Подалгебры алгебры Ли расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$

Л.Ф. БАРАННИК, В.И. ФУЩИЧ

В работе исследуются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности подалгебры алгебры Ли $A\tilde{P}(1,n)$ расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$. Найдены максимальные приводимые и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ ($\mathbb{D}$ —дилатация). Выделены вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Доказана теорема о подпространствах пространства трансляций U, инвариантных относительно приводимой подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$. Получен ряд общих результатов о подалгебрах алгебры $U \niplus L$, где L — нормализатор изотропного подпространства пространства U в алгебре $A\tilde{O}(1,n)$. Проведена классификация всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$.

Введение

Систематическое изучение подалгебр алгебр преобразований квантовой механики начато в работе Патеры–Винтернитца–Цассенхауза [1] , в которой предложен общий метод для описания относительно определенной сопряженности классов подалгебр конечномерной алгебры Ли с нетривиальным разрешимым идеалом и, в частности, с нетривиальным абелевым идеалом. Этим методом проведена классификация подалгебр таких алгебр: $AP(1,3)$ [1], $ASim(1,3)$ [2], $ASim(1,2)$ [3], $AE(3)$ [4], $AO(1,4)$ [5], $AO(2,3)$ [6], $AOpt(1,2)$ [7], $ASch(2)$, $A\tilde{S}ch(2)$ [8], $AP(1,4)$ [9–13], $AE(4)$ [14], $AE(5)$, $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ [15]. Несколько ранее подалгебры алгебры $AP(1,3)$ были описаны другим способом в работах [16–18] , а подалгебры алгебр $AG(3)$, $A\tilde{G}(3)$ — в [19].

В силу большой общности метод П.–В.–Ц. требует развития для конкретных классов алгебр. В данной работе мы даем дальнейшее развитие этого метода для расширенных алгебр Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$ $(n \geq 2)$, обозначаемых также $ASim(1,n)$. Необходимость в описании подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности вызвана рядом задач теоретической и математической физики. В частности, знание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ дает возможность исследовать симметрийную редукцию для релятивистски-инвариантного скалярного дифференциального уравнения

$$\Phi\left(\Box u, (\nabla u)^2, u\right) = 0 \qquad [\ 20\text{–}22\ ],$$

где $\Box u = u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - \cdots - u_{x_nx_n}$, $(\nabla u)^2 = (u_{x_0})^2 - (u_{x_1})^2 - \cdots - (u_{x_n})^2$, а Φ — достаточно гладкая функция. Описание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ позволяет решать задачу о редукции представлений алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ на ее подалгебры. В работе [23] проведена редукция неприводимых представлений алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$ на подалгебры $AP(1,n-k)$, а в [24] изучена редукция неприводимых представлений алгебры $AP(1,4)$ на алгебру Галилея $A\tilde{G}(3)$.

Препринт 85.90, Киев, Институт математики АН УССР, 1985, 52 с.

Дадим краткую характеристику работы. Работа состоит из четырех параграфов. В § 1 найдены в явном виде максимальные приводимые подалгебры и максимальные абелевы подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n) = AO(1,n) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, где $\mathbb{D}$ — дилатация, а также описаны подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n-1) = AO(1,n-1) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, обладающие только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{E}(n-1)$.

В § 2 изучаются вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$. Выделены те из них, которые обладают только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Установлено, что описание расщепляемых подалгебр $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, проекции которых F на $A\tilde{O}(1,n)$ не имеют инвариантных изотропных подпространств в пространстве трансляций $U = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$, сводится к описанию неприводимых частей алгебр F.

В § 3 доказан ряд утверждений о подалгебрах алгебры $U \subset\!\!\!\!+ F$, где F — нормализатор $\langle P_0 + P_n \rangle$ в $A\tilde{O}(1,n)$. Эти утверждения касаются таких вопросов: 1) расщепляемость всех расширений подалгебры $L \subset F$ в $A\tilde{P}(1,n)$ или в некоторых других алгебрах; 2) разложение инвариантных подпространств в прямую сумму своих проекций на определенные подпространства; 3) явное описание некоторых классов сопряженных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$.

В § 4 на основании общих результатов, полученных в § 1 – § 3, проводится полная классификация подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

§ 1. Максимальные подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$

Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle Y_1, \ldots, Y_s \rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1, \ldots, Y_s$; R^m — m-мерное арифметическое векторное пространство над R; $U = U_{1,n}$ — $(1+n)$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением

$$(X, Y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \cdots - x_n y_n; \tag{1.1}$$

$O(1,n)$ — группа линейных преобразований $U_{1,n}$, сохраняющих (X,X) для каждого $X \in U_{1,n}$. Будем предполагать, что $O(1,n)$ реализирована в виде вещественных матриц порядка $n+1$.

Расширенной группой Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$ называется мультипликативная группа матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in O(1,n)$, $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, $Y \in R^{n+1}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Используя определение алгебры Ли, легко получить, что $AO(1,n)$ состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \cdots & \alpha_{0,n-1} & \alpha_{0n} \\ \alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & -\alpha_{1,n-1} & -\alpha_{2,n-1} & \cdots & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{0n} & -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \cdots & -\alpha_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Пусть E_{ik} — матрица порядка $n+2$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-ого столбца и нули на всех остальных местах $(i,k=0,1,\ldots,n+1)$. Легко получить, что базис алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ образуют матрицы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}=E_{00}+E_{11}+\cdots+E_{nn}, \qquad J_{0a}=-E_{0a}-E_{a0},\\
&J_{ab}=-E_{ab}+E_{ba}, \qquad P_0=E_{0,n+1}, \qquad P_a=E_{a,n+1}\\
&(a<b,\ a,b=1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[J_{\alpha\beta},J_{\gamma\delta}]=g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma},\\
&[P_\alpha,J_{\beta\gamma}]=g_{\alpha\beta}P_\gamma-g_{\alpha\gamma}P_\beta, \qquad J_{\beta\alpha}=-J_{\alpha\beta},\\
&[P_\alpha,P_\beta]=0, \qquad [\mathbb{D},J_{\alpha\beta}]=0, \qquad [\mathbb{D},P_\alpha]=P_\alpha,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где $g_{00}=-g_{11}=\cdots=-g_{nn}=1$, $g_{\alpha\beta}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$ $(\alpha,\beta=0,1,\ldots,n)$.

Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(1,n)$, а генераторы трансляций P_α порождают коммутативный идеал N, причем $A\tilde{P}(1,n)=N\supsetplus(AO(1,n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle)$. Пусть $\tilde{O}(1,n)=\{\lambda E|\lambda\in R,\lambda>0\}\times O(1,n)$, где E — единичная матрица порядка $n+1$. Очевидно, $A\tilde{O}(1,n)=AO(1,n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$. Легко видеть, что $[X,Y]=X\cdot Y$ для любых $X\in A\tilde{O}(1,n)$, $Y\in N$. Отождествим N и $U_{1,n}$, сопоставив P_i $(n+1)$-мерный столбец с единицей на i-ом месте и с нулями на остальных местах $(i=0,1,\ldots,n)$.

Пусть C — такая матрица порядка $n+2$ над R, что отображение $\varphi_C: X\to CXC^{-1}$ является автоморфизмом алгебры $A\tilde{P}(1,n)$. Если $C\in G$, G — подгруппа $\tilde{P}(1,n)$, то φ_C называется G-автоморфизмом. Подалгебры L и L' алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ называются $\tilde{P}(1,n)$-сопряженными, если $\varphi_C(L)=L'$ для некоторого $\tilde{P}(1,n)$-автоморфизма φ_C алгебры $A\tilde{P}(1,n)$.

Пусть W — невырожденное подпространство пространства U. Это подпространство также считаем псевдоевклидовым относительно скалярного произведения, заданного в U. Пусть $O(W)$ — группа изометрий пространства W, $\tilde{O}(W)=\{\lambda E|\lambda\in R,\lambda>0\}\times O(W)$. Если F — подалгебра $A\tilde{O}(W)$, то тождественное отображение F является представлением F в $A\tilde{O}(W)$. Будем называть его тривиальным представлением F в $A\tilde{O}(W)$. Подалгебра $F\subset A\tilde{O}(W)$ называется неприводимой, если тривиальное представление F является неприводимым. Подалгебра $F\subset A\tilde{O}(W)$ называется вполне приводимой, если ее тривиальное представление вполне приводимо.

Теорема 1.1. *Максимальные приводимые подалгебры алгебры исчерпываются относительно $\tilde{O}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами: 1) $AO(1,n-1)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$; 2) $AO(n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$; 3) $AO(1,k)\oplus AO'(n-k)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$, где $AO'(n-k)=\langle J_{ab}|a,b=k+1,\ldots,n\rangle$ $(k=2,\ldots,n-2)$; 4) $\langle G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle\supsetplus(AO(n-1)\oplus\langle J_{0n},\mathbb{D}\rangle)$, где $G_a=J_{0a}-J_{an}$ $(a=1,\ldots,n-1)$.*

Доказательство. Если L — максимальная подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, то $L=AO(1,n)$ или $L=L_1\oplus\langle\mathbb{D}\rangle$, где L_1 — максимальная подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Пусть F — максимальная приводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$, U' — подпространство пространства U, инвариантное относительно F. Если U' — вырожденное пространство, то оно содержит одномерное F-инвариантное изотропное подпространство W, сопряженное относительно $O(1,n)$ пространству $\langle P_0+P_n\rangle$. В этом случае

$$F=\{X\in AO(1,n)|(\forall\, Y\in W)\ (X\cdot Y\in W)\}.$$

Нетрудно получить, что

$$F=\langle G_1,\ldots,G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle).$$

Если U' — невырожденное пространство размерности r, то в нем существует ортогональный базис, состоящий из векторов ненулевой длины. Пусть r_-, r_+ — соответственно числа векторов отрицательной и положительной длины в данном базисе пространства U'. Эти числа не зависят от выбора базиса. Согласно теореме Витта два пространства U' и U'_1, для которых $r_-=r^1_-$, $r_+=r^1_+$, являются сопряженными относительно группы $O(1,n)$. Очевидно, $r_+\in\{0,1\}$. Так как $U=U'\oplus U'^1$ и U'^1 инвариантно относительно F, то алгебра F $O(1,n)$-сопряжена одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,k)\oplus AO'(n-k)$. Теорема доказана.

Пусть $A\tilde{E}(n)=\langle P_1,\ldots,P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n)\oplus\langle\mathbb{D}\rangle)$, $AE'(n-k)=\langle P_{k+1},\ldots,P_n\rangle \subset\!\!\!\!+ AO'(n-k)$, $A\tilde{G}(n-1)$ — расширенная алгебра Галилея с базисом: $M=P_0+P_n$, P_0, P_1, …, P_{n-1}, G_1, …, G_{n-1}, J_{ab} $(a,b=1,\ldots,n-1)$. Согласно теореме 1.1 описание подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ сводится к описанию относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности неприводимых подалгебр алгебры $AO(1,n)$ и подалгебр таких алгебр: $A\tilde{E}(n)$, $(AP(1,k)\oplus AE'(n-k)\subset\!\!\!\!+\langle\mathbb{D}\rangle$, $A\tilde{G}(n-1)\subset\!\!\!\!+\langle J_{0n},\mathbb{D}\rangle$, $(k=2,\ldots,n-1)$.

Пусть π — проектирование алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ на $A\tilde{O}(1,n)$, F — подалгебра $A\tilde{O}(1,n)$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,n)$, что $\pi(\hat{F})=F$. Если алгебра $\hat{F}$ $\hat{P}(1,n)$-сопряжена алгебре $W\subset\!\!\!\!+ F$, где W есть F-инвариантное подпространство пространства U, то $\hat{F}$ будем называть расщепляемой в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Если любая подалгебра $\hat{F}\subset A\tilde{P}(1,n)$, удовлетворяющая условию $\pi(\hat{F})=F$, является расщепляемой, то будем говорить, что подалгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$. Аналогично определяется расщепляемость подалгебр и для других алгебр неоднородных преобразований. Если ничего не оговорено, то исследование подалгебр данной алгебры на сопряженность проводится относительно группы внутренних автоморфизмов.

Предложение 1.1. *Пусть F — вполне приводимая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства V над полем R, W — неприводимый F-подмодуль модуля V. Если $FW\neq 0$, то алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $W\subset\!\!\!\!+ F$.*

Доказательство. Поскольку F — вполне приводимая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, то $F=Q\oplus Z(F)$, где Q — фактор Леви, а $Z(F)$ — центр F [25]. Используя тождество Якоби, нетрудно получить, что каждое прямое слагаемое алгебры F аннулирует в W только нулевое подпространство.

