О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВА

Групповые свойства уравнений газовой динамики детально исследовал Л.В. Овсянников [1, 2], который установил, что максимально широкой локальной группой Ли уравнений газовой динамики

$$
\begin{aligned}
&D\rho + \rho \operatorname{div} u = 0,\\
&Du + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = 0,\\
&Ds = 0, \qquad p = f(p, s),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $D = \partial/\partial x_0 + \boldsymbol{u}\vec{\nabla}$, $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = \{u^1(x), u^2(x), u^3(x)\}$, $x_0 = t$, для случая политропного газа (с показателем $\gamma = 5/3$), является 14 параметрическая группа.

Наше основное наблюдение, о котором речь пойдет ниже, состоит в том, что уравнения (1) для одномерного движения, и только в этом случае, допускают группу значительно шире, чем группа, установленная в [2]. Оказывается, одномерные уравнения (1) обладают уникальной симметрией — бесконечно параметрической группой C_∞. Именно это свойство уравнений (1) в одномерном случае и дает возможность найти общее решение одномерных уравнений газовой динамики. Риман впервые, не используя в явном виде групповые свойства уравнений (1), нашел его частное решение в виде простых волн.

Следует отметить, что одномерные уравнения Даламбера, Лиувилля также допускают группу C_∞. Этот факт и является причиной их интегрируемости.

Для одномерного течения политропного газа

$$
p = \frac{\lambda^2}{3}\rho^3, \qquad \lambda \quad \text{— параметр,} \tag{2}
$$

уравнения (1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&u_0^0 + u^1 u_1^0 + u^0 u_1^1 = 0,\\
&u_0^1 + u^1 u_1^1 + \lambda^2 u^0 u_1^0 = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где введены следующие обозначения:

$$
u^0 \equiv \rho, \qquad u^1 \equiv u, \qquad u_\nu^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x_\nu}, \qquad \mu, \nu = 0, 1.
$$

Цель настоящей заметки такова: 1) показать, что одномерные уравнения (3) допускают бесконечно параметрическую группу C_∞; 2) построить общее решение уравнений (3).

Доклады академии наук СССР, 1983, **268**, № 5, С. 1102–1104.

Для установления группы инвариантности системы (3) необходимо, как хорошо известно [1, 3], найти коэффициентные функции инфинитезимального оператора

$$X = \xi^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \qquad u = (u^0, u^1). \tag{4}$$

Можно показать, что эта задача сводится к решению следующих систем:

$$\begin{aligned} &\eta^0_0 + u^1\eta^0_1 + u^0\eta^1_1 = 0,\\ &\eta^1_0 + u^1\eta^1_1 + \lambda^2 u^0\eta^0_1 = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\eta^0 = -u^0(\xi^0_0 - \xi^1_1 + 2u^1\xi^0_1),\\ &\eta^1 = -u^1(\xi^0_0 - \xi^1_1 + u^1\xi^0_1) - (\lambda u^0)^2\xi^0_1 + \xi^1_0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\eta^0_{u^0} = \eta^1_{u^1}, \qquad \eta^0_{u^1} = \eta^1_{u^0}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\xi^1_{u^0} = u^1\xi^0_{u^0} - \lambda^2 u^0\xi^0_{u^1},\\ &\xi^1_{u^1} = u^1\xi^0_{u^1} - u^0\xi^0_{u^0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из условия совместности системы (8) имеем

$$\xi^0_{u^0u^0} - \lambda^2\xi^0_{u^1u^1} + \frac{2}{u^0}\xi^0_{u^0} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для отыскания функций ξ^μ нужно найти общее решение уравнения типа Дарбу (9). Замечательным свойством уравнения (9) является то, что оно допускает группу G_∞, точнее, справедлива

Теорема 1. *Максимальной группой инвариантности (м.г.и.) уравнения (9) является бесконечно параметрическая группа Ли вида*

$$(u^\mu)' = u^\mu + \varepsilon\tau^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \qquad (\xi^0)' = \xi^0 + \varepsilon\sigma + o\left(\varepsilon^2\right). \tag{10}$$

