О некоторых точных решениях многомерного уравнения Эйлера–Лагранжа

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

В работах [1–3] исследована симметрия и найдены некоторые классы точных решений нелинейного двумерного уравнения Эйлера–Лагранжа

$$u_{00}\left(u_1^2+1\right)-2u_{01}u_0u_1+u_{11}\left(u_0^2-1\right)=0, \tag{1}$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1)\in R_2$, $u_\mu\equiv\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu=0,1$.

В литературе часто (1) называют уравнением для минимальной поверхности, или уравнением Борна–Инфельда.

Естественное многомерное обобщение уравнения (1) — уравнение

$$L_1(u)=\Box u\left(1-u_\nu u^\nu\right)+u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0. \tag{2}$$

Уравнение вида [4]

$$\lambda_1L_1(u)+\lambda_2L_2(u)=0, \tag{3}$$

$$L_2(u)=\left[\left(1-u_\nu u^\nu\right)|u_{\mu\nu}|\right]^{3/(n+4)} \tag{4}$$

есть обобщение как уравнения Эйлера–Лагранжа, так и многомерного уравнения Монжа–Ампера. При $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$ (3) совпадает с уравнением Монжа–Ампера [4].

В (2)–(4) использованы следующие обозначения: $u=u(x)$, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})\in R_n$, $|u_{\mu\nu}|$ — -определитель из вторых производных $\frac{\partial^2u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}$, т.е. гессиан; $\mu,\nu=0,1,\ldots,n-1$, $\Box$ — оператор Даламбера.

Настоящая статья посвящена построению некоторых классов точных решений уравнения (2). Кроме того, показано, что среди множества всех дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) первого порядка существует единственное уравнение — релятивистское уравнение Гамильтона, инвариантное относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde P(1,n)$.

Для отыскания некоторого нетривиального множества функций, удовлетворяющего уравнению (2), нужно знать его симметрийные свойства.

Теорема 1. *Максимальной алгеброй инвариантности в смысле С. Ли уравнений (2), (3) является расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde P(1,n)$, базисные элементы которой имеют вид*

$$\begin{gathered}p_A=ig_{AB}\frac{\partial}{\partial x_B},\qquad J_{AB}=x_Ap_B-x_Bp_A,\quad A,B=0,1,\ldots,n,\\ D=x_Ap^A,\qquad x_n=u,\qquad p_n=-i\frac{\partial}{\partial u}.\end{gathered} \tag{5}$$

Доклады академии наук СССР, 1984, **278**, № 4, С. 847–851.

Теорема 1 доказывается с помощью метода Ли [5]. Из теоремы вытекает, что уравнение Эйлера–Лагранжа инвариантно относительно вращений в пространстве R_{n+1}, т.е. в пространстве с метрикой

$$s^2 = x_A x^A = x_\mu x^\mu - u^2, \qquad \mu = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Решение уравнения (2), следуя [6], ищем в виде

$$u = \varphi(\omega) f(x) + g(x) \tag{6}$$

или

$$w_0(x, u) = \Psi(w), \tag{7}$$

где $\varphi(\omega)$ и $\Psi(w)$ — неизвестные функции, зависящие от инвариантов ω, w_0, w группы (или подгруппы) $\tilde{P}(1, n)$; $f(x)$, $g(x)$ — известные функции. Формула (6), если известны инварианты $w_0(x, u)$, $w(x, u)$ и $\Psi(w)$, задает решение (2) в неявном виде.

В зависимости от явного вида инвариантов $\omega(x)$, $w(x, u)$ и функций $f(x)$, $g(x)$ получим различные классы функций, удовлетворяющих уравнению (2). Если

$$\omega = \frac{(a_\nu x^\nu)^a}{\beta_\nu x_\nu}, \qquad f(x) = \beta_\nu x^\nu, \qquad g(x) = 0, \tag{8}$$

где a, α_ν, β_ν — произвольные параметры, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \beta^\nu = 0, \qquad \beta_\nu \beta^\nu \neq 0, \tag{9}$$

то уравнение (2) с помощью подстановки (6) редуцируется к уравнению $\varphi''(\omega) = 0$. Отсюда следует, что семейство функций

$$u = (\alpha_\nu x^\nu)^a + \beta_\nu x^\nu \tag{10}$$

при условии (9) является решением уравнения (2).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции вида

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) \beta_\nu x^\nu, \tag{11}$$

где φ — произвольная дважды дифференцируемая функция инварианта $\omega = \alpha_\nu x^\nu$, a_μ, β_μ удовлетворяют условиям (9).

Используя подстановку (6) и $\omega = \alpha_\nu x^\nu$, $f(x) = 1$, $g(x) = \beta_\nu x^\nu$, непосредственной проверкой убеждаемся, что решением уравнения (2) являются функции

$$u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta_\nu x^\nu, \tag{12}$$

где параметры удовлетворяют условиям

$$(\alpha_\nu \beta^\nu)^2 + \alpha_\nu \alpha^\nu (1 - \beta_\nu \beta^\nu) = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим случай

$$\omega = x_\nu x^\nu, \qquad f(x) = 1, \qquad g(x) = 0.$$

В этом случае уравнение (2) редуцируется к уравнению Бернулли

$$2\omega\varphi'' + n\varphi' - 4(n-1)\omega\varphi'^3 = 0.$$

Следовательно, решение уравнения задается выражением

$$u = c_1 \int\limits_0^{\sqrt{x_\nu x^\nu}} \frac{dt}{\sqrt{1 + c_2 t^{2n-2}}}, \tag{14}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные. При $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

$$u^2 = x_\nu x^\nu.$$

Воспользуемся теперь инвариантами w_0 и w, зависящими не только от x, но и от независимой функции u. Рассмотрим простейший случай

$$\begin{aligned} &w_0(x,u) = \alpha_A x^A \equiv \alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \\ &w(x,u) = \beta_A x^A \equiv \beta_\nu x^\nu - \beta_n u. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя подстановку (7) и инварианты (15), получим решение (2) в неявном виде:

$$\alpha_A x^A = \Psi(\beta_A x^A), \tag{16}$$

$$\alpha_A \alpha^A \beta_A \beta^A - (\alpha_A \beta_A)^2 = 0, \tag{17}$$

где Ψ — произвольная дважды дифференцируемая функция относительно w.

