О точных решениях некоторых нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея

В.И. ФУЩИЧ, М.М. СЕРОВА

Описаны все нелинейные уравнения вида $\Box u + F(u, \underset{1}{u})u_0 = 0$, инвариантные относительно расширенной группы Евклида $\tilde{E}(1,n)$. Найдены точные решения некоторых нелинейных уравнений, инвариантных оносительно группы $\tilde{E}(1,n)$ или группы Галилея.

All equations of the form $\Box u + F(u, \underset{1}{u})u_0 = 0$ are listed, which are invariant under extended Euclidean group $\tilde{E}(1,n)$. Some exact solutions of the nonlinear equations which are invariant under $\tilde{E}(1,n)$ or Galilei $G(1,n)$ group are found.

Введение

Под расширенной группой Евклида $\tilde{E}(1,n)$ будем понимать группу Евклида $E(1,n)$ в $R_1(x) \otimes R_n(x)$, дополненную однопараметрической группой масштабных преобразований $D(1)$.

В первой части настоящей работы описаны все уравнения вида

$$\Box u + F(u, \underset{1}{u})u_0 = 0, \tag{0.1}$$

инвариантные относительно группы $\tilde{E}(1,n)$. Для некоторых уравнений вида (0.1) построены многопараметрические семейства частных решений. В (0.1) приняты следующие обозначения:

$$u = u(x), \qquad x = (x_0 \equiv t, x_1, \ldots, u_n), \qquad \underset{1}{u} = (u_1, \ldots, u_n),$$

$$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n, \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta,$$

F — произвольная непрерывная и n раз дифференцируемая функция u и $\underset{1}{u}$.

Во второй части работы (§§ 3–8) построены точные решения некоторых систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), инвариантных относительно группы Галилея. Рассмотренные нами системы часто встречается в гидродинамических исследованиях.

Методом Ли доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение (0.1) инвариантно относительны группы $\tilde{E}(1,n)$ только в таких трех случаях:*

$$1) \quad F = u^k f\left(u_a u_a / u^{2k+2}\right), \tag{0.2}$$

Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики, Киев, Институт математики АН УССР, 1983, С. 24–54.

$$2) \quad F = \exp u f\left(u_a u_a / \exp 4u\right), \tag{0.3}$$

$$3) \quad F = \sqrt{u_a u_a} f(u), \tag{0.4}$$

где k — произвольная постоянная, f — произвольная дифференцируемая функция. Базисные элементы алгебры $E(1,n)$, заданные на множестве решений уравнения (0.1), имеют стандартный вид

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad \mu,\nu = 0,1,\ldots,n, \quad a,b = 1,\ldots,n, \tag{0.5}$$

а оператор D, соответствующий масштабным преобразованиям, задается формулами

$$D = x_\nu p^\nu + i/k \qquad \text{для случая 1);} \tag{0.6}$$

$$D = x_\nu p^\nu - i\frac{\partial}{\partial u} \qquad \text{для случая 2);} \tag{0.7}$$

$$D = x_\nu p^\nu \qquad \text{для случая 3).} \tag{0.8}$$

Доказательство этой теоремы сводится к применению алгоритма Ли [3] к уравнениям (0.1). Мы его опускаем, поскольку оно слишком громоздко. Из множества уравнений (0.1) с нелинейностями (0.2)–(0.4) рассмотрим только три уравнения, по одному из каждого класса:

$$\Box u + \lambda u u_0 = 0, \tag{0.9}$$

$$\Box u + \lambda u_0 \exp u = 0, \tag{0.10}$$

$$\Box u + \lambda \sqrt{u_a u_a} u_0 = 0. \tag{0.11}$$

Уравнение (0.9) часто встречается в теории поля, газовой динамике. Инвариантные классы точных решений (0.9) приведены в [1, 2], поэтому далее построим частные решения уравнений (0.10), (0.11).

Решения уравнений (0.10), (0.11) будем искать с помощью анзатца [1]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{0.12}$$

где φ — некоторая неизвестная функция от новых инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)\}$, $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции, $\omega(x)$ — инварианты группы $\tilde{E}(1,n)$.

Для явного построения решений необходимо найти инварианты группы $\tilde{E}(1,n)$, функции $f(x)$ и $g(x)$, а затем решить соответствующее уравнение для функции $\varphi(\omega)$.