Пусть $Q\neq 0$, $\hat{F}$ — такая подалгебра алгебры $W\subset\!\!\!\!+ F$, что ее проекция на F совпадает с F. По лемме Уайтхеда [25] $H^1(Q,W)=0$, откуда вытекает что с точностью до сопряженности относительно группы автоморфизмов $\exp(\theta Y)$ $(\theta\in R$, $Y\in W)$ алгебра $\hat{F}$ содержит Q. Пусть $J\in Z(F)$, $Y\in W$, $Y\neq 0$ и $J+Y\in\hat{F}$. Так как $[Q,Y]\neq 0$, то существует такой элемент $X\in Q$, что $[X,Y]\neq 0$. Пусть $Y_1=[X,Y]$, W_1 — F-подмодуль модуля W, порожденный Y_1. Вследствие того, что $W_1\neq Q$ и W — неприводимый F-модуль, имеем $W_1=W$. Отсюда вытекает, что $J\in\hat{F}$. Следовательно, если $Q\neq 0$, то $F\subset\hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра.

Пусть $Q=0$, $J\in Z(F)$. Поскольку J аннулирует в W только нулевое подпространство, то $[J,W]=W$. Отсюда следует, что для любого $Y\in W$ существует такой элемент $Y'\in W$, что $[J,Y']=Y$. Поэтому можно предполагать, что $J\in\hat{F}$. Если $\hat{F}$ содержит J_1+Y_1, где $Y_1\in W$ и $Y_1\neq 0$, то $[J,Y_1]\in\hat{F}$ и $[J,Y_1]\neq 0$. Как и в случае $Q\neq 0$ получаем, что $Y_1\in\hat{F}$, т.е. $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Предложение доказано.

Предложение 1.2. *Пусть* $A\tilde{E}(n-1)=\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle \subset\!\!\!\!+ (AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle)$*, где* $G_a=J_{0a}-J_{an}$ $(a=1,\dots,n-1)$. *Подалгебра* $F\subset AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ *обладает только расщепляемыми расширениями в* $A\tilde{E}(n-1)$ *тогда и только тогда, когда* F *— полупростая алгебра или* F *не сопряжена подалгебре алгебры* $AO(n-2)$.

Доказательство. Пусть $W=\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$. Поскольку каждая подалгебра алгебры $AO(n-1)$ является вполне приводимой и $[J_{0n},G_a]=-G_a$, то каждая подалгебра F алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ также является вполне приводимой алгеброй линейных преобразований пространства W.

Пусть $W=W_1\oplus\dots\oplus W_s$ — разложение W в прямую сумму неприводимых F-модулей. Если проекция F на $\langle J_{0n}\rangle$ не является нулевой, то $[F,W_i]=W_i$ для всех $i=1,\dots,s$. Отсюда в силу предложения 1.1 вытекает, что F обладает только расщепляемыми, расширениями в $A\tilde{E}(n-1)$. Допустим, что проекция F на $\langle J_{0n}\rangle$ равна 0. Если F — полупростая алгебра, то по лемме Уайтхеда [25] $H^1(F,W)=0$, а потому каждое расширение F в $A\tilde{E}(n-1)$ расщепляемо. Пусть F не является полупростой алгеброй. При $\dim W_i\geq 2$ имеем $[F,W_i]\neq 0$, и в силу предложения 1.1 F обладает только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{E}(n-1)$. При $\dim W_i=1$ модуль W_i аннулируется алгеброй F и алгебра F сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-2)$. Если $Z(F)$ — центр F и X — ненулевой элемент $Z(F)$, то для любого ненулевого $Y\in W_i$ существует подалгебра $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{E}(n-1)$, получаемая из алгебры F в результате замены X на $X+Y$. Очевидно, $\hat{F}$ не расщепляется. Предложение доказано.

Из теоремы 1.1 и свойств разрешимых подалгебр алгебры $AO(n)$ вытекает, что если n — нечетное число, то $AO(1,n)$ обладает относительно $O(1,n)$-сопряженности только одной максимальной разрешимой подалгеброй:

$$\langle G_1,\dots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},J_{0n}\rangle.$$

Если n — четное число, то $AO(1,n)$ обладает двумя максимальными разрешимыми подалгебрами:

$$\langle J_{12},J_{34},\dots,J_{n-1,n}\rangle,\qquad \langle G_1,\dots,G_{n-1},J_{12},J_{34},\dots,J_{n-3,n-2},J_{0n}\rangle.$$

Поскольку расширение абелевой алгебры с помощью разрешимой алгебры является разрешимой алгеброй, то максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AP(1,n)$ имеют вид $U\subset\!\!\!\!+\, F$, где F — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$. Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ исчерпываются алгебрами $U\subset\!\!\!\!+\,(F\oplus\langle\mathbb{D}\rangle)$.

Предложение 1.3. *Максимальные абелевы подалгебры алгебры* $A\tilde{O}(1,n)$ *исчерпываются относительно* $\tilde{O}(1,n)$*-сопряженности такими алгебрами:*

$n=2k+1$

$\langle J_{12},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},J_{0n},\mathbb{D}\rangle;\qquad \langle G_1,G_2,\dots,G_{n-1},\mathbb{D}\rangle;$

$\langle G_1,G_2,\dots,G_{2a},J_{2a+1,2a+2},J_{34},\dots,J_{n-2,n-1},\mathbb{D}\rangle\quad (a=1,\dots,k-1);$

$n = 2k$

$\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-1,n}, \mathbb{D}\rangle$; $\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$;

$\langle G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, \mathbb{D}\rangle$; $\langle J_{12}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, G_{n-1}, \mathbb{D}\rangle$;

$\langle G_1, G_2, \ldots, G_{2a}, G_{n-1}, J_{2a+1,2a+2}, J_{34}, \ldots, J_{n-3,n-2}, \mathbb{D}\rangle$ $(a = 1, \ldots, k-2)$.

Записанные алгебры попарно не сопряжены.

Доказательство. Если F — максимальная абелева подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, то в силу предложения 1.2 $F = \Omega \oplus L \oplus \langle\mathbb{D}\rangle$, где L — подалгебра алгебры $AO(n-1)\oplus\langle J_{0n}\rangle$ или алгебры $AO(n)$, а Ω — подпространство $\langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$. Если проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ отлична от нуля, то $\Omega = 0$. Пусть проекция L на $\langle J_{0n}\rangle$ является нулевой. Если L — подалгебра Картана алгебры $AO(n)$, то $\Omega = 0$. В остальных случаях при $L \neq 0$ можно предполагать, что $L = \langle J_{2t+1,2t+2} | t = a, \ldots, l-1\rangle$ $(l = [n-1/2]$, $a = 1, \ldots, l-1)$, а $\Omega = \{G_c | [L, G_c] = 0\}$. Предложение доказано.

§ 2. Вполне приводимые подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$

В этом параграфе мы докажем ряд общих результатов о вполне приводимых подалгебрах алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ и покажем, как для этих подалгебр находить инвариантные подпространства пространства U.

Предложение 2.1. *Пусть W — евклидово пространство над полем R, F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W)$. Если $\dim W = 2n+1$, то F — полупростая алгебра. Если $\dim W = 2n$, $n \geq 2$, и F — неполупростая алгебра, то $F = Q \oplus \langle J\rangle$, где Q — фактор Леви, а $J^2 = -E$ (E — единичная матрица порядка $2n$). Каждая простая компонента и центр алгебры F аннулируют в W только нулевое пространство.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(W)$. Тогда [25] $F = Z(F) \oplus Q$, где $Z(F)$ — центр, а Q — фактор Леви. Если F — абсолютно неприводимая алгебра, то в силу леммы Шура каждая матрица из $Z(F)$ является скалярной. Поскольку след любой матрицы из $AO(W)$ равен 0, то $Z(F) = 0$.

Допустим, что F не является абсолютно неприводимой. Если $\dim W = k$, то $k \equiv 0 \pmod 2$ и с точностью до $O(k,C)$-сопряженности каждый элемент алгебры F можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \bar{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\bar{\Delta}$ — матрица, сопряженная Δ. Так как Δ, $\bar{\Delta}$ — абсолютно неприводимые представления алгебры F, то в силу леммы Шура элементы $Z(F)$ можно записать в виде $\operatorname{diag}[i\lambda E, -i\lambda E]$ $(\lambda \in R)$. Следовательно, $\dim Z(F) \leq 1$, Очевидно, $(\operatorname{diag}[iE, -iE])^2 = \operatorname{diag}[-E, -E]$.

Пусть L — простая компонента алгебры Q, $F = L \oplus N$, W' — такое подпространство W, что $[L, W'] = 0$. Если $X \in L$, $X_1 \in N$, $Y \in W'$, то на основании тождества Якоби $[X, [Y, X_1]] = 0$, а поэтому W' — F-модуль. В силу неприводимости W получаем, что $W' = 0$. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Если $n \geq 2$, то неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$ является полупростой и некомпактной.*

Доказательство. Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,n)$, $Z(F)$ — центр F. Если $Z(F) \neq 0$, то как и в доказательстве предложения 2.1

получаем, что $Z(F) = \langle J \rangle$, где $J^2 = -E$. Пусть X — произвольный элемент вида (1.2) алгебры $AO(1,n)$. Если $X^2 = -E$, то $\alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \cdots + \alpha_{0n}^2 = -1$. Полученное противоречие доказывает, что $Z(F) = 0$, Значит, F — полупростая алгебра.

Если F — компактная алгебра, то существует такая симметрическая матрица $C \in GL(n{+}1, R)$, что $C^{-1}FC \subset AO(n{+}1)$ [26]. Так как $\exp(C^{-1}FC) = C^{-1}{\cdot}\exp F{\cdot}$ C, то в $O(n+1)$ существует неприводимая группа, сохраняющая одновременно $x_0^2{+}x_1^2{+}\cdots{+}x_n^2$ и $\lambda_0^2x_0^2{-}\lambda_1^2x_1^2{-}\cdots{-}\lambda_n^2x_n^2$ ($\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ненулевые вещественные числа). Полученное противоречие и доказывает вторую часть предложения.

Предложение 2.3. *Приводимая подалгебра алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ является вполне приводимой тогда и только тогда, когда она сопряжена подалгебре алгебры $L \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ или одной из алгебр: $L_1 \oplus L_2$, $L_1 \oplus L_2 \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$, где $L = AO(n)$ или $L = AO(n-1) \oplus \langle J_{0n} \rangle$, L_1 — неприводимая подалгебра алгебры $AO(1,k)$ $(k > 1)$, а L_2 — подалгебра алгебры $AO'(n-k) = \langle J_{ab} \,|\, a, b = k+1, \ldots, n \rangle$.*

Предложение 2.3 является следствием предложений 1.2, 2.2 и того факта, что G_a действует не вполне приводимо на пространстве $\langle P_0 + P_n, P_a \rangle$.

Предложение 2.4. *Вполне приводимая подалгебра F алгебры $A\tilde{O}(1,n)$ обладает только расщепляемыми расширениями в алгебре $A\tilde{P}(1,n)$ тогда и только тогда, когда F полупроста или F не сопряжена подалгебре одной из алгебр: $AO(n)$, $AO(1,n-1)$.*

Доказательство предложения 2.4 аналогично доказательству предложения 1.2.

Предложение 2.5. *Пусть L — алгебра Ли над полем R, Γ и Γ' — представления алгебры L кососимметрическими матрицами. Для того чтобы Γ и Γ' были эквивалентными над R, необходимо и достаточно, чтобы $C\Gamma C^{-1} = \Gamma'$ для некоторой ортогональной матрицы C.*

Доказательство. Представления Γ и Γ' являются вполне приводимыми:

$$B\Gamma(X)B^{-1} = \mathrm{diag}\,[\Gamma_1(X), \ldots, \Gamma_m(X)], \quad B'\Gamma'(X)B'^{-1} = \mathrm{diag}\,[\Gamma_1'(X), \ldots, \Gamma_{m'}'(X)],$$

где $X \in L$, а B, B' — ортогональные матрицы. Если Γ эквивалентно Γ' над R, то $m = m'$ и

$$C_i\Gamma_i(X)C_i^{-1} = \Gamma_{k_i}'(X) \tag{2.1}$$

для вещественной матрицы C_i и произвольного $X \in L$ $(i = 1, \ldots, m)$. Покажем, что в качестве C_i можно взять ортогональную матрицу.

Матрицу C_i, удовлетворяющую соотношению (2.1), можно записать в виде T_iO_i, где T_i — положительно определенная симметрическая матрица, а O_i — ортогональная матрица. Равенство (2.1) запишем в таком виде:

$$T_i(O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1})T_i^{-1} = \Gamma_{k_i}'(X).$$

Если в последнем равенстве перейти к транспонированным матрицам, то получим, что

$$T_i^{-1}(O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1})T_i = \Gamma_{k_i}'(X).$$

Отсюда и из предыдущего равенства вытекает, что

$$T_i^{-1}\Gamma_{k_i}'(X)T_i = T_i\Gamma_{k_i}'(X)T_i^{-1}$$

или

$$T_i^2\Gamma'_{k_i}(X)T_i^{-2} = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Так как T_i — положительная матрица, то $T_i = f(T_i^2)$, где $f(x)$ — многочлен над P. Следовательно,

$$T_i\Gamma'_{k_i}(X)T_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X),$$

а потому

$$O_i\Gamma_i(X)O_i^{-1} = \Gamma'_{k_i}(X).$$

Пусть $C = \mathrm{diag}\,[O_1,\ldots,O_m]$. Очевидно, C — ортогональная матрица и с точностью до нумерации подпредставлений $C\Gamma(X)C^{-1} = \Gamma'(X)$ $(X \in L)$. Предложение доказано.

