u}4\boldsymbol{Cx}\right)\right) + 2(x_\mu C_\nu - x_\nu C_\mu)\right]A^\nu = 0.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Из (3.11) получаем, что для инвариантности уравнения (3.7) должно выполняться следующее уравнение: $(\partial F/\partial u)u = F$, $u = A_\nu A^\nu$, т.е. $F = \lambda u = \lambda A_\nu A^\nu$.

С помощью алгоритма Ли [2] нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 6. *Система уравнений*

$$
\begin{aligned}
&\pi_\mu A^\mu = (P_\mu - eA_\mu)A^\mu = 0,\\
&\Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

инвариантна относительно конформной алгебры с базисными элементами, задаваемыми формулами (3.5), и операторами

$$
K'_\mu = K_\mu - \frac{2i}{e}P_{A_\mu}, \tag{3.13}
$$

где e — заряд частицы.

Теорема 7. *Нелинейное уравнение Дирака*

$$\gamma_\mu \pi^\mu \Psi + F_1(\bar{\Psi}, \Psi)\Psi = 0 \tag{3.14}$$

инвариантно относительно конформной группы, если

$$F_1 = \lambda_1(\bar{\Psi} \cdot \Psi)^{1/(3+\varkappa)}, \qquad \varkappa = \text{const} \neq -3, \qquad \lambda_1 = \text{const},$$

причем генераторы группы $C(1,3)$ имеют вид

$$P_\mu = ig_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu} + S_{\mu\nu},$$

$$D = x_\nu P^\nu - A_\nu P^{A_\nu} + \frac{3+\varkappa}{2}i, \tag{3.15}$$

$$K'_\mu = 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu)P_\mu + 2x^\nu(A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu}) + 2x^\nu S_{\mu\nu} - \frac{2i}{e}P_{A_\mu},$$

где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Уравнения (3.7) сами по себе и с системой (3.1) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\Psi' = e^{ia\varphi(x)}\Psi, \qquad A'_\mu = A_\mu - \frac{ia}{e}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}. \tag{3.16}$$

Замечание. Нелинейная калибровка (3.12) не инвариантна относительно хорошо известного представления конформной алгебры, задаваемого формулами (3.5), (3.6). Она инвариантна относительно представления конформной алгебры, задаваемого формулами (3.15). Такие представления для конформной алгебры до сих пор не были обнаружены. Видимо, по этой причине в литературе рассматривались более сложные нелинейные калибровки [7]

$$P_\mu(A^\mu A_\nu A^\nu) = 0. \tag{3.17}$$

Калибровка Флато–Баена (3.17) не инвариантна относительно конформных операторов K'_μ (3.13). Она инвариантна относительно конформных операторов K_μ, но не инвариантна относительно градиентных преобразований (3.3). Линейное конформно-инвариантное и калибровочно-инвариантное дополнительное условие к уравнениям (3.1) имеет вид

$$P_\mu(P^\mu P_\nu A^\nu) = 0.$$

Вопрос о построении нелинейных уравнений, инвариантных относительно конформных и градиентных преобразований, будет обсужден в другой работе.

1. Федоров Ф.И., Теория гиротропии, Минск, Наука и техника, 1976, 455 с.
2. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
3. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983, 197 с.
4. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1981, 6–28.
5. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, 4–23.
6. Born M., Infeld L., *Proc. Roy. Soc. A*, 1934, **144**, № 852, 4225–4251.
7. Bayen F., Flato M., *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 7, 1112–1114.