§ 1. Инварианты расширенной группы Евклида

В этом параграфе приведем инварианты группы $\tilde{E}(1,3)$. Коэффициенты ξ^μ инфинитезимального оператора

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(u)\frac{\partial}{\partial u}$$

для группы $\tilde{E}(1,3)$ имеет вид

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu,$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, $\mu=\overline{0,3}$ — произвольные постоянные, причем $c_{00}=c_{11}=c_{22}=c_{33}$, $c_{0a}=0$, $c_{ab}=-c_{ba}$, $a\neq b$, $a,b=\overline{1,3}$.

Не вдаваясь в подробности решения соответствующих уравнений Лагранжа [1], выпишем явный вид инвариантов $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ группы $\tilde{E}(1,3)$:

$$1.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=y_0\exp\left(b_1\operatorname{arctg}\frac{\gamma_a y_a}{\beta_a y_a}\right), \tag{1.1}$$

где параметры α_a, β_a, γ_a удовлетворяют соотношениям $\alpha_a\alpha_a=\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=0$, $\beta_a\beta_a=\gamma_a\gamma_a\neq 0$, $(\beta_a y_a)^2+(\gamma_a y_a)^2=\frac{b_1^2}{\alpha^2}(\alpha^2\omega_2-\omega_1^2)$.

$$2.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=\frac{\beta_a y_a}{\alpha_a y_a}-b_2\ln\alpha_a y_a, \tag{1.2}$$

где $\alpha_a\alpha_a=\alpha_a\beta_a=0$, $\beta_a\beta_a\neq 0$.

$$3.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{y_a y_a}{y_0^2},\qquad \omega_3=\frac{\beta_a y_a}{y_0^{b_3}}, \tag{1.3}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\beta_a\beta_a=0$.

$$4.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{y_0},\qquad \omega_2=\frac{\sigma_a x_a}{y_0},\qquad \omega_3=\delta_a x_a-b_4\ln y_0, \tag{1.4}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\alpha_a\delta_a=\alpha_a\sigma_a=\sigma_a\sigma_a=\delta_a\delta_a=0$, $\delta_a\sigma_a=a\neq 0$.

$$5.\quad \omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2}+y_a y_a,\qquad \omega_3=x_0-b_3\operatorname{arctg}\frac{l_a y_a}{\delta_a y_a}, \tag{1.5}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha^2\neq 0$, $l_a l_a=\delta_a\delta_a\neq 0$, $\alpha_a l_a=\alpha_a\delta_a=l_a\delta_a=\beta_\nu\delta^\nu=0$, $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $(l_a y_a)^2+(\delta_a y_a)^2=l^2\omega_2$.

$$6.\quad \omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2}+y_a y_a,\qquad \omega_3=x_0+b_6\ln\sigma_a x_a, \tag{1.6}$$

где $\alpha_a\alpha_a=-\alpha_\nu\beta^\nu=\alpha^2\neq 0$, $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $\alpha_a\sigma_a=\sigma_a\sigma_a=\beta_\nu\sigma^\nu=0$.

$$\begin{aligned}7.\quad &\omega_1=\beta_\nu x^\nu,\qquad \omega_2=\frac{(\alpha_a y_a)^2}{2}+b_7 l_a y_a,\\ &\omega_3=\frac{(\alpha_a y_a)^3}{3}+b_7\alpha_a y_a l_a y_a-b_7^2\delta_a y_a,\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\beta_\nu\beta^\nu\neq 0$, $l_a l_a=\alpha_a\delta_a=\delta_a\delta_a=l^2\neq 0$, $\alpha_a\alpha_a=\delta_a l_a=0$.

$$8.\quad \omega_1=\alpha_a x_a,\qquad \omega_2=x_a x_a,\qquad \omega_3=x_0-b_8\operatorname{arctg}\frac{l_a x_a}{\delta_a x_a}, \tag{1.8}$$

где $\alpha_a\alpha_a=\alpha^2\neq 0$, $l_a l_a=\delta_a\delta_a=l\neq 0$, $\alpha_a l_a=\alpha_a\delta_a=l_a\delta_a=0$.

$$9.\quad \omega_a=\frac{y_a}{y_0},\qquad a=\overline{1,3}. \tag{1.9}$$

$$10. \quad \omega_1 = \alpha_\nu x^\nu, \qquad \omega_2 = \beta_a x_a, \qquad \omega_3 = \gamma_a x_a, \tag{1.10}$$

где $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha^2 \neq 0$, $\beta_a \beta_a = \beta^2 \neq 0$, $\gamma_a \gamma_a = \gamma^2 \neq 0$, $\alpha_a \beta_a = b_9$, $\alpha_a \gamma_a = b_{10}$, $\beta_a \gamma_a = b_{11}$.