Предложение 2.6. *Пусть F — неприводимая подалгебра алгебры $A\tilde{O}(n)$, $W = \langle P_1,\ldots,P_n\rangle$. Каждый автоморфизм алгебры $W \subset\!\!\!\!+ F$ является $\tilde{E}(n)$-автоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $F = L \oplus Q$, где L — центр, а Q — фактор Леви. Если φ — автоморфизм алгебры $W \subset\!\!\!\!+ F$, то $\varphi(W \subset\!\!\!\!+ L) = W \subset\!\!\!\!+ L$ и с точностью до $\tilde{E}(n)$-автоморфизма $\varphi(Q) = Q$. Вследствие неприводимости F имеем $\varphi(W) = W$. Поскольку F не сопряжена подалгебре алгебры $AO(n-1)$, то на основании предложения 1.1 $\varphi(L) = L$. Так как $[\varphi(X),\varphi)P_i)] = \varphi([X,P_i])$ $(i = 1,\ldots,n)$, то для каждого $X \in F$ матрица оператора $\varphi(X)$ в базисе $\varphi(P_1),\varphi(P_2),\ldots,\varphi(P_n)$ совпадает с матрицей оператора X в базисе $P_1,P_2,\ldots,P_n$. Отсюда вытекает, что если B — матрица перехода от базиса $P_1,P_2,\ldots,P_n$ до базиса $\varphi(P_1),\varphi(P_2),\ldots,\varphi(P_n)$, то $BXB^{-1} = \varphi(X)$. Пусть $B = TO$, где T — положительно определенная симметрическая матрица, а O — ортогональная матрица. Тогда $T\cdot\varphi(X) = \varphi(X)\cdot T$. Пусть λ — собственное значение матрицы T. Так как $(T-\lambda E)\cdot\varphi(X) = \varphi(X)\cdot(T-\lambda E)$, то по лемме Шура $T - \lambda E = 0$, а значит, $B = \lambda O$. Предложение доказано.

Пусть A_i — алгебра Ли над R $(i = 1,2)$, $f : A_1 \to A_2$ — изоморфизм, $B = \{X, F(X) \mid X \in A_i\}$. Полагая

$$[(X_1, f(X_1)),(X'_1, f(X'_1))] = ([X_1,X'_1], f([X_1,X'_1]))$$

и определяя сложение и умножение на скаляры покомпонентно, превращаем B в алгебру Ли над R. Обозначим ее через (A_1,A_2,f). Очевидно, (A_1,A_2,f) — подпрямая сумма алгебр A_1 и A_2.

Пусть W_i — левый A_i-модуль $(i = 1,2)$. Легко видеть, что W_i является B-модулем, если положить $(X,f(X))\cdot Y_1 = X\cdot Y_1$, $(X,f(X))\cdot Y_2 = f(X)\cdot Y_2$ для любых $X \in A_1$, $Y \in W_i$ $(i = 1,2)$. Пусть W — B-подмодуль модуля $W_1 \oplus W_2$. Если $W = W'_1 \oplus W'_2$, где $W'_i \subset W_i$ $(i = 1,2)$, то W называется расслоенным B-модулем. В противном случае модуль W называется нерасслоенным B-модулем.

Лемма 2.1. *Пусть $B = (A_1,A_2,f)$, V_i — левый A_i-модуль $(i = 1,2)$. Для того чтобы в B-модуле $V_1 \oplus V_2$ существовал нерасслоенный B-подмодуль, необходимо и достаточно, чтобы B-модули V_1 и V_2 обладали изоморфными композиционными факторами.*

Доказательство. Пусть W — нерасслоенный B-подмодуль модуля $V_1 \oplus V_2$. Тогда W — подпрямая сумма модулей W_1 и W_2, где $W_i \subset V_i$ $(i = 1,2)$. Пусть $S_i =$

$W \cap V_i$ $(i = 1,2)$. Очевидно S_i — B-подмодуль модуля W. Модуль $W/(S_1 \oplus S_2)$ является нерасслоенным B-подмодулем модуля $V_1/S_1 \oplus V_2/S_2$. Вследствие этого будем предполагать, что $W \cap V_i = 0$ $(i = 1,2)$.

Для каждого элемента $Y_1 \in W_1$ существует единственный элемент $Y_2 \in W_2$, такой, что $(Y_1, Y_2) \in W$. Полагаем, что $\varphi(Y_1) = Y_2$. Отображение φ является изоморфизмом B-модулей W_1 и W_2. Но в таком случае модули W_1 и W_2 обладают изоморфными композиционными факторами. Необходимость леммы доказана.

Пусть W_i — левый B-подмодуль модуля V_i $(i = 1,2)$ и пусть композиционный фактор W_1/N_1 модуля W_1 изоморфен композиционному фактору W_2/N_2 модуля W_2. Через W обозначим векторное пространство над полем R, порожденное парами $(Z_1, 0)$, $(0, Z_2)$, (Y_1, Y_2), где $Z_i \in N_i$, $Y_i \in W_i$ $(i = 1,2)$ и $\varphi(Y_1 + N_1) = Y_2 + N_2$ для изоморфизма $\varphi : W_1/N_1 \to W_2/N_2$. Легко видеть, что W — нерасслоенный B-модуль. Достаточность леммы доказана.

Пусть Γ — тривиальное представление вполне приводимой алгебры $F \subset A\tilde{O}(1,n)$, не имеющей инвариантных изотропных подпространств в пространстве U. Тогда Γ $O(1,n)$-эквивалентно $\Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_m$, где $F_i = \{\mathrm{diag}\,[0, \ldots, \Gamma_i(X), \ldots, 0] \mid X \in F\}$ является неприводимой подалгеброй алгебры $A\tilde{O}(W_1)$. Если $F_i \neq 0$, то алгебру F_i будем называть неприводимой частью алгебры F. Если Γ_i и Γ_j суть эквивалентные представления , то в силу предложений 2.2, 2.5 можно предполагать, что для любого $X \in F$ имеет место равенство $\Gamma_i(X) = \Gamma_j(X)$. Объединив эквивалентные ненулевые неприводимые подпредставления, мы получим ненулевые дизъюнктные примарные подпредставления представления Γ. Соответствующие им подалгебры алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, построенные по тому же правилу, что и неприводимые части F_i, будем называть примарными частями алгебры F.

Теорема 2.1. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части подалгебры F алгебры $A\tilde{O}(1,n)$, V — подпространство пространства $U = \langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle$, инвариантное относительно F. Тогда $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q \oplus \tilde{V}$, где $V_i = [K_i, V] = [K_i, V_i]$, $[K_j, V_i] = 0$ при $j \neq i$ $(i, j = 1, \ldots, q)$, $\tilde{V} = \{X \in V \mid [F, X] = 0\}$. Если примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$, то относительно $O(1,n)$ сопряженности ненулевые подпространства W пространства U с условием $[K, W] = W$ исчерпываются пространствами: $W_1, W_1 \oplus W_2, \ldots, W_1, \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$.*

Доказательство. Из полной приводимости алгебры F вытекает, что $V = V' \oplus \tilde{V}$, где $\tilde{V}$ — максимальное подпространство пространства V, аннулируемое F. Далее будем предполагать, что $V = V'$. На основании предложения 2.2 можно допускать, что $F \subset AO(m)$, $m \leq n$. Пусть K_i — подпрямая сумма неприводимых частей $K_{i1}, \ldots, K_{is_i}$, $V_{ij} = [K_{ij}, V]$, π_{ij} — проектирование V на V_{ij} $(i = 1, \ldots, q;$ $j = 1, \ldots, s_i)$. Допустим, что $\pi_{ab}(V) \neq 0$. На основании леммы 2.1 для каждой пары (c, d), где $1 \leq c \leq q$, $c \neq a$, $1 \leq d \leq s_c$, в пространстве V существует такое F-инвариантное подпространство Ω, что $\pi_{ab}(\Omega) \neq 0$ и $\pi_{cd}(\Omega) = 0$. Отсюда следует, что в V существует максимальное F-инвариантное подпространство U_{ab} со свойством: $\pi_{ab}(U_{ab}) \neq 0$, $\pi_{cd}(U_{ab}) = 0$ для всех $c \neq a$, $d = 1, 2, \ldots, s_c$. Очевидно, $V_a = U_{ab}$.

Пусть примарная алгебра K является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$. Допустим, что W — ненулевое подпространство пространства $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ и $[K, W] = W$. На основании теоремы Витта существует такая изометрия $B \in O(W)$, что $B(W) =$

$W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ $(1 \le s \le r)$ и пространство W_i инвариантно относительно BKB^{-1} $(i = 1, \ldots, s)$. Отсюда получаем, что BKB^{-1} является подпрямой суммой неприводимых подалгебр соответственно алгебр $AO(W_1), AO(W_2), \ldots, AO(W_r)$. Поскольку в силу предложения 2.5 неприводимые части алгебры определяются однозначно с точностью до сопряженности, то можно считать, что BKB^{-1}. Теорема доказана.

На основании теоремы 2.1 описание расщепляемых подалгебр $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1,n)$, для которых $\pi(\hat{F})$ — вполне приводимая алгебра и не имеет изотропных инвариантных подпространств в пространстве U, сводится к описанию неприводимых подалгебр алгебр $AO(1,k)$ и $AO(k)$ $(k = 2, 3, \ldots n)$. Остальные случаи сводятся к случаю алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{+\!\!\!\!\!\supset} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$.

§ 3. Подалгебры алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{+\!\!\!\!\!\supset} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$

Расширенная алгебра Галилея $A\tilde{G}(n-1)$ имеет базис, состоящий из $M = P_0 + P_n$, P_0, P_1, …, P_{n-1}, G_1, …, G_{n-1}, J_{ab}, $(a < b,\ a, b = 1, \ldots, n-1)$, где $G_a = J_{0a} - J_{an}$ $(a = 1, 2, \ldots, n-1;\ n \ge 3)$. Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = g_{ad}J_{bc} + g_{bc}J_{ad} - g_{ac}J_{bd} - g_{bd}J_{ac}, \quad [P_a, J_{bc}] = g_{ab}P_c - g_{ac}P_b,\\
&[P_a, P_b] = 0, \quad [G_a, J_{bc}] = g_{ab}G_c - g_{ac}G_b, \quad [G_a, G_b] = 0, \quad [P_a, G_b] = \delta_{ab}M,\\
&[P_a, M] = [G_a, M] = [J_{ab}, M] = [P_0, J_{ab}] = [P_0, M] = [P_0, P_a] = 0,\\
&[P_0, G_a] = P_a \qquad (a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n-1).
\end{aligned}$$

Целью данного параграфа является изучение подалгебр алгебры $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{+\!\!\!\!\!\supset} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности.

Пусть $V = \langle G_1, \ldots, G_{n-1}\rangle$ — евклидово пространство с ортонормированным базисом $G_1, \ldots, G_{n-1}$, $V' = [P_0, V]$, $V' = \langle P_1, \ldots, P_{n-1}\rangle$ $(n \ge 3)$. Условимся группу $O(n-1)$ отождествлять с группами изометрий $O(V)$, $O(V')$.