В том случае, когда

$$w_0(x,u) = x_A x^A \equiv x_\nu x^\nu - u^2, \qquad w(x,u) = \beta_A x^A, \tag{18}$$

подстановка (7) редуцирует (2) к нелинейному уравнению

$$2(w^2 - \beta^2\Psi)\Psi'' + n(4\Psi - 4\omega\Psi + \beta^2\Psi'^2) = 0, \tag{19}$$

$\beta^2 \equiv \beta_A \beta^A$, n — число независимых переменных у функции $u(x)$.

Уравнение (19) заменой

$$\beta^2\Psi(w) = \Phi(w) + w^2, \qquad \beta^2 \neq 0,$$

приводится к интегрируемому уравнению

$$2\Phi\Phi'' - n\Phi'^2 - 4(n-1)\Phi = 0. \tag{20}$$

Общее решение уравнения (20) задается формулами

$$\int\limits_0^{\sqrt{\Phi}} \frac{dt}{\sqrt{c_1 t^{2n-2} - 1}} = w + c_2, \qquad \Phi \equiv 0. \tag{21}$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$(\beta_A x^A)^2 - \beta_A \beta^A x_B x^B + \Phi(\beta_A x^A) = 0, \tag{22}$$

где $\beta_A \beta^A \neq 0$, функция Φ задается выражениями (21).

В том случае, когда $\beta_A \beta^A = 0$, подстановка (7) редуцирует уравнение (2) к линейному уравнению Эйлера

$$w^2\Psi'' - 2nw\Psi' + 2n\Psi = 0, \tag{23}$$

решение которого имеет вид

$$\Psi = c_1 w + c_2 w^{2n}. \tag{24}$$

Решение уравнения (2) находится из алгебраического уравнения

$$x_A x^A = c_1 \beta_A x^a + c_2 (\beta_A x^A)^{2n}, \qquad \beta_A \beta^A = 0. \tag{25}$$

Таким образом, формулы (10)–(14), (16), (22), (25) задают класс функций — семейство частных решений нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа.

2. В этом пункте приведем решение следующей задачи: описать все ДУЧП первого и второго порядков

$$u_0 = F(x, u, \underset{1}{u}), \qquad x \in R_n, \quad \underset{1}{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \tag{26}$$

$$u_{00} = G(x, u, u_0, u_1, u_{01}, u_{11}), \qquad x \in R_2, \tag{27}$$

инвариантные соответственно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{P}(1,2)$. Решение этой задачи дается следующими теоремами.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (26) было инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,n)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F = \pm (u_a u_a + 1)^{1/2}, \qquad a = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{28}$$

Теорема 3. *Уравнение (27) инвариантно относительно алгебры $\tilde{P}(1,2)$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$\lambda_1 \left[\Box u (1 - u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right] + \lambda_2 \left[(1 - u_\nu u^\nu) |u_{\mu\nu}| \right]^{1/2} = 0,$$

$\mu, \nu = 0, 1,$ $u = u(x_0, x_1)$.

Доказательство обеих теорем сводится к решению сильно переопределенных систем ДУЧП на функции F и G, полученных из условия инвариантности (26) и (27) относительно алгебр $\tilde{P}(1,n)$ и $\tilde{P}(1,2)$. Общее решение этих систем и дает явный вид функций F и G.

Вопрос о линеаризации двумерных уравнений Эйлера–Лагранжа и Монжа–Ампера, с помощью нелокальных преобразований, рассмотрен в [2]. Применение алгебры $\tilde{P}(1,4)$ к описанию частиц с переменной массой обсужден в [6].

В заключение сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4. *а) Для того чтобы уравнение*

$$|u_{\mu\nu}| = F(x, u, \underset{1}{u}), \tag{29}$$

где $x \in R_n$, было инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $P(1,n)$ (5), необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda (1 - u_\nu u^\nu)^{(n+2)/2}, \qquad \lambda = \mathrm{const}. \tag{30}$$

б) Для того чтобы уравнение (29) было инвариантно относительно алгебры Галилея $G(2, n-1)$ с операторами вида

$$\begin{gathered} p_{t_1} = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad p_{t_2} = i\frac{\partial}{\partial u}, \qquad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ G_{1a} = t_1 p_a - m x_a p_{t_2}, \qquad G_{2a} = t_2 p_a - m x_a p_{t_1}, \qquad t_1 \equiv x_0, \qquad t_2 \equiv u, \end{gathered} \tag{31}$$

необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид

$$|u_{\mu\nu}| = \lambda \left(u_0 + \frac{1}{2m} u_a u_a \right)^{(n+1)/2}, \qquad \lambda = \text{const}. \tag{32}$$

1. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН*, 1982, **263**, № 3, 582–586.
2. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982, 48 с.
3. Розенгауз К.М., Препринт, Ленинград, Ин-т ядер. физ., 1982, № 815, 22 с.
4. Фущич В.И., Серов Н.И., *ДАН*, 1983, **273**, № 3, 543–546.
5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
6. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 5–28.