В формулах (1.1)–(1.10) $y_\nu = x_\nu + a_\nu$, $z_\nu = x_\nu + \frac{1}{2} a_\nu$, a_ν, b_k, δ_a, l_a, σ_a, α_ν, β_ν, γ_ν — постоянные, которые выражаются через параметры группы $c_{\mu\nu}$ и d_μ.

Для того чтобы найти функции $f(x)$ и $g(x)$ в формуле (0.12), нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{du}{\eta} = dt. \tag{1.11}$$

Используя явный вид η, находим из (1.11) функции $f(x)$ и $g(x)$.

§ 2. Решения уравнения (0.10)

Рассмотрим уравнение (0.10) в четырехмерном пространстве $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3)$. Решения уравнения (0.10) ищем по формуле (0.12). Из явного вида η и формулы (1.11) следует, что $f(x) \equiv 1$ для всех десяти случаев, $g(x) = -\ln y_0$ случаев 1–4, а для остальных $g(x) \equiv 0$.

Итак, решения уравнения (7) ищем в виде

$$u = \varphi(\omega) + g(x). \tag{1.12}$$

Подставляя (1.12) в (0.10), для функции φ получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно новых инвариантных переменных ω_1, ω_2, ω_3:

$$\psi^{ab}(\omega)\varphi_{ab} + \psi^a(\omega)\varphi_a + \psi(\omega) + \lambda \exp\varphi(\psi^{0a}(\omega)\varphi_a + 1) = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\psi^{ab}(\omega) g_0 \exp g = \omega_{a\nu}\omega_b^\nu, \qquad \psi^a(\omega) g_0 \exp g = \Box\omega_a,$$
$$\psi(\omega) g_0 \exp g = \Box g, \qquad \psi^{0a}(\omega) g_0 = \omega_{a0}.$$

Для первых 6 случаев инвариантов ω уравнения для функции φ имеют вид:

$$\begin{aligned} 1. \quad & (\omega_1^2 - \alpha^2)\varphi_{11} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\varphi_{22} - \omega_3^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 b_1^2}{\alpha^2\omega_2 - \omega_1^2}\right)\varphi_{33} + \\ & + 4\omega_1(\omega_2 - 1)\varphi_{12} - 4\omega_2\omega_3\varphi_{23} + 6(\omega_2 - 1)\varphi_2 + 2\omega_1\varphi_1 - \\ & - \frac{\alpha^2 b_1^2 \omega_3}{\alpha^2\omega_2 - \omega_1^2}\varphi_3 + \lambda(-\omega_1\varphi_1 + 2\omega_2\varphi_2 + \omega_3\varphi_3 - 1)\exp\varphi + 1 = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \omega_1^2\varphi_{11} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\varphi_{22} + \frac{b_2}{\omega_1^2}\varphi_{33} + 4\omega_1(\omega_2 - 1)\varphi_{12} - 4b_2\varphi_{23} + \\ & + 2\omega_1\varphi_1 + 6(\omega_2 - 1)\varphi_2 - \lambda(\omega_1\varphi_1 + 2\omega_2\varphi_2 + 1)\exp\varphi + 1 = 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & (\omega_1^2 + \alpha^2)\varphi_{11} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\varphi_{22} + b_3^2\omega_3^2\varphi_{33} + 4\omega_1(\omega_2 - 1)\varphi_{12} + \\ & + 2b_3\omega_1\omega_3\varphi_{13} + 4\omega_3(b_3\omega_2 - 1)\varphi_{23} + 2\omega_1\varphi_1 + 6(\omega_2 - 1)\varphi_2 + \\ & + b_3(b_3 + 1)\omega_3\varphi_3 - \lambda(\omega_1\varphi_1 + 2\omega_2\varphi_2 + b_3\omega_3\varphi_3 + 1)\exp\varphi + 1 = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$4. \quad (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2^2\varphi_{22}+b_4^2\varphi_{33}+4\omega_1\omega_2\varphi_{12}+2b_4\omega_1\varphi_{13}+ \\ +4b_4\omega_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3- \\ -\lambda(\omega_1\varphi_1+2\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3+1)\exp\varphi+1=0. \tag{1.17}$$

$$5. \quad \beta\varphi_{11}+\omega_2\varphi_{22}+\left(1-\frac{b_5}{\omega_2}\right)\varphi_{33}+ \\ +2\beta_0\varphi_{13}-4\varphi_2+\lambda(\beta_0\varphi_1+\varphi_3)\exp\varphi=0. \tag{1.18}$$

$$6. \quad \beta\varphi_{11}+\omega_2\varphi_{22}+2\beta_0\varphi_{13}+\varphi_{33}- \\ -4b_6\varphi_{23}-4\varphi_2+\lambda(\beta_0\varphi_1+\varphi_3)\exp\varphi=0. \tag{1.19}$$