Леммы 3.1. *Пусть $W_1 = \langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle$, $W_2 = \langle Z_1, \ldots, Z_m\rangle$ — евклидовы пространства над полем R, $O(W_i)$ — группа изометрий W_i $(i = 1, 2)$. Подпространства пространства $W_1 \oplus W_2$ исчерпываются относительно $O(W_1) \times O(W_2)$-сопряженности такими пространствами:*

$$\begin{aligned}
&O, \quad \langle Y_1, \ldots, Y_r\rangle, \quad \langle Z_1, \ldots, Z_s\rangle, \quad \langle Y_1, \ldots, Y_r, Z_1, \ldots, Z_s\rangle \quad (r, s = 1, \ldots, m),\\
&\langle Y_1, \ldots, Y_k, Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \ldots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t\rangle \oplus \Omega,
\end{aligned}$$

где $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_t$, а Ω совпадает с одним из пространств: O, $\langle Z_{t+1}\rangle$, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}\rangle$, …, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_m\rangle$ $(k = 1, \ldots, m-1;\ t = 1, \ldots, m-k)$, $\langle Y_1 + \alpha_1 Z_1, \ldots, Y_t + \alpha_t Z_t\rangle \oplus \Omega$, где $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_t$, а Ω совпадает с одним из пространств: O, $\langle Z_{t+1}\rangle$, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}\rangle$, …, $\langle Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_m\rangle$ $(t = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Пусть N — подпространство $W_1 \oplus W_1$ и $N \ne W_1' \oplus W_2'$, где W_i' — подпространство W_i $(i = 1, 2)$. Если $S_i = N \cap W_i$, N_i — проекция N на W_i $(i = 1, 2)$, то $N_1/S_1 \cong N_2/S_2$. Пусть $\dim S_1 = k$. По теореме Витта пространство S_1 сопряжено $\langle Y_1, \ldots, Y_k\rangle$. Если $\dim (N_1/S_1) = t$, то N содержит элементы $Y_{k+j} + \alpha_{1j}Z_1 + \cdots + \alpha_{tj}Z_t$ $(j = 1, \ldots, t)$, причем матрица $A = (\alpha_{ij})$ невырождена. Матрица A однозначно представляется в виде CT, где C — ортогональная матрица, а T — положительно определенная симметрическая матрица. Изометрия $\operatorname{diag}[E_m, C^{-1}, E_{m-t}]$ отображает N на пространство, которому соответствует матрица $C^{-1}(CT) = T$. Существует такая ортогональная матрица C_1, что

$C_1TC_1^{-1} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_t]$. Изометрия $\operatorname{diag}[E_k, C_1, E_{m-k-t}, C_1, E_{m-t}]$ отображает N на пространство, которому соответствует матрица $C_1TC_1^{-1}$. Следовательно, N сопряжено пространству $S_1 \oplus \langle Y_{k+1} + \alpha_1 Z_1, \dots, Y_{k+t} + \alpha_t Z_t\rangle \oplus S_2$, где $\alpha_j > 0$ $(j = 1, \dots, t)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $L = \langle G_1, \dots, G_k\rangle$ $(1 \le k \le n-1)$, F — подпрямая сумма L и $\langle \mathbb{D}\rangle$. Алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в $A\tilde{P}(1,n)$.*

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ — такая подалгебра $A\tilde{P}(1,n)$, что $\pi(\hat{F}) = F$. С точностью до $O(n-1)$-сопряженности можно предполагать , что $\hat{F}$ содержит генератор

$$X_1 = G_1 + \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu P_\nu + \gamma \mathbb{D} \qquad (\gamma \ne 0).$$

Очевидно,

$$\exp\left(\sum b_\mu P_\mu\right) \cdot X_1 \cdot \exp\left(-\sum b_\mu P_\mu\right) = G_1 + \gamma\mathbb{D} + (\alpha_0 - \gamma b_0 + b_1)P_0 +$$
$$+(\alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1)P_1 + (\alpha_n + b_1 - \gamma b_n)P_n + \sum_{2}^{n-1} (\alpha_1 - \gamma b_i)P_i.$$

Полагаем

$$\begin{aligned} &\alpha_0 - \gamma b_0 + b_1 = 0, && \alpha_1 + b_0 - b_n - \gamma b_1 = 0, \\ &\alpha_n + b_1 - \gamma b_n = 0, && \alpha_i - \gamma b_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n-1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Определитель из коэффициентов при b_0, b_1, b_n равен $-\gamma^3$. Поскольку $\gamma \ne 0$, то система (3.1) имеет решение. Следовательно, можно предполагать, что $X_1 = G_1 + \gamma\mathbb{D}$. Пусть $a \ne 1$, $X_a = G_a + \sum \alpha_\mu P_\mu + \delta\mathbb{D}$ $(\mu = 0, 1, \dots, n)$. Так как

$$[X_1, X_a] = -(\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M + \gamma \sum \alpha_\mu P_\mu,$$
$$[X_1, X_a] - \gamma X_a = -\gamma G_a - \gamma\delta\mathbb{D} - (\alpha_0 - \alpha_n)P_1 - \alpha_1 M,$$

то будем допускать, что $X_a = G_a + \alpha M + \beta P_1 + \delta\mathbb{D}$. Тогда $[X_1, X_a] = (\gamma\alpha - \beta)M + \gamma\beta P_1$ $(a = 2, \dots, k)$.

Если $\gamma\alpha - \beta \ne 0$, то будем считать, что $\alpha = 0$, $\beta \ne 0$. Поскольку

$$[X_1, [X_1, X_a]] = -2\gamma\beta M + \gamma^2\beta P_1,$$

то $\hat{F}$ содержит $M - \gamma P_1$, $-2m + \gamma P_1$, а потому $M, P_1 \in \hat{F}$. Значит, $G_a + \delta\mathbb{D} \in \hat{F}$.

Пусть $\gamma\alpha - \beta = 0$. Если $\beta \ne 0$, то $P_1 \in \hat{F}$. Поскольку $[X_1, P_1] = [G_1 + \gamma\mathbb{D}, P_1] = -M + \gamma P_1$, то $M \in \hat{F}$, а следовательно $G_a + \delta\mathbb{D} \in \hat{F}$. Если $\beta = 0$, то $\alpha = 0$. Это доказывает, что $\hat{F}$ — расщепляемая алгебра. Лемма доказана.

Пусть

$$\begin{aligned} &\Omega_{0n}^0 = \langle M\rangle, \qquad \Omega_{0n}^i = \langle M, P_1, \dots, P_i\rangle, \qquad \Omega_{0n}^k = \langle P_0, P_n, P_1, \dots, P_k\rangle, \\ &\Omega_s^t = \langle P_s, \dots, P_t\rangle, \qquad \Lambda_{r+1}^j = \langle P_{r+d} + \lambda_d P_{k+d} \mid d = 1, 2, \dots, j-r\rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_{j-r}$ $(r+1 \le j \le k)$.

Предложение 3.1. *Пусть $L = \langle G_1, \dots, G_k\rangle$. Подпространства пространства $U = \langle P_0, P_1, \dots, P_n\rangle$, инвариантные относительно L, исчерпываются относительно $O(1,n)$-сопряженности такими пространствами:*

$$0, \quad \Omega_{0n}^i, \quad \Omega_{0n}^k, \quad \Omega_{k+1}^t, \quad \Omega_{0n}^i \oplus \Omega_{k+1}^t, \quad \Omega_{0n}^k \oplus \Omega_{k+1}^t,$$
$$\Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j, \quad \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j \oplus \Omega_{k+1+j-r}^s,$$

где $i = 0, 1, \ldots, k$; $t = k+1, \ldots, n-1$; $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = r+1, \ldots, k$, $s = k+1+j-r, \ldots, n-1$.

Доказательство. Пусть W — подпространство пространства Ω^k_{0n}, инвариантное относительно L. Поскольку $[P_a, G_a] = M$, то при $W \neq 0$ имеем $M \in W$. Нормализатор алгебры L в $O(n)$ содержит $O(k)$. Отсюда и из теоремы Витта следует, что если $W \neq \langle M \rangle$ и $P_0 \notin W$, то $W = \Omega^i_{0n}$ $(1 \leq i \leq k)$. Если $P_0 \in W$, то $W = \Omega^k_{0n}$.

Для описания подпространств пространства U, инвариантных относительно L, воспользуемся подходом Ли–Гурса. Так как вследствие теоремы Витта ненулевые подпространства пространства Ω^{n-1}_{k+1} исчерпываются относительно $O(n-1)$-сопряженности пространствами Ω^t_{k+1} $(t = k+1, \ldots, n-1)$, то нам необходимо классифицировать подпрямые суммы таких пар пространств:

$$\Omega^k_{0n}, \quad \Omega^t_{k+1}, \quad \Omega^j_{0n}, \quad \Omega^t_{k+1} \quad (j = 0, 1, \ldots, k;\ t = k+1, \ldots, n-1).$$

Пусть N — подпрямая сумма Ω^k_{0n} и Ω^t_{k+1}. Если $P_0 + \lambda P_{k+1} \in N$ $(\lambda \neq 0)$, то N содержит P_1, $P_1 = -[G_1, P_0 + \lambda P_{k+1}]$, а значит, и M. Пусть $N' = \exp(\theta G_{k+1}) \cdot N \cdot \exp(-\theta G_{k+1})$. Пространство N' содержит $P_0 + (\lambda - \theta) P_{k+1} + (\theta^2/2 - \theta\lambda) M$. Так как $M \in N'$, то $P_0 + (\lambda - \theta) P_{k+1} \in N'$. Полагая $\theta = \lambda$, получаем, что $P_0 \in N'$, а потому $\Omega^k_{0n} \subset N'$. Следовательно, $N' = \Omega^k_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1}$.

Пусть N — подпрямая сумма Ω^j_{0n} и Ω^t_{k+1}. Если $j = 0$, $M + \lambda P_{k+1} \in N$ $(\lambda \neq 0)$, то N' содержит $(1 - \theta\lambda) M + \lambda P_{k+1}$. Полагая $1 - \theta\lambda = 0$, получаем, что $N' = \Omega^t_{k+1}$. Если $j \neq 0$, то $M \in N$. Допустим, что $N \neq \Omega^j_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1}$. Тогда $\Omega^j_{0n}/S_1 \cong \Omega^t_{k+1}/S_2$, где $S_1 = N \cap \Omega^j_{0n}$, $S_2 = N \cap \Omega^t_{k+1}$.

Пусть $\dim(\Omega^j_{0n}/S_1) = j - r$. С точностью до сопряженности можно допустить, что $S_1 = \Omega^r_{0n}$, а $S_2 = 0$ или $S_2 = \Omega^s_{k+1+j-r}$, а потому в силу леммы 3.1 N сопряжено одному из пространств:

$$\Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1}, \quad \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1} \oplus \Omega^s_{k+1+j-r}.$$

Предложение доказано.

На основании леммы 3.2 и предложения 3.1 заключаем , что подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1}, G_1, \ldots, G_{n-1}, \mathbb{D} \rangle$, обладающие ненулевой проекцией на $\langle \mathbb{D} \rangle$, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbb{D} \rangle : 0,\ \langle P_0 \rangle,\ \langle M \rangle,\ \langle P_0 - M \rangle,\ \langle P_0, M \rangle,\ \langle M, P_1 \rangle,\ \langle P_0 - M, P_1 \rangle,\ \langle P_0, M, P_1 \rangle,\\
&\langle M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle P_0 - M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle P_0, M, P_1, P_2 \rangle,\ \langle M, P_1, P_2, P_3 \rangle,\\
&\langle P_0 - M, P_1, P_2, P_3 \rangle,\ \ldots,\ \langle P_0, M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-2} \rangle,\ \langle M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \rangle,\\
&\langle P_0 - M, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \rangle,\ \langle P_0, M, P_1, \ldots, P_{n-1} \rangle;\\
&\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, \ldots, G_k + \alpha_k \mathbb{D}, \beta \mathbb{D} \rangle : 0,\ \Omega^i_{0n}, \Omega^k_{0n},\ \Omega^t_{k+1},\ \Omega^i_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1},\\
&\Omega^k_{0n} \oplus \Omega^t_{k+1},\ \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1},\ \Omega^r_{0n} \oplus \Lambda^j_{r+1} \oplus \Omega^s_{k+1+j-r},
\end{aligned}$$

где $k = 1, \ldots, n-1$; $i = 0, 1, \ldots, k$; $t = k+1, \ldots, n-1$; $r = 0, 1, \ldots, k-1$; $j = r+1, \ldots, k$; $s = k+1+j-r, \ldots, n-1$.

Запись $F : W_1, \ldots, W_s$ означает, что речь идет о подалгебрах $W_1 \niplus F$, …, $W_s \niplus F$.

Дальнейшее упрощение алгебры $W \niplus \langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, \ldots, G_k + \alpha_k \mathbb{D}, \beta \mathbb{D} \rangle$ производим $O(1,n)$-автоморфизмами, принадлежащими нормализатору W в группе $O(1,n)$-автоморфизмов. Если, например, $\exp(\theta J_{12})$ содержится в нормализаторе, то вместо $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 + \alpha_2 \mathbb{D} \rangle$ можно взять $\langle G_1 + \alpha_1 \mathbb{D}, G_2 \rangle$.

Предложение 3.2. *Подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}\rangle$, содержащие P_0, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$\langle P_0\rangle,\ \langle P_0, M\rangle,\ \langle P_0, M, P_1\rangle,\ \dots,\ \langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}\rangle,$$
$$\langle P_0, M, P_1, \dots, P_a, G_1, \dots, G_a\rangle \oplus L,$$

где L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{a+1}\rangle,\ \langle P_{a+1}, \dots, P_{n-1}\rangle\ (a = 1, \dots, n-1),$$
$$\langle P_0, M, P_1, \dots, P_a, G_1 + P_{a+1}, G_2 + \alpha_2 P_{a+2}, \dots, G_a + \alpha_a P_{2a}\rangle \oplus L,$$

где $0 < \alpha_2 \le \dots \le \alpha_a$ при $a \ne 1$, а L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{2a+1}\rangle,\ \dots,\ \langle P_{2a+1}, \dots, P_{n-1}\rangle,\ (a = 1, \dots, [n-1/2]),$$
$$\langle P_0, M, P_1, \dots, P_a, \dots, P_{a+b}, G_1, \dots, G_a,$$
$$G_{a+1} + P_{a+b+1}, \dots, G_{a+b} + \alpha_b P_{a+2b}\rangle \oplus L,$$

где $0 < \alpha_2 \le \dots \le \alpha_b$ при $b \ne 1$, а L совпадает с одной из алгебр:

$$0,\ \langle P_{a+2b+1}\rangle,\ \dots,\ \langle P_{a+2b+1}, \dots, P_{n-1}\rangle$$
$$(a = 1, \dots, n-2;\ b = 1, \dots, [n-1-a/2]).$$

Подалгебры алгебры $\langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}\rangle$, не содержащие P_0, но обладающие ненулевой проекцией на $\langle P_0\rangle$, сопряжены алгебрам, получаемым из подалгебр алгебры $\langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-2}\rangle$, содержащих P_0, в результате замены P_0 на $P_0 + \sum \alpha_i G_i$ ($i = 1, \dots, n-1$; $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 \ne 0$).