Коэффициенты инфинитезимального оператора

$$X = \tau^\mu(u,\xi^0)\frac{\partial}{\partial u^\mu} + \sigma(u,\xi^0)\frac{\partial}{\partial \xi^0}$$

задаются формулами

$$\begin{aligned} &\tau^0 = f(u^1 + \lambda u^0) + g(u^1 - \lambda u^0),\\ &\tau^1 = f(u^1 + \lambda u^0) - g(u^1 - \lambda u^0) + c_1,\\ &\sigma = \left(c_2 - \frac{\tau^0}{u^0}\right)\xi^0 + b(u), \end{aligned} \tag{11}$$

где f, g — произвольные функции от ρ и u, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, $b(u)$ — произвольное решение уравнения Дарбу (9).

Эта теорема "подсказывает" (см. формулы (11)) замену

$$W_0 = u^1 + \lambda u^0, \qquad W_1 = u^1 - \lambda u^0, \tag{12}$$

с помощью которой (9) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2[(W_0 - W_1)\xi^0]}{\partial W_0 \partial W_1} = 0. \tag{13}$$

Из (13) получаем, что общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\xi^0 = \frac{F(x, u^1 + \lambda u^0) + G(x, u^1 - \lambda u^0)}{2\lambda u^0}, \tag{14}$$

F, G — произвольные функции. Подставив (14) в (8)–(5), окончательно получаем

$$\begin{aligned} &\xi^0 = \frac{x_0 F^0 + G^0 + x_0 F^1 + G^1}{2\lambda u^0}, \\ &\xi^1 = \frac{(u^1 - \lambda u^0)(x_0 F^0 + G^0) + (u^1 + \lambda u^0)(x_0 F^1 + G^1)}{2\lambda u^0} + H(x), \\ &\eta^0 = -\frac{1}{2}(F^0 + F^1), \qquad \eta^1 = -\frac{1}{2}(F^0 - F^1), \end{aligned} \tag{15}$$

где $F^0 = F^0(\omega_0)$, $F^1 = F^1(\omega_1)$, $G^0 = G^0(\omega_0)$, $G^1 = G^1(\omega_1)$ — произвольные функции, $H(x) = c_\nu x^\nu + d$, $c_\nu, d = \mathrm{const}$,

$$\omega_0 = x_0(u^1 + \lambda u^0) - x_1, \qquad \omega_1 = x_0(u^1 - \lambda u^0) - x_1. \tag{16}$$

Итак, мы нашли м.г.и. уравнения (3), т.е. доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Максимальной группой инвариантности уравнений (3) является бесконечно параметрическая группа Ли вида*

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon\xi^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \qquad (u^\mu)' = u^\mu + \varepsilon\eta^\mu + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{17}$$

где ξ^μ и η^μ задаются формулами (15).

С учетом локальной замены (см. формулы (16))

$$V^0 = x_0(u^1 + \lambda u^0) - x_1, \qquad V^1 = x_0(u^1 - \lambda u^0) - x_1 \tag{18}$$

система (3) распадается на два незацепленных уравнения

$$x_0 V_0^0 + (V^0 + x_1)V_1^0 = 0, \qquad x_0 V_0^1 + (V^1 + x_1)V_1^1 = 0. \tag{19}$$

Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$\frac{V^0 + x_1}{x_0} = \varphi^0(V^0), \qquad \frac{V^1 + x_1}{x_0} = \varphi^1(V^1). \tag{20}$$

Возвращаясь к функциям u и ρ, получаем общее решение уравнений одномерной газовой динамики

$$u \pm \lambda\rho = \Phi^\pm\left(x_0 - \frac{x_1}{u \pm \lambda\rho}\right), \tag{21}$$

где $\Phi^\pm$ — произвольные дифференцируемые функции.

Этот результат говорит о том, что в одномерном случае скорость u и плотность ρ газа связаны довольно общим функциональным соотношением (21).

1. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
2. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, М., Наука, 1981, 350 с.
3. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 6–28.