Если найти хотя бы частное решение любого из уравнений (1.14)–(1.19), то по формуле (1.12) найдем решение уравнения (0.10).

Рассмотрим уравнение (1.14). Если предположить, что $\partial\varphi/\partial\omega_2=\partial\varphi/\partial\omega_3=0$, то из (1.14) для функции φ получим ОДУ второго порядка

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_1-\lambda(\omega_1\varphi_1+1)\exp\varphi+1=0. \tag{1.20}$$

Интегрируя уравнение (1.20), имеем

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_1-\lambda\omega_1\exp\varphi=-\omega_1+c_1,$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Последнее уравнение подстановкой

$$\varphi=\ln v \tag{1.21}$$

приводится к уравнению Бернулли

$$(\omega_1^2-\alpha^2)v'+(\omega_1-c_1)v-\lambda\omega_1 v^2=0,$$

общее решение которого

$$v=\left[(\omega_1-\alpha)^{\frac{\alpha-c_1}{2\alpha}}(\omega_1+\alpha)^{\frac{\alpha+c_1}{2\alpha}}\int\frac{-\lambda\omega_1 d\omega_1}{(\omega_1-\alpha)^{\frac{3\alpha-c_1}{2\alpha}}(\omega_1+\alpha)^{\frac{3\alpha+c_1}{2\alpha}}}\right]^{-1}. \tag{1.22}$$

В зависимости от значений постоянной c_1 из (1.22) в силу (1.21), имеем следующие решения уравнения (1.12):

$$\varphi=-\ln\left(\frac{\lambda}{4\alpha}(w\pm\alpha)\ln\left|c_2\frac{\omega_1+\alpha}{\omega_1-\alpha}\right|+\frac{\lambda}{2}\right), \qquad c_1=\pm\alpha, \\ \varphi=-\ln\left(c_2\sqrt{\omega_1^2-\alpha^2}+\lambda\right), \qquad c_1=0. \tag{1.23}$$

Тогда из (1.23) и (1.12) получим решения уравнения (0.10):

$$u=-\ln\left(\frac{\lambda}{4\alpha}(\alpha_a y_a\pm\alpha y_0)\ln\left|c_2\frac{\alpha_a y_a+\alpha y_0}{\alpha_a y_a-\alpha y_0}\right|+\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$u=-\ln\left(c_2\sqrt{(\alpha_a y_a)^2-\alpha^2 y_0^2}+\lambda\right).$$

Если в уравнении (1.15) положить $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$\omega_1^2\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_1-\lambda(\omega_1\varphi_1+1)\exp\varphi+1=0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi=-\ln\left[\frac{\omega_1}{c_1}\left(c_2\exp\frac{c_1}{\omega_1}-\lambda\right)\right], \tag{1.24}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования. Тогда из (1.24) и (1.12) имеем решение уравнения (0.10)

$$u=-\ln\left[\frac{\alpha_a y_a}{c_1 y_0}\left(c_2\exp\frac{c_1 y_0}{\alpha_a y_a}-\lambda\right)\right].$$

Рассмотрим уравнение (1.16), положив $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$. Тогда для функции φ получим ОДУ

$$(\omega_1+\alpha^2)\varphi_{11}+2\omega_1\varphi_1-\lambda\exp\varphi(\omega_1\varphi_1+1)+1=0,$$

которое интегрированием приводится к уравнению Бернулли

$$(\omega_1^2+\alpha)v'+(\omega_1-c_1)v-\lambda\omega_1 v^2=0, \qquad \varphi=\ln v. \tag{1.25}$$

Решая (1.25), получаем

$$v=\left\{\sqrt{\omega_1^2+\alpha^2}\left[c_2\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\alpha}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda c_1}{c_1^2+\alpha^2}\left(\frac{\omega_1}{c_1^2+\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{c_1}\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2+\alpha^2}}\right)\right]\right\}^{-1},$$