Доказательство предложения 3.2 проводим на основании леммы 3.1 методом Ли–Гурса.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $\mathfrak{M} = \langle P_0, M, P_1, \dots, P_{n-1}, G_1, \dots, G_{n-1}\rangle$; $m = [n-1/2]$; $\xi(n-1) = \langle J_{12}, J_{34}, \dots, J_{2m-1,2m}\rangle$ — подалгебра Картана алгебры $AO(n-1)$; $\pi_{0,n}$ — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle P_0, P_n\rangle$; π_a — проектирование $A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle P_a\rangle$; τ — проектирование $A\tilde{G}(n-1) \mathbin{⋺} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ на $AO(n-1) \mathbin{⋺} \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$; $\Gamma(n-1) = \left\{\sum\limits_1^m \gamma_i J_{2i-1,2i} \mid \gamma_i = 0, 1\right\}$.

Если $X_a, X_b \in \Gamma(n-1)$, то $X_a \cap X_b$ — сумма общих слагаемых элементов X_a, X_b; $X_a \cap X_b = 0$, если X_a и X_b не имеют общих слагаемых.

Лемма 3.3. *Пусть $T = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k + \beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0$, где $X_i \in \Gamma(n-1)$, $\alpha_i \ne 0$, $\alpha_i^2 \ne \alpha_j^2$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \ne j$. Если W — подпространство пространства $\mathfrak{M}$ и $[T, W] \subset W$, то $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus \tilde{W}$, где $W_i = [X_i, W] = [X_i, W_i]$, $[\beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0, W_i] \subset W_i$, $[X_j, W_i] = 0$ при $j \ne i$, $[X_i, \tilde{W}] = 0$, $[\beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$.*

Доказательство. Пусть $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$, $Z = \beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0$, $\mathfrak{M}' = [X, \mathfrak{M}]$, $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [X, Y] = 0\}$, W' — проекция W на $\mathfrak{M}'$, а $\hat{W}$ — проекция W на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Очевидно $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \oplus \tilde{\mathfrak{M}}$. Поскольку композиционные факторы $\langle Z\rangle$-модуля $\mathfrak{M}$ одномерны, то композиционные факторы $\langle Z\rangle$-модуля $\hat{W}$ также одномерны. Пусть $\mathfrak{M}(P) = \{P_a \in \mathfrak{M} \mid [X, P_a] \ne 0\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{M}'/\mathfrak{M}(P)$ можно представить в виде прямых сумм двумерных неприводимых $\langle T\rangle$-подмодулей. Отсюда вытекает, что размерности композиционных факторов $\langle T\rangle$-модуля W' также равны 2. Применяя теперь лемму 2.1, заключаем, что $W = W' \oplus \tilde{W}$.

Пусть $\mathfrak{M}_i = [X_i, \mathfrak{M}]$, W_i — проекция W' на $\mathfrak{M}_i$. Очевидно, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_k$. Вначале установим, что $[Z, W_i] \subset W_i$. Так как для произвольного $Y_i \in W_i$ $[J_{0n} - \mathbb{D}, Y_i] = -Y_i$, том можно предполагать, что $\beta = 0$. Очевидно,

$$[T, [T, Y_i]] = -\alpha_i^2 Y_i + 2\alpha_i [X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i].$$

Пусть $Y_i' = 2\alpha_i[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]$, $Y_i'' = 2\alpha_i[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i']] + \gamma[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i']$. Пространство W_i содержит Y_i', Y_i''. Нетрудно получить, что $Y_i'' = 4\alpha_i\gamma^2[X_i, [\gamma\mathbb{D}+\delta P_0, Y_i]] + \gamma(\gamma^2 - 4\alpha_i^2)[\gamma\mathbb{D}+\delta P_0, Y_i]$. Определитель из коэффициентов Y_i', Y_i'' при $[X_i, [\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]]$, $[\gamma\mathbb{D} + \delta P_0, Y_i]$ равен $-2\alpha_i\gamma(\gamma^2 + 4\alpha_i^2)$. Если $\gamma \neq 0$, то $[Z, Y_i] \in W_i$. Если $\gamma = 0$, то W_i содержит $Y_i' = [X_i, [\delta P_0, Y_i]]$ и $Y_i'' = [T, Y_i'] = -\alpha_i[\delta P_0, Y_i]$.

В композиционных факторах $\langle T\rangle$-модуля $\mathfrak{M}_i$ можно выбрать базисы так, чтобы матрицей операторе T в этих базисах была одна из матриц:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\alpha_i \\ \alpha_i & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\beta & -\alpha_i \\ \alpha_i & -\beta \end{pmatrix}.$$

Если бы при $i \neq j$ модули $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ обладали изоморфными композиционными факторами, то выполнялось бы одно из условий: $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$; $2\gamma = -2\beta$; $\gamma^2 + \alpha_i^2 = \beta^2 + \alpha_j^2$. Так как это невозможно, то в силу леммы 2.1 заключаем, что $W' = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \beta J_{0n} + \gamma\mathbb{D} + \delta P_0\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2. Если W — подпространство $\mathfrak{M}$ и $[F, W] \subset W$, то $[L_j, W] \subset W$ $(j = 1, 2)$.*

Лемма 3.4. *Пусть L — подалгебра $AO(n)$, F — подпрямая сумма L и $\langle\mathbb{D}\rangle$. Алгебра F обладает только расщепляемыми расширениями в $U \niplus (AO(n) \oplus \langle\mathbb{D}\rangle)$.*

Лемма 3.4 доказывается на основании предложений 1.1.

Лемма 3.5. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle\mathbb{D}, J_{0n}\rangle$ или $L_2 = \langle\mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma^2 \neq 1$, $2\gamma + 1 \neq 0$. Если F — подпрямая сумма алгебр L_1 и L_2, то каждая подалгебра $\hat{F}$ алгебры $A\tilde{G}(n-1) \niplus \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ с условием $\tau(\hat{F}) = F$ сопряжена алгебре $(W_1 + W_2) \niplus F$, где $W_1 \subset U$, $W_2 \subset V$.*

Доказательство. Пусть $L_2 = \langle\mathbb{D}, J_{0n}\rangle$. В силу предложения 1.1 и леммы 3.2 алгебра $\hat{F}$ содержит элементы

$$X_1 = J_{0n} = \sum_0^n \alpha_i P_i, \qquad X_2 = \mathbb{D} + \sum_1^{n-1} \beta_j G_j.$$

Так как $[X_1, X_2] = \sum \gamma_i P_i - \sum \beta_j G_j$, то $\mathbb{D} + \sum \gamma_i P_i \in \hat{F}$. Поэтому можно предполагать, что $\mathbb{D} \in \hat{F}$. Отсюда вытекает, что $J_{0n} \in \hat{F}$, а значит, $F \subset \hat{F}$.

Пусть $L_2 = \langle\mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$. Поскольку $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, P_a] = P_a$, $[\mathbb{D} + \gamma J_{0n}, G_a] = -\gamma G_a$ $(a = 1, \ldots, n-1)$, то в силу леммы 3.4 можно допускать, что $\hat{F}$ содержит подпрямую сумму F и подалгебры алгебры $\langle P_0, P_n\rangle$. Очевидно,

$$\exp(\theta_0 P_0 + \theta_n P_n)(\mathbb{D} + \gamma J_{0n} + \alpha_0 P_0 + \alpha_n P_n)\exp(-\theta_0 P_0 - \theta_n P_n) = \\ = \mathbb{D} + \gamma J_{0n} + (\alpha_0 - \theta_0 + \gamma\theta_n)P_0 + (\alpha_n + \gamma\theta_0 - \theta_n)P_n.$$

Так как $\gamma^2 \neq 1$, то коэффициенты при P_0, P_n можно обратить в ноль. Из условий $[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, \hat{F}\cap\mathfrak{M}] \subset \hat{F}\cap\mathfrak{M}$, $\gamma^2 \neq 1$ нетрудно получить, что $F \subset \hat{F}$.

Пусть $W = \hat{F}\cap\mathfrak{M}$, $Y = \sum \delta_a G_a + \sum \rho_i P_i \in W$. Так как $[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, Y] = -\gamma\sum\delta_a G_a - \gamma(\rho_0 P_n + \rho_n P_0) + \sum \rho_i P_i$ и $\gamma^2 \neq 1$, то можно допускать, что $Y = \sum \delta_a G_a + \rho_0 P_0 + \rho_n P_n$. Непосредственными вычислениями находим, что

$$[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, Y] = -\gamma\sum\delta_a G_a + (\rho_0 - \gamma\rho_n)P_0 + (\rho_n - \gamma\rho_0)P_n,$$
$$[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, [\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, Y]] =$$
$$= \gamma^2\sum\delta_a G_a + (\gamma^2\rho_0 - 2\gamma\rho_n + \rho_0)P_0 + (\gamma^2\rho_n - 2\gamma\rho_0 + \rho_n)P_n.$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при $\sum\delta_a G_a$, P_0, P_n в Y и полученных векторах, равен $\gamma(2\gamma+1)(\rho_n^2 - \rho_0^2)$. Если $\Delta \neq 0$, то $\sum\delta_a G_a, P_0, P_n \in W$. Если $\Delta = 0$, то $\rho_n = \pm\rho_0$. При $\rho_n = \rho_0$ получаем, что $[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, Y] - (1-\gamma)Y = -\sum\delta_a G_a$. Если $\rho_n = -\rho_0$, то $[\mathbb{D}+\gamma J_{0n}, Y] - (1+\gamma)Y = (-2\gamma-1)\sum\delta_a G_a$. Лемма доказана.

Предложение 3.3. *Подалгебры алгебры $\mathfrak{M} \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$, содержащие J_{0n} или обладающие тем свойством, что их проекция F на $\langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$ совпадает с $\langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n}\rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma^2 - 1 \neq 0$, $2\gamma + 1 \neq 0$, исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,n)$-сопряженности такими алгебрами:*

$$F: 0,\ \langle M\rangle,\ \langle M, P_0\rangle,\ \Omega_1^a,\ \Omega_{0n}^a,\ \Omega_{0,n}^a\ (a = 1,\dots,n-1);$$
$$\langle G_1,\dots,G_k\rangle \subset\!\!\!\!+\ F: 0,\ \Omega_{0n}^i,\ \Omega_{0,n}^k,\ \Omega_{k+1}^t,\ \Omega_{0n}^t \oplus \Omega_{k+1}^t,$$
$$\Omega_{0,n}^k \oplus \Omega_{k+1}^t,\ \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j,\ \Omega_{0n}^r \oplus \Lambda_{r+1}^j \oplus \Omega_{k+1+j-r}^s$$
$$(i = 0,1,\dots,k;\ t = k+1,\dots,n-1;\ r = 0,1,\dots,k-1;\ j = r+1,\dots,k;$$
$$s = k+1+j-r,\dots,n-1;\ k = 1,\dots,n-1)$$

(см. обозначения (3.2)).

Доказательство предложения 3.3 опирается на лемму 3.5.

Лемма 3.6. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle 2\mathbb{D} - J_{0n}\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2, $\hat{F}$ — такая подалгебра $A\tilde{G}(n-1) \subset\!\!\!\!+ \langle J_{0n}, \mathbb{D}\rangle$, что $\tau(\hat{F}) = F$. Алгебра $\hat{F}$ сопряжена алгебре $W \subset\!\!\!\!+ F$, где $W \subset \mathfrak{M}$ и удовлетворяет условию: если $Y \in W$ и проекция Y на $\langle G_1,\dots,G_{n-1}\rangle$ равна $\sum\delta_a G_a$, то W содержит $\sum\delta_a G_a + \rho P_0$, ρM или $\sum\delta_a G_a + \rho(P_0 - P_n)$.*

Лемма 3.7. *Пусть L_1 — подпрямая сумма $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} + J_{0n} + \gamma M\rangle$ ($\gamma \in \{0,1\}$), F — подпрямая сума L_1 и L_2. Если подпространство W пространства $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно F, то $W = W_1 + W_2$, где $W_1 \subset U$, $W_2 \subset V$.*

Доказательство леммы 3.6 , 3.7 аналогично доказательству леммы 3.5.

Пусть $\theta = (\gamma_0 - \gamma_n)/2$. Так как

$$\exp(\theta P_0)\cdot(\mathbb{D} + J_{0n} + \gamma_0 P_0 + \gamma_n P_n)\cdot\exp(-\theta P_0) = \mathbb{D} + J_{0n} + \frac{\gamma_0 + \gamma_n}{2}M,$$

то в дальнейшем будем предполагать что проекция алгебры $\hat{F} \subset A\tilde{P}(1,n)$ на $\langle \mathbb{D} + J_{0n}, P_0, P_n\rangle$ содержит $\mathbb{D} + J_{0n} + \alpha M$, где $\alpha \in \{0,1\}$. Лемма 3.7 дает довольно полную информацию о структуре таких алгебр.

Лемма 3.8. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} - J_{0n}\rangle$, F — подпрямая сумма L_1 и L_2. Если W — подпространство $\mathfrak{M}$ и $[F, W] \subset W$, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n\rangle$ и $[L_i, W] \subset W$ $(i = 1,2)$.*

Отметим, что лемма 3.8 позволяет свести задачу классификации алгебр $W \niplus F$, где F — подпрямая сумма L_1, $L_1 \subset AO(n-1)$, и $\langle \mathbb{D} - J_{0n} \rangle$, к аналогичной задаче для алгебр $W \niplus L_1$.

Лемма 3.9. *Пусть L_1 — подалгебра $AO(n-1)$, $L_2 = \langle \mathbb{D} - J_{0n} + P_0 \rangle$, F — подпрямая сумма алгебр L_1, L_2. Если подпространство W пространства $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно F, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$ и $[P_0, W] \subset W$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathfrak{M}} = \{Y \in \mathfrak{M} \mid [L_1, Y] = 0\}$, $\tilde{W}$ — проекция W на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Легко видеть, что матрицей оператора $\mathbb{D} - J_{0n}$ в базисе $P_0 + P_n$, $P_0 - P_n$ пространства $\langle P_0, P_n \rangle$ является матрица $\operatorname{diag}[2, 0]$, а матрицей этого же оператора в базисе пространства $\mathfrak{M}/\langle P_0, P_n \rangle$ является единичная матрица. Отсюда на основании леммы 2.1 заключаем, что $\tilde{W}$ содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$. Так как в силу леммы 3.3 $\tilde{W} \subset W$, то W содержит свою проекцию на $\langle P_0, P_n \rangle$. Остается заметить, что для произвольного $Y = \sum \alpha_i P_i + \sum \beta_i G_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ имеем $[\mathbb{D} - J_{0n} + P_0, Y] = Y + [P_0, Y]$. Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Пусть W — подпространство U, инвариантное относительно $\langle G_a \rangle$. Если $\pi_{0,n}(W) \not\subset \langle M \rangle$, то $M, P_a \in W$. Если $\pi_a(W) \neq 0$, то $M \in W$.*

Лемма 3.11. *Пусть F — подалгебра алгебры $AO(1,n)$, порожденная J_{0n} и G_a, где a пробегает подмножество I множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Если $\hat{F}$ — подалгебра $AP(1,n)$ и $\pi(\hat{F}) = F$, то с точностью до сопряженности относительно группы трансляций алгебра $\hat{F}$ содержит элементы G_a $(a \in I)$ и $J_{0n} + \sum \delta_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.*

Лемма 3.12. *Пусть L — подалгебра алгебры $AP(1,n)$, $X = J_{ab} + \delta J_{0n} + \beta P_c$, $Y = G_c + \sum \gamma_i P_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, a, b, c — различные числа из $\{1, \ldots, n-1\}$. Если $X, Y \in L$, то L содержит G_c.*

Теорема 3.1. *Пусть $V = \langle G_1, \ldots, G_{n-1} \rangle$, $V' = [P_0, V] = \langle P_1, \ldots, P_{n-1} \rangle$ $(n \geq 3)$, V_{ab} — подпространство V, $V'_{ab} = [P_0, V_{ab}]$; $K_1, K_2, \ldots, K_q$ — примарные части ненулевой подалгебры L_1 алгебры $AO(n-1)$; $\mathfrak{N}$ — максимальная подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$, аннулируемая L_1; L_2 — подалгебра алгебры $\mathfrak{N} \niplus \langle J_{0n}, \mathbb{D} \rangle$. Если F — подпрямая сумма L_1 и L_2, а W — подпространство $\mathfrak{M}$, инвариантное относительно F, то $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_q \oplus \tilde{W}$, где $W_i = [K_i, W] = [K_i, W_i]$, $[L_2, W_i] \subset W_i$, $[K_j, W_i] = 0$ при $j \neq i$, $[K_i, \tilde{W}] = 0$, $[L_2, \tilde{W}] \subset \tilde{W}$.*

Если примарная алгебра K_i является подпрямой суммой неприводимых подалгебр $K_{i1}, \ldots, K_{ir_i}$ соответственно алгебр $AO(V_{i1}), \ldots, AO(V_{ir_i})$, то ненулевые подпространства W_i пространства $\mathfrak{M}$ со свойством $[K_i, W_i] = W_i$ сопряжены $V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia}$, $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ $(a = 1, \ldots, r_i)$ или подпрямым суммам таких пространств:

$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}\ (a = 1, \ldots, r_i;\ b = 1, \ldots, a);$$
$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}\ (a = 1, \ldots, r_i - 1;\ c = a+1, \ldots, r_i);$$

$$V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia},\ V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib},\ V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$$
$$(a = 1, \ldots, r_i - 1;\ b = 1, \ldots, a;\ c = a+1, \ldots, r_i).$$

Если N_i — подпрямая сумма неприводимых K_i-модулей N'_i, N''_i, каждый из которых содержится в V или V', и $N_i \neq N'_i \oplus N''_i$, то $N_i = \{Y + \lambda\varphi(Y) \mid Y \in N'_i\}$, *где $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, а φ является K_i-изоморфизмом, сохраняющим скалярное произведение.*

Если $[K_i, W_i] = W_i$ и $[P_0, W_i] \subset W_i$, то W_i сопряжено $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ $(1 \leq a \leq r_i)$ или одной из выписанных подпрямых сумм, где $b = a$. Пусть T — одна из алгебр: $\langle \mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{0n} \rangle$, $\langle \mathbb{D} + \gamma J_{0n} \rangle$, $\langle \mathbb{D}, J_{0n} \rangle$, где $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq -1$. Если $[K_i, W_i] = W_i$ и $[T, W_i] \subset W_i$, то $W = V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ia}$ или $W = V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia} \oplus W'$, где при $W' \neq 0$ имеем $W' = V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}$ или $W' = V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$, или W' — подпрямая сумма этих пространств $(b \leq a$; $1 \leq a \leq r_i$; $a + 1 \leq c \leq r_i)$.

Доказательство. Пусть $Q = [L_1, W]$, S — проекция W на $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что W — подпрямая сумма Q и S. Так как композиционные факторы L_2-модуля $\mathfrak{N}$ одномерны, а композиционные факторы L_1-модуля $[L_1, \mathfrak{M}]$ имеют размерность не меньше двух, то в силу леммы 2.1 $W = Q \oplus S$. На основании леммы 3.3 $[L_2, Q] \subset Q$, $[L_1, Q] = Q$. Согласно лемме 2.1 $Q = W_1 \oplus \cdots \oplus W_q$, где $W_i = [K_i, Q]$, $W_i = [K_i, W_i]$ $(i = 1, \ldots, q)$.

Пусть Θ, Θ' — проектирование $V \oplus V'$ соответственно на V и V'. Если $\Theta(W_i) \neq 0$, то по теореме 2.1 $\Theta(W_i)$ сопряжено $V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{ia}$ $(1 \leq a \leq r_i)$. Для дальнейшего преобразования пространства W_i можно применять только те автоморфизмы, которые не изменяют $\Theta(W_i)$. Используя снова теорему 2.1, получаем, что $\Theta'(W_i)$ сопряжено $V'_{i1} \oplus \cdots \oplus V'_{ib}$ или $V'_{i,a+1} \oplus \cdots \oplus V'_{ic}$, или подпрямой сумме этих пространств $(1 \leq b \leq a$; $a + 1 \leq c \leq r_i)$.

Следующее утверждение теоремы вытекает из предложения 2.6. Далее применяем рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 3.5. Теорема доказана.

§ 4. Подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$

В этом параграфе на основании результатов предыдущих параграфов мы проведем классификацию всех подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности.

Если речь идет о подалгебрах $W_1 \mathbin{+\!\!\!\supset} F$, ..., $W_s \mathbin{+\!\!\!\supset} F$, то будем употреблять обозначение $F : W_1, \ldots, W_s$. Пусть $(i_1, \ldots, i_q) = \langle P_{i_1}, \ldots, P_{i_q} \rangle$; $(awb) = \langle P_a + wP_b \rangle$, $w > 0$; $(04) = \langle M \rangle$, $M = P_0 + P_4$.

Лемма 4.1. *Ненулевые подалгебры алгебры $AO(1,4) \oplus \langle \mathbb{D} \rangle$ исчерпываются относительно $O(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

$\langle J_{12} \rangle$, $\langle J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + J_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + J_{34} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + J_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + cJ_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{34} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(0 < c < 1,\ \alpha > 0)$;
$\langle J_{04} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{04}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12} + cJ_{04} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{04} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{12} + cJ_{04}, \mathbb{D} \rangle$ $(c > 0,\ \alpha > 0)$;
$\langle G_3 \rangle$, $\langle G_3 + \mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, \mathbb{D} \rangle$;
$\langle G_3 - J_{12} \rangle$, $\langle G_3 - J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3 - J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle J_{12}, J_{34} \rangle$, $\langle J_{12} + \alpha\mathbb{D}, J_{34} + \beta\mathbb{D} \rangle$ $\langle J_{12}, J_{34}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha > 0,\ \beta \geq 0)$;
$\langle J_{04}, J_{12} \rangle$, $\langle J_{04} + \alpha\mathbb{D}, J_{12} + \beta\mathbb{D} \rangle$, $\langle J_{04}, J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$;
$\langle G_3, J_{12} \rangle$, $\langle G_3 + \mathbb{D}, J_{12} + \alpha\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, J_{12} + \beta\mathbb{D} \rangle$, $\langle G_3, J_{12}, \mathbb{D} \rangle$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0)$;

$\langle G_1, G_2\rangle$, $\langle G_1+\mathbb{D}, G_2\rangle$, $\langle G_1, G_2, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_3, J_{04}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}+\alpha\mathbb{D}, J_{12}+\beta\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_3, J_{04}, J_{12}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_3, J_{04}, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\geq 0,\ \gamma>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \gamma\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1+\mathbb{D}, G_2, G_3\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3-J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle J_{12}+J_{34}, J_{13}-J_{24}, J_{23}+J_{14}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, J_{12}+\alpha\mathbb{D}, J_{04}+\beta\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3+\mathbb{D}, J_{12}+\alpha\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+\beta\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \beta>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+cJ_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(c>0,\ \alpha\neq 0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha\mathbb{D}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+\alpha\mathbb{D}, J_{04}+\beta\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ \beta\in R,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$, $\langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$;
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}, \mathbb{D}, \rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$, $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\gamma\mathbb{D}\rangle$,
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}, \mathbb{D}\rangle$ $(\gamma\neq 0)$;
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{04}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle$,
$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{04}, J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}, \mathbb{D}\rangle$.

Лемма 4.1 доказывается на основании результатов [5] о подалгебрах алгебры $AO(1,4)$ и теоремы Ли-Гурса о подалгебрах прямой суммы алгебр.

Теорема 4.1. *Расщепляемые подалгебры алгебры $AP(1,4)$ исчерпываются относительно $P(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

O, (0), (4), (04), (0,4), (04,1), (1,4), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}\rangle$: O, (0), (4), (04), (1,2), (3,4), (0,4), (04,3), (0,1,2), (04,1,2), (1,2,4), (0,3,4), (0,1,2,4), (04, 1,2,3), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}\rangle$ $(0<c<1)$: O, (0), (1,2), (3,4), (0,1,2), (0,3,4), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{04}\rangle$: O, (04), (1), (0,4), (04,1), (1,2), (0,1,4), (04,1,2), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (3), (04), (1,2), (0,4), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (1,2,3), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3-J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2), (0,1,2), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{04},J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (0,4), (04,3), (1,2), (0,3,4), (1,2,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{12}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2\rangle$: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{04}\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (0,1,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (0), (4), (04), (0,4), (1,2,3), (0,1,2,3), (1,2,3,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03},J_{04},J_{34}\rangle$: O, (1), (1,2), (0,3,4), (0,1,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_3,J_{04},J_{12}\rangle$: O, (04), (1,2), (04,3), (0,3,4), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{04}\rangle$: O, (3), (04), (04,1), (04,3), (04,1w3), (04,1,2), (04,1,3), (04,1w3,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3-J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{03},J_{04},J_{34},J_{12}\rangle$: O, (1,2), (0,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12}+J_{34},J_{13}-J_{24},J_{23}+J_{14},J_{34}\rangle$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,J_{04},J_{12}\rangle$: O, (3), (04), (04,3), (04,1,2), (0,1,2,4), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12}+cJ_{04}\rangle$ $(c>0)$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$: O, (04), (0,4), (1,2,3), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{04}\rangle$: O, (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{13},J_{23}\rangle$: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(4)$: O, (0), (1,2,3,4), (0,1,2,3,4);

$AO(1,3)$: O, (4), (0,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$\langle G_1,G_2,G_3,J_{12},J_{13},J_{23},J_{04}\rangle$: O, (04), (04,1,2,3), (0,1,2,3,4);

$AO(1,4)$: O, (0,1,2,3,4).