а

$$\begin{gathered}\varphi=-\ln\left\{\sqrt{\omega_1^2+\alpha^2}\left[c_2\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\alpha}\right)-\right.\right.\\ \left.\left.-\frac{\lambda c_1}{c_1^2+\alpha^2}\left(\frac{\omega_1}{c_1^2+\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{c_1}\frac{1}{\sqrt{\omega_1^2+\alpha^2}}\right)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{1.26}$$

Из (1.26) и (1.12) имеем решение уравнения (0.10):

$$\varphi=-\ln\left\{c_2\sqrt{(\alpha_a y^a)^2+\alpha^2 y_0^2}\left[\exp\left(-\frac{c_1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\alpha_a y_a}{\alpha y_0}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda c_1}{c_2(c_1^2+\alpha^2)}\left(\frac{\alpha_a y_a}{y_0(c_1^2+\alpha^2)}-\frac{\alpha^2}{c_1}\frac{y_0}{\sqrt{(\alpha_a y_a)^2+\alpha^2 y_0^2}}\right)\right]\right\}.$$

Если в уравнении (1.16) положить $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=0$, то для функции φ получим следующее ОДУ:

$$b_3\omega_3\varphi_{33}+b_3(b_3+1)\omega_3\varphi_3-\lambda\exp\varphi(b_3\omega_3\varphi_3+1)=0. \tag{1.27}$$

Подстановкой $\omega_3 = t^{b_3}$ уравнение (1.27) приводится к уравнению (1.20), в котором ω_1 нужно заменить на t. Из (1.20) имеем

$$\varphi = -\ln\left[\frac{\omega_3^{1/b_3}}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1}{\omega_3^{1/b_3}} - \lambda\right)\right]. \tag{1.28}$$

Из (1.28) и (1.12) получаем решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{(\beta_a y_a)^{1/b_3}}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1 y_0}{(\beta_a y_a)^{1/b_3}} - \lambda\right)\right].$$

Если в уравнении (1.17) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = 0$, то получим ОДУ

$$b_4^2\varphi_{33} + b_4\varphi_3 - \lambda\exp\varphi(b_4\varphi_3 + 1) + 1 = 0, \tag{1.29}$$

которое заменой

$$\omega_3 = \ln t, \qquad t = \exp\omega_3$$

приводится к уравнению (1.27). Из (1.28) получим решение уравнения (1.29)

$$\varphi = -\ln\left[\frac{\exp a\omega_3}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1}{a\omega_3} - \lambda\right)\right], \qquad a = 1/b_4. \tag{1.30}$$

Тогда, в силу (1.12), из (1.30) имеем решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{\exp a\delta_a x_a}{c_1}\left(c_2 \exp\frac{c_1 x_0}{\delta_a x_a} - \lambda\right)\right].$$

Для уравнений (1.18) и (1.19) удалось найти частные решения. В результате имеем следующее решение уравнения (0.10):

$$u = -\ln\left[\frac{\mu}{c_1} + c_2\exp(-c_1\beta_\nu x^\nu)\right], \qquad \mu = \frac{\lambda\beta_0}{\beta},$$

$$u = -\ln\left[\frac{\lambda}{c_1} + c_2(\sigma_a x_a)^{-c_1 b_6}\exp(-c_1 x_0)\right].$$

Нетрудно убедиться, что решениями уравнения (0.10) будут функции

$$u = -\ln\left[f(\beta_a y_a)\left(c_2\exp\frac{y_0}{f(\beta_a y_a)} - \lambda\right)\right], \tag{1.31}$$

$$u = -\ln\left[\frac{\lambda}{c_1} + c_2(g(\sigma_a x_a)\exp x_0)^{-c_1}\right], \tag{1.32}$$

где f и g — произвольные дифференцируемые функции, β_a и σ_a — параметры, удовлетворяющие условию $\beta_a\beta_a = \sigma_a\sigma_a = 0$. Формулы (1.31) и (1.32) описывают целые массы решений уравнены (0.10).

Отметим, что полученные решения будут решениями уравнения (0.10) в n-мерном пространстве.

§ 2. Решения уравнения (0.11)

Рассмотрим нелинейное уравнение (0.11) в пространстве переменных (x_0, x_1, x_2, x_3). Аналогично, как и в предыдущем параграфе, используем формулу (1.12), явный вид инвариантов $\omega(x)$ (1.1)–(1.10) и значения функции $g(x) = b\ln y_0$ для случаев 1)–4) и $g(x) = b\beta_0 x_0$ для случаев 5), 6) При этом для функции $\varphi(\omega)$ получим следующие ДУЧП:

$$\begin{aligned}
1)\quad & (\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}-\omega_3^2\left[1-\frac{\alpha^2b_1^2}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\right]\varphi_{33}-\\
&-4\omega_1(1-\omega_2)\varphi_{12}-4\omega_2\omega_3\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1-6(\omega_2-1)\varphi_2-\\
&-\frac{\alpha^2b_1^2\omega_3}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi_3+\lambda b\left(\alpha\varphi_1+2\sqrt{\omega_2}\varphi_2+\frac{\alpha b_1\omega_3}{\sqrt{\alpha^2\omega_3-\omega_1^2}}\varphi_3\right)+\\
&+\lambda\left(-\alpha\omega_1\varphi_1^2-4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2+\frac{\alpha b_1\omega_3}{\sqrt{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}}\varphi_3^2\right)=b;
\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & \omega_1^2\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}-\frac{\beta}{\omega_1^2}\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}-4b_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+\\
&+6(\omega_2-1)\varphi_2-\lambda b\left(2\omega_2\varphi_2+\sqrt{\frac{\beta}{\omega_1}}\varphi_3\right)+\lambda\left(-4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2\right)=0;
\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
3)\quad & (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+b_3^2\omega_3\varphi_{33}+4\omega_1(\omega_2-1)\varphi_{12}+\\
&+4\omega_3(b_3\omega_2-1)\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6(\omega_2-1)\varphi_2+b_3(b_3+1)\omega_3\varphi_3+\\
&+\lambda b\left(\alpha\varphi_1+2\sqrt{\omega_2}\varphi_2\right)-\lambda\left(\alpha\omega_1\varphi_1^2+4\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi_2^2\right)=b;
\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
4)\quad & (\omega_1^2+\alpha^2)\varphi_{11}+4\omega_2^2\varphi_{22}+b_4^2\varphi_{33}+4\omega_1\omega_2\varphi_{12}+2b_4\omega_1\varphi_{13}+\\
&+4b_4\omega_2\varphi_{23}+2\omega_1\varphi_1+6\omega_2\varphi_2+b_4\varphi_3+\lambda b\alpha\varphi_1-\lambda\omega_1\varphi_1=b;
\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
5)\quad & \beta_1\varphi_{11}-4\omega_2\varphi_{22}+\left(1-\frac{\alpha^2}{\omega_2}\right)\varphi_{33}+2\beta_0\varphi_{13}-4\varphi_2+\lambda b\Biggl(-\lambda\beta_0\beta\varphi_1-\\
&-2i\lambda\beta_0\sqrt{\omega_2}\varphi_2+\frac{b_5\alpha}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi\Biggr)+\lambda\left(-\beta_0\beta\varphi_1^2+\frac{\beta_5\alpha}{\alpha^2\omega_2-\omega_1^2}\varphi_3^2\right)=b;
\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
6)\quad & \beta\varphi_{11}-4\omega_{22}\varphi_{22}+2\beta_0\varphi_{13}+\varphi_{33}-4b_6\varphi_{23}-4\varphi_2+\\
&+\lambda b\left(-\lambda\beta_0\beta\varphi_1-2\lambda i\beta_0\sqrt{\omega_2}\varphi_2\right)+\lambda(-\beta_0\beta\varphi_1^2)=b.
\end{aligned}\tag{2.6}$$

Рассмотрим уравнение (2.1). Предположим, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, для функции φ получим ОДУ

$$(\omega_1^2-\alpha^2)\varphi_{11}+[2\omega_1+\lambda b\alpha]\varphi_1-\lambda\alpha\omega_1^2=b,\tag{2.7}$$

которое заменой

$$\varphi_1=z(\omega_1)\tag{2.8}$$

приводим к уравнению Риккати

$$(\omega_1^2-\alpha^2)z'+[2\omega_1-\lambda b\alpha]z-\lambda\alpha\omega_1 z^2=b. \tag{2.9}$$

Так как функция

$$z_0=\frac{b}{\omega_1+d},\qquad d=\frac{\lambda b\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{\lambda^2b^2+4},$$

является частным решением уравнения (2.9), то подстановкой $z=y^{-1}(\omega_1)+z_0$ оно приводится к линейному уравнению относительно функции $y(\omega_1)$.