Доказательство. Подалгебры алгебры $AO(1,4)$ описаны в работе [5]. Для каждой из них необходимо найти инвариантные подпространства пространства $U=\langle P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\rangle$.

Рассмотрим случай нулевой подалгебры алгебры $AO(1,4)$. Если W — подпространство U и $\dim W=1$, то по теореме Витта W $O(1,4)$-сопряжено с одним из пространств: (0), (04), (4). Если $\dim W>1$, то $W=\langle X_1\rangle\oplus W'$, где $\|X_1\|^2\neq 0$. Если $\dim W'>1$, то $W'=\langle X_2\rangle\oplus W''$, где $\|X_2\|^2\neq 0$. Следовательно, если

$\dim W > 1$, то $W = \langle X_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle X_s\rangle \oplus \langle Y\rangle$, где $s \leq 4$, $X_1,\ldots,X_s$ — векторы ненулевой длины. В силу закона инерции для квадратичных форм и теоремы Витта несопряженные относительно группы внутренних автоморфизмов группы $O(1,4)$ подпространства пространства U исчерпываются пространствами с базисами, получаемыми в результате дополнения каждого из векторов P_0, P_4, P_0+P_4 до ортогональной системы частью векторов P_4, P_1, P_2, P_3.

Если W инвариантно относительно $\langle J_{12}\rangle$, то по лемме 3.3 $W = \pi_{1,2}(W) \oplus W'$, где $W' \subset \langle P_0, P_3, P_4\rangle$. Поскольку $\langle J_{12}\rangle$ действует на W' как нулевая алгебра, то получаем предыдущий случай.

Пусть W — подпространство U, инвариантное относительно $\langle J_{04}\rangle$, W' — проекция W на $\langle P_0, P_4\rangle$, W'' — проекция W на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$. По лемме 3.3 $W = W' \oplus W''$. Пространство W' сопряжено с одним из пространств: O, $\langle P_0 + P_4\rangle$, $\langle P_0, P_4\rangle$. Пространство W'' сопряжено с одним из таких пространств: O, $\langle P_1\rangle$, $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$.

Случай алгебры $\langle J_{12} + cJ_{04}\rangle$ посредством леммы 3.3 сводится к случаям алгебр $\langle J_{12}\rangle$ и $\langle J_{04}\rangle$. Исследование остальных случаев проводится на основании лемм 3.1, 3.3 и предложения 3.1. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\Gamma(\Delta)$ — система представителей классов сопряженных подалгебр алгебры $AO(1,4)$ (соответственно $AO(1,4) \oplus \langle \mathbb{D}\rangle$), найденная в лемме 4.1. Расщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности такими алгебрами:*

1) $W \niplus F$, где $F \in \Gamma$, $W \subset U$ и $[F, W] \subset W$;

2) $W \niplus \hat{F}$, где $\hat{F} \in \Delta$ и проекция $\hat{F}$ на $AO(1,4)$ совпадает с F, $F \in \Gamma$;

3) $\langle J_{12}, J_{34} + \alpha\mathbb{D}\rangle$: $\langle P_1, P_2\rangle$, $\langle P_0, P_1, P_2\rangle$;

4) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D}\rangle$: $\langle M, P_1\rangle$, $\langle M, P_1 + wP_3\rangle$, $\langle M, P_1, P_3\rangle$, $\langle M, P_1 + wP_3, P_2\rangle$ ($w > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$);

5) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2 + \beta\mathbb{D}, G_3, M, P_1\rangle$ ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$);

6) $\langle G_1 + \alpha\mathbb{D}, G_2, G_3 + \beta\mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$ ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$);

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ — подпрямая сумма $F \in \Gamma$ и $\langle \mathbb{D}\rangle$, W — подпространство U, инвариантное относительно $\hat{F}$. Тогда $[F, W] \subset W$, и наоборот, если $[F, W] \subset W$, то $[\hat{F}, W] \subset W$. Поэтому можно воспользоваться теоремой 4.1. Дополнительного исследования требуют только случаи тех алгебр $\hat{F} \in \Delta$, которые упрощались $O(1,4)$-автоморфизмами. Такие алгебры соответствуют алгебре F, совпадающей с $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$, $\langle G_1, G_2\rangle$ или $\langle G_1, G_2, G_3\rangle$. Если $\hat{F} = \langle G_1 + \alpha_1\mathbb{D}, G_2 + \alpha_2\mathbb{D}, G_3 + \alpha_3\mathbb{D}\rangle$, то дальнейшее упрощение осуществляем $O(1,4)$-автоморфизмами, оставляющими неизменными $\langle M, P_1\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$. Теорема доказана.

Пусть $\tilde{F}$ — такая подалгебра алгебры $A\tilde{P}(1,4)$, что $\pi(\tilde{F}) = F$. Запись $\tilde{F} + W$ означает, что W — подпространство U, $[F, W] \subset W$ и $\tilde{F} \cap U \subset W$. Если речь идет о нерасщепляемых алгебрах $\tilde{F} + W_1, \ldots, \tilde{F} + W_s$, то будем употреблять обозначение: $\tilde{F}:\ W_1, \ldots, W_s$.

Теорема 4.3. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $AP(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности алгебрами:*

$\langle J_{12} + P_0\rangle$: O, (04), (4), (04,3), (1,2), (3,4), (04,1,2), (1,2,4), (04,1,2,3), (1,2,3,4);

$\langle J_{12} + P_3\rangle$: O, (04), (0), (4), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2), (1,2,4), (0,1,2,4);

$\langle J_{12} + P_0 + P_3\rangle$: O, (4), (1,2), (1,2,4);

$\langle J_{12} + J_{34} + P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4);

$\langle J_{12}+cJ_{34}+P_0\rangle$: O, (1,2), (3,4), (1,2,3,4) $(0<c<1)$;
$\langle J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (0,4);
$\langle J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (0,1,4);
$\langle J_{04}+P_3\rangle$: (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4) $(c>0)$;
$\langle G_3+P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);
$\langle G_3+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1w3), (04,1,3), (0,1,3,4);
$\langle G_3+P_0\rangle$: O, (04), (1), (04,1), (1,2), (04,1w3), (04,3), (04,1w3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle G_3-J_{12}+P_0\rangle$: O, (04), (04,3), (1,2), (04,1,2), (04,1,2,3);
$\langle J_{12}+P_0,J_{34}+\delta P_0\rangle$: O, (1,2), (1,2,3,4) $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{12},J_{34}+P_0,P_1,P_2\rangle$;
$\langle J_{04}+P_3,J_{12}+\delta P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (04,1,2), (0,1,2,4), $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{04},J_{12}+P_3\rangle$: O, (04), (1,2), (0,4), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle J_{12}+M,G_3+\delta P_0\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12},G_3+P_0\rangle$; $\langle J_{12}+\delta P_3,G_3+P_0,M\rangle$ $(\delta\geq 0)$;
$\langle J_{12}+P_3,G_3,M\rangle$; $\langle J_{12}+M,G_3+\delta P_0,P_1,P_2\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle J_{12},G_3+P_0,P_1,P_2\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_0,G_3+P_0,M,P_3\rangle$; $\langle J_{12}+P_0,G_3,M,P_3\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_3,G_3+P_0,M,P_1,P_2\rangle$; $\langle J_{12}+P_3,G_3,M,P_1,P_2\rangle$;
$\langle J_{12}+\delta P_0,G_3+P_0,M,P_1,P_2,P_3\rangle$; $\langle J_{12}+P_0,G_3,M,P_1,P_2,P_3\rangle$;
$\langle G_1+P_3,G_2+\mu P_2+\delta P_3\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3,G_2\rangle$;
$\langle G_1,G_2+P_2+\delta P_3\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle G_1,G_2+P_2,P_3\rangle$;
$\langle G_1+P_2+\gamma P_3,G_2-P_1+\mu P_2+\delta P_3,M\rangle$ $(\mu>0,\ \gamma>0\vee\gamma=0,\ \delta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\gamma P_3,G_2-P_1,M\rangle$ $(\gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+\gamma P_3,G_2+P_2+\delta P_3,M\rangle$ $(\gamma>0\vee\gamma=0,\ \delta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3,G_2,M\rangle$;
$\langle G_1+P_2,G_2-P_1+\mu P_2,M,P_3\rangle$ $(\mu\geq 0)$; $\langle G_1,G_2+P_2,M,P_3\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3,G_2+P_3,M,P_1\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3,G_2,M,P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3,G_2,M,P_1\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3,G_2+P_0,M,P_1\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3,G_2+P_3,M,P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3,G_2,M,P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3,G_2,M,P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3,G_2,M,P_1,P_2\rangle$; $\langle G_1+P_0,G_2+\beta P_3,M,P_1,P_2\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2,G_2,M,P_1,P_3\rangle$; $\langle G_1+P_2,G_2+\alpha P_0,M,P_1,P_3\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_1,G_2+P_0,M,P_1,P_3\rangle$; $\langle G_1,G_2+P_3,M,P_1+wP_3,P_2\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_0,G_2+\alpha P_3,M,P_1+wP_3,P_2\rangle$ $(\alpha\geq 0,\ w>0)$;
$\langle G_1+P_3,G_2,P_0,P_1,P_2,P_4\rangle$; $\langle G_1+P_0,G_2,M,P_1,P_2,P_3\rangle$;
$\langle G_3,J_{04}+P_1\rangle$: O, (04), (04,1w3), (04,3), (0,3,4), (04,1w3,2);
$\langle G_3,J_{04}+P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);
$\langle G_3,J_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1), (04,1,2);
$\langle G_3,J_{04}+P_1+\alpha P_2,M,P_1+wP_3\rangle$ $(\alpha>0,\ w>0)$;
$\langle G_3,J_{04}+P_1+\alpha P_3,M\rangle$ $(\alpha>0)$; $\langle G_3,J_{04}+P_2+\alpha P_3,M,P_1\rangle$ $(\alpha>0)$;
$\langle G_3,J_{12}+cJ_{04}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(c>0)$;
$\langle G_3,J_{04}+P_3,J_{12}+\delta P_3\rangle$: (04), (04,1,2) $(\delta\geq 0)$; $\langle G_3,J_{04},J_{12}+P_3\rangle$: (04), (04,1,2);
$\langle G_1,G_2,J_{12}+M\rangle$; $\langle G_1,G_2,J_{12}+P_3\rangle$; $\langle G_1,G_2,J_{12}+M,P_3\rangle$;
$\langle G_1,G_2,J_{12}+P_3,M\rangle$; $\langle G_1+P_2,G_2-P_1,J_{12}+\alpha P_3,M\rangle$ $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2,G_2-P_1,J_{12},M,P_3\rangle$; $\langle G_1,G_2,J_{12}+P_3,M,P_1,P_2\rangle$;
$\langle G_1,G_2,J_{12}+P_0,M,P_1,P_2\rangle$; $\langle G_1,G_2,J_{12}+P_3,P_0,P_1,P_2,P_4\rangle$;

$\langle G_1, G_2, J_{12} + P_0, M, P_1, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1\rangle$: (04), (04,3), (04,1$w$3), (04,1$w$3,2);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_2\rangle$: (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_2, M, P_1 + wP_3\rangle$ $(\alpha > 0,\ w > 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_1 + \alpha P_3, M\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{04} + P_2 + \alpha P_3, M, P_1\rangle$ $(\alpha > 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4) $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \alpha P_3\rangle$; $\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M\rangle$
$(\mu > 0,\ \beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2 + P_2, G_3 + \gamma P_3, M\rangle$; $\langle G_1 + \beta P_2, G_2 + P_3, G_3 - P_2, M, P_1\rangle$ $(\beta \geq 0)$;
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2 + P_3, G_3 - P_2 + \mu P_3, M, P_1\rangle$ $(\mu > 0,\ \beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, G_2, G_3 + P_3, M, P_1\rangle$ $(\beta > 0 \vee \beta = 0,\ \gamma \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2, G_3, M, P_1\rangle$; $\langle G_1 + P_3, G_2, G_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1 + \alpha P_3, G_2, G_3 + P_0, M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_0, G_2, G_3, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1 + P_1, G_2 + P_2, J_{12} - G_3\rangle$;
$\langle G_1 + P_1 + \alpha P_2, G_2 - \alpha P_1 + P_2, J_{12} - G_3, M\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} - G_3, M\rangle$; $\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, J_{12} - G_3, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{12} - G_3 + P_0, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s = 0, 1)$;
$\langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{23} + J_{14}, J_{34} + P_0\rangle$: O, $\langle P_1, P_2, P_3, P_4\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4), $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$: O, (04), (04,1,2), (0,1,2,4);
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12}\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3 + \alpha P_3, J_{12} + M\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \alpha P_3, J_{12} + \delta P_3, M\rangle$ $(\delta = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12} + \delta P_3, M\rangle$ $(\delta = 0, 1)$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_3, M\rangle$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, M, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + \alpha P_3, M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_0, J_{12} + \alpha P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\alpha = 0, 1)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_1, M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_2, M, P_1\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + cJ_{04} + P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$ $(c > 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04} + P_3, J_{12} + \alpha P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}, J_{12} + P_3\rangle$: $\langle M\rangle$, $\langle M, P_1, P_2\rangle$.