В случае $b=0$ уравнение (2.9) является уравнением Бернулли

$$(\omega_1^2-\alpha^2)z'+2\omega_1 z-\lambda\omega_1 z^2=0,$$

общее решение которого, как известно, имеет вид

$$z=\left[\frac{\lambda\alpha}{2}+\frac{c_1}{\omega_1^2-\alpha^2}\right]^{-1}. \tag{2.10}$$

Тогда, в силу (2.8), из (2.10) получим решение уравнения (2.7) для $b=0$

$$\varphi=\int\frac{d\omega_1}{\omega_1^2-\alpha^2+\frac{\lambda\alpha}{2c_1}}$$

или

$$\varphi=\frac{1}{cc_1}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{c}+c_2,\qquad -\alpha^2+\frac{\lambda\alpha}{2c_1}=c^2, \tag{2.11}$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Из (2.11) и (1.12) имеем решения уравнения (0.11)

$$u=\frac{1}{cc_1}\operatorname{arctg}\frac{\alpha_a y_a}{cy_0}+c_2,$$
$$u=\frac{1}{2cc_1}\ln\left(c_2\frac{\alpha_a y_a-cy_0}{\alpha_a y_a+cy_0}\right).$$

Если в уравнении (2.1) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\neq 0$, а $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3}=0$, то для функции φ получим ОДУ

$$4\omega_2(\omega_2-1)\varphi_{22}+\left[6(\omega_2-1)+2b\lambda\sqrt{\omega_2}\,\right]\varphi_2-4\lambda\omega_2\sqrt{\omega_2}\varphi^2=b, \tag{2.12}$$

которое подстановкой

$$\varphi_2=z(\omega_2) \tag{2.13}$$

приводится к уравнению Риккати

$$4\omega_2(\omega_2-1)z'+\left[6(\omega_2-1)+2b\lambda\sqrt{\omega_2}\,\right]z-4\lambda\omega_2\sqrt{\omega_2}z^2=b. \tag{2.14}$$

Решением уравнения (2.14), в случае $b=0$, будет функция

$$z=\left[\lambda\omega_2^{3/2}\ln\frac{c_1\omega_2}{\omega_2-1}\right]^{-1}. \tag{2.15}$$

Из (2.15) и (2.13) имеем решение уравнения (2.12) для $b = 0$:

$$\varphi = \frac{2}{\lambda} \int \frac{dt}{\ln \frac{1}{c_1}(1 - t^2)}, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}, \qquad c_1 = \mathrm{const}. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и (1.12) получим решение уравнения (0.11)

$$u = \frac{2}{\lambda} \int \frac{dt}{\ln \frac{1-t^2}{c_1}}, \qquad t = \frac{y_0}{\sqrt{y_a y_a}}.$$

Полагая в (2.2) $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_3} = 0$, для функции φ имеем ОДУ

$$\omega_1^2 \varphi_{11} + 2\omega_1 \varphi_1 = b,$$

общее решение которого

$$\varphi = b \ln \omega_1 - \frac{c_1}{\omega_1} + c_2, \qquad c_1, c_2 = \mathrm{const},$$

т.е., согласно (1.2),

$$u = b \ln \alpha_a y_a - \frac{c_1 y_0}{\alpha_a y_a} + c_2.$$

Для уравнений (2.3)–(2.6) удалось найти частные решения:

$$u = b \ln(\beta_a y_a)^{1/b_3} + \frac{c_1 y_0}{(\beta_a y_a)^{1/b_3}} + c_2,$$

где $\beta_a \beta_a = 0$;

$$u = c_1 y_0 \exp\left(-\frac{\delta_a x_a}{b_4}\right),$$

где $\delta_a \delta_a = 0$;

$$u = \frac{1}{c} \ln\left[c_1 \exp(b_5 - \alpha\beta_0 x_0) + c_2 \exp(b_5 - \beta_a x_a)\right],$$

где $c = \frac{\lambda \beta_0 \sqrt{\beta_a \beta_a}}{\beta^2}$, $\beta_\nu \beta^\nu = \beta \neq 0$;

$$u = 2c_1 \int \frac{\exp t}{t} dt + b\beta_0 x_0, \qquad t = \lambda i b \beta_0 \sqrt{\frac{\alpha_a y_a}{-\alpha^2} + y_a y_a},$$

где $\alpha_a \alpha_a = -\alpha^2 \neq 0$;

$$u = c_1 x_0 + c_2 \ln \sigma_a z_a,$$

где $\sigma_a \sigma_a = 0$;

$$u = c_1 \int \exp \frac{1}{t} dt + b\beta_0 x_0, \qquad t = \left[\lambda b \beta_0 \sqrt{x_a x_a}\right]^{-1}.$$

В приведенных выше решениях c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Легко проверить, что решением уравнения (0.11) будет функция

$$u = f_1(\alpha_a x_a) x_0 + f_2(\alpha_a x_a), \qquad \alpha_a \alpha_a = 0,$$

где f_1, f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции.