Доказательство. Пусть L — такая подалгебра $AP(1,4)$, что $\pi(L) = \langle G_1, G_2, G_3\rangle$. Через $\Lambda = (\lambda_{ab})$ обозначим матрицу порядка 3, в j-ом столбце которой записаны коэффициенты базисного элемента $G_j + \lambda_{1j}P_1 + \lambda_{2j}P_2 + \lambda_{3j}P_3 + \mu_j P_0 + \rho_j M$ $(j = 1, 2, 3)$. Матрица Λ однозначно представляется в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц. Кососимметрическая матрица порядка 3 ортогональным преобразованием подобия приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 0$, то для упрощения симметрической части можно применять любую матрицу из $O(3)$. Если $\alpha \neq 0$, то для упрощения симметрической матрицы можно использовать только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку симметрическая матрица ортогональным преобразованием подобия приводится к диагональному виду, то для некоторой матрицы $C \in O(3)$ имеет место равенство

$$C\Lambda C^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & \mu_2 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\mu_1 \le \mu_2$. Если $\mu_1 = \mu_2$, то можно положить $\gamma = 0$. Если $\alpha = 0$, то $\beta = \gamma = 0$.

Допустим, что проекция L на $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ совпадает с $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ и что пересечения L с $\pi(L)$ и $\langle P_1, P_2, P_3\rangle$ суть нулевые. В этом случае алгебра L сопряжена одной из алгебр:

$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1 + \mu P_2 + \gamma P_3, G_3 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3, M\rangle$ ($\mu > 0$, $\delta - \beta^2\mu \ne 0$, $\beta > 0 \vee \beta = 0$, $\gamma \ge 0$);

$\langle G_1 + P_2 + \beta P_3, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_1 + \delta P_3, M\rangle$ ($\beta \ge 0$, $\delta \ne 0$).

При рассмотрении других случаев на матрицу C необходимо налагать дополнительные ограничения. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Нерасщепляемые подалгебры алгебры $A\tilde{P}(1,4)$ исчерпываются относительно $\tilde{P}(1,4)$-сопряженности нерасщепляемыми подалгебрами алгебры $AP(1,4)$ (теорема 4.3) и такими алгебрами:*

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: O, (1), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: (04), (04,1), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0)\rangle$: O, (04), (3), (04,3), (1,2), (1,2,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ($c > 0$);

$\langle J_{12} \pm \mathbb{D} + P_0, J_{12} + \alpha M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3), ($\alpha > 0$);

$\langle J_{04} \pm \mathbb{D}, J_{12} + M\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} + \mathbb{D} + M, J_{12}\rangle$: O, (3), (1,2), (1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, J_{12} + \alpha P_0\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, J_{12} + P_0\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0\rangle$: (04), (04,1), (04,1$w$3), (04,3), (04,1$w$3,2), (04,1,2), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle J_{04} - 2\mathbb{D}, G_3 + P_0 - P_4\rangle$: O, (1), (1,2);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_1\rangle$: O, (04), (04,3), (0,3,4);

$\langle J_{04} - \mathbb{D}, G_3 + P_2\rangle$: (1), (04,1), (04,1$w$3), (04,1,3), (0,1,3,4);

$\langle G_3 + \alpha P_1, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_3\rangle$, $\langle J_{04} - \mathbb{D} + P_0, G_3 + \alpha P_2, M, P_1, P_3\rangle$ ($\alpha > 0$);

$\langle G_3, J_{04} - \mathbb{D} + P_0\rangle$: (04,3), (04,1,3), (04,1,2,3);

$\langle G_3, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$: O, (1), (1,2);

$\langle G_3 + P_0, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3) ($c > 0$);

$\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: O, (1,2) ($c > 1$);

$\langle G_3 + P_0 - P_4, J_{12} + c(J_{04} - 2\mathbb{D})\rangle$: O, (1,2) ($0 < c \le 1$);

$\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} - \mathbb{D} + P_0)\rangle$: (04,3), (04,1,2,3);

$\langle G_3, J_{12} + c(J_{04} + \mathbb{D} + M)\rangle$: O, (1,2);

$\langle G_3 + P_0, J_{12}, J_{04} - 2\mathbb{D}\rangle$: (04), (04,3), (04,1,2), (04,1,2,3);

$\langle G_3+P_0-P_4, J_{12}, J_{04}-2\mathbb{D}\rangle$: O, (1,2);
$\langle G_3, J_{12}+\alpha P_0, J_{04}-\mathbb{D}+P_0\rangle$: (04,3), (04,1,2,3) $(\alpha>0)$;
$\langle G_3, J_{12}+P_0, J_{04}-\mathbb{D}\rangle$: (04,3), (04,1,2,3);
$\langle G_3, J_{12}+\alpha M, J_{04}+\mathbb{D}+M\rangle$: O, (1,2), $(\alpha\geq 0$;
$\langle G_3, J_{12}+M, J_{04}+\mathbb{D}\rangle$: O, (1,2);
$\langle G_1, G_2+P_0, J_{04}-2\mathbb{D}\rangle$: (04,1), (04,1,2), (04,1,2w3), (04,1,3), (04,1,2,3);
$\langle G_1+P_3, G_2+\mu P_2+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}\rangle$ $(\mu>0,\ \delta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}\rangle$;
$\langle G_1, G_2+P_2+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}\rangle$ $(\delta\geq 0)$; $\langle G_1, G_2+P_2, J_{04}-\mathbb{D}, P_3\rangle$;
$\langle G_1+P_2+\lambda P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$ $(\mu>0,\ \lambda>0\vee\lambda=0,\ \delta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\lambda P_3, G_2-P_1, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$ $(\lambda\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1+\lambda P_3, G_2+P_2+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$ $(\lambda>0\vee\lambda=0,\ \delta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1+\mu P_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_3\rangle$ $(\mu\geq 0)$; $\langle G_1, G_2+P_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\alpha>0\vee\alpha=0,\ \beta\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$;
$\langle G_1+\alpha P_2+\beta P_3, G_2+P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1+wP_3\rangle$ $(w>0)$; $\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1+P_2, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2+P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1wP_3, P_2\rangle$ $(w>0)$;
$\langle G_1+P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}, P_0, P_1, P_2, P_4\rangle$; $\langle G_1+\beta P_3, G_2, J_{04}-\mathbb{D}+P_0, M, P_1, P_2\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}-\mathbb{D}+P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, J_{04}+\mathbb{D}+M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, J_{04}+\mathbb{D}+M, P_3\rangle$; $\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D})\rangle$: (04), (04,3) $(c>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D}+P_0), M, P_1, P_2, sP-3\rangle$ $(c>0,\ s=0,1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+c(J_{04}+\mathbb{D}+M)\rangle$: O, (3), $(c>0)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+P_0, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+M, J_{04}+\mathbb{D}\rangle$: O, (3);
$\langle G_1, G_2, J_{12}+\delta P_0, J_{04}-\mathbb{D}+P_0, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(\delta\geq 0,\ s=0,1)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, J_{12}, J_{04}-\mathbb{D}, M, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle G_1, G_2, J_{12}+\alpha M, J_{04}+\mathbb{D}+M\rangle$: O, (3) $(\alpha\geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3+P_0, J_{04}-2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;
$\langle G_1, G_2+P_2, G_3+\alpha P_3, J_{04}-\mathbb{D}\rangle$; $\langle G_1, G_2+P_2, G_3+\alpha P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1+\mu P_2+\gamma P_3, G_3+\beta P_1+\gamma P_2+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$
$(\mu>0,\ \beta>0\vee\beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2+\beta P_3, G_2-P_1, G_3+\beta P_1+\delta P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2, G_2+P_3, G_3-P_2, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2+P_3, G_3-P_2+\mu P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$
$(\mu>0,\ \beta>0\vee\beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+\beta P_2+\gamma P_3, G_2, G_3+P_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$ $(\beta>0\vee\beta=0,\ \gamma\geq 0)$;
$\langle G_1+P_2, G_2, G_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1\rangle$; $\langle G_1+P_3, G_2, G_3, J_{04}-\mathbb{D}, M, P_1, P_2\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}-\mathbb{D}+P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{04}+\mathbb{D}+M\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3+P_0, J_{12}+c(J_{04}-2\mathbb{D}), M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(c>0,\ s=0,1)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3+\beta P_3, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D}), M\rangle$ $(c>0)$;
$\langle G_1+P_2, G_2-P_1, G_3, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D}), M, P_3\rangle$ $(c>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3+P_3, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D})\rangle$: O, (04);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+c(J_{04}-\mathbb{D}+P_0), M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(c>0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}+c(J_{04}+\mathbb{D}+M)\rangle$ $(c>0)$;
$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}-\mathbb{D}+P_0\rangle$: O, (04), (1,2,3), (04,1,2,3);
$\langle G_1, G_2, G_3+P_0, J_{12}, J_{04}-2\mathbb{D}, M, P_1, P_2, sP_3\rangle$ $(s=0,1)$;

$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + P_0, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta P_0, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$ $(\delta \geq 0)$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3 + \beta P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M\rangle$;
$\langle G_1 + P_2, G_2 - P_1, G_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}, M, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3 + P_3, J_{12}, J_{04} - \mathbb{D}\rangle$: O, (04);
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + M, J_{04} + \mathbb{D}\rangle$; $\langle G_1, G_2, G_3, J_{12} + \delta M, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$ $(\delta \geq 0)$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - \mathbb{D} + P_0, M, P_1, P_2, P_3\rangle$;
$\langle G_1, G_2, G_3, J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} + \mathbb{D} + M\rangle$.

Доказательство теоремы 4.4 проводится на основании теоремы 3.1, лемм 3.3–3.9.

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1597–1614.
2. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 8, 1615–1624.
3. Patera J., Winternitz P., Sharp R.T., Zassenhaus H., Subgroups of the similitude group of three-dimensional Minkowsky space, *Can. J. Phys.*, 1976, **54**, № 9, 950–961.
4. Beckers J., Patera J. Perroud M., Winternitz P., Subgroups of the Euclidean group and symmetry breaking in nonrelativistic quantum mechanics, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 1, 72–83.
5. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Quantum numbers for particles in de Sitter space, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 5, 717–728.
6. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups, *J. Math. Phys.*, 1977, **18**, № 12, 2259–2288.
7. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., The optical group and its subgroups, *J. Math. Phys.*, 1978, **19**, № 8, 1758–1780.
8. Burdet G., Patera J., Perrin M., Winternitz P., Sous-algebres de Lie de l'algebre de Schrödinger, *Ann. Sc. Mart. Quebec*, 1978, **2**, № 1, 81–108.
9. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$, Препринт 78.18., Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 36 с.
10. Федорчук В.М., Разщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1979, **31**, № 6, 717–722.
11. Федорчук В.М., Фущич В.И., О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре, в кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, Тр. Междунар. семинара, Звенигород, 1979, М., 1980, 61–66.
12. Федорчук В.М., Нерасщепляющиеся подалгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 5, 696–700.
13. Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuck V.M., Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1985, **18**, № 14, 2893–2899.
14. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Москаленко Ю.Д., Непрерывные подгруппы группы Евклида четырехмерного пространства, в кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 119–123.
15. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея. I, Препринт 85.19, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1985, 46 с.
16. Lassner W., Realizations of the Poincaré group on homogeneous spaces, *Acta Phys. Slov.*, 1973, **23**, № 4, 193–202.
17. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. I, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 2, 145–186.
18. Bacry H., Combe Ph., Sorba P., Connected subgroups of the Poincaré group. II, *Repts. Math. Phys.*, 1974, **5**, № 3, 361–392.
19. Sorba P., The Galilei group and its connected subgroups, *J. Math. Phys.*, 1976, **17**, № 6, 941–953.

20. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
21. Фущич В.И., О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1983, 4–23.
22. Grundland A.M., Harnad J., Winternitz P., Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations, *J. Math. Phys.*, 1984, **25**, № 4, 791–806.
23. Никитин А.Г., Фущич В.И., Юрик И.И., Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам, *Теор. и мат. физика*, 1976, **26**, № 2, 206–220.
24. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, **13**, 2319–2330.
25. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964, 355 с.
26. Гото М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Ли, М., Мир, 1981, 336 с.