§ 3. Инварианты расширенной группы Галилея

В данным параграфе построены инварианты $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ расширенной группы Галилея $\tilde{G}(1,3) = \{G(1,3), D(1)\}$, т.е. группы Галилея, дополненной группой масштабных преобразований $D(1)$. Эти инварианты используются в последующих параграфах для построения точных решений уравнений Гамильтона–Якоби и трехмерных уравнений газовой динамики.

Инфинитезимальные преобразования группы $\tilde{G}(1,3)$ имеют следующий вид:

$$x'_\mu = x_\mu + \varepsilon\xi^\mu(x) + o\left(\varepsilon^2\right),$$
$$\xi^\mu(x) = c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu,$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ, $\mu,\nu = \overline{0,3}$ — постоянные параметр группы $\tilde{G}(1,3)$, причем $c_{0a} = 0$, $c_{00} = 2c_{11} = 2c_{22} = 2c_{33}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a = \overline{1,3}$.

Процесс интегрирования уравнений Лагранжа для получения явных выражений для $\omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ мы опускаем. Приведем только окончательный результат.

В зависимости от соотношений между параметрами $c_{\mu\nu}$ и d_μ группы $\tilde{G}(1,3)$ будем иметь несколько случаев:

$$\begin{aligned} 1.\quad & \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a x_a - \beta_a A_a(y_0) + \gamma_a B_a(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \\ & \omega_3 = \frac{\gamma_a x_a - \gamma_a A_a(y_0) - \beta_a B_a(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $A_a(y_0) = c(\delta_a y_0 - \sigma_a)$, $B_a(y_0) = \alpha(\delta_a y_0 + \sigma_a)$, $\vec{\beta} = (\alpha\alpha_2 \cos z_0 - \alpha_1\alpha_3 \sin z_0;$ $-\alpha\alpha_1 \cos z_0 - \alpha_2\alpha_3 \sin z_0; (\alpha^2 - \alpha_3^2)\sin z_0)$, $\vec{\gamma} = \frac{\alpha\vec{\beta}}{\alpha z_0}$, $z_0 = \frac{\alpha}{2c}\ln y_0$, α_a, δ_a, σ_a, b, c — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $\beta_a\beta_a = \gamma_a\gamma_a = \beta^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\gamma_a = \beta_a\gamma_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$\begin{aligned} 2.\quad & \omega_1 = \frac{\alpha_a x_a - \alpha_a A_a^-(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a x_a - \beta_a A_a^-(y_0) + a\alpha_a A_a^+(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \\ & \omega_3 = \frac{\gamma_a x_a - \gamma_a A_a^-(y_0) + 2a\beta_a A_a^+(y_0) - 2a^2\alpha_a A_a^-(y_0)}{\sqrt{y_0}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $A_a^\pm(y_0) = \delta_a y_0 \pm \sigma_a$, $\vec{\gamma} = (-2\alpha_1 - 2\alpha_2 z_0 + \alpha_1 z_0^2; -2\alpha_2 + 2\alpha_1 z_0 + \alpha_2 z_0^2; \alpha_3 z_0^2)$, $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\gamma}}{2dz_0}$, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\beta}}{dx_0}$, $z_0 = \frac{a}{2}\ln y_0$, α_a, δ_a, σ_a, a — постоянные, $\beta_a\beta_a = \beta^2 \neq 0$, $\gamma_a\gamma_a = \gamma^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\alpha_a = \gamma_a\beta_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$3.\quad \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \frac{\beta_a z_a + b_+ y_0}{y_0^{a_+}}, \qquad \omega_3 = \frac{\gamma_a z_a - b_- y_0}{y_0^{a_-}}, \tag{3.3}$$

где α_a, β_a, b, b_+, b_-, a_+, a_- — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = -\alpha^2 \neq 0$, $\beta_a\gamma_a = \beta^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \alpha_a\gamma_a = \gamma_a\gamma_a = \beta_a\beta_a = 0$, $a = \overline{1,3}$.

$$\begin{aligned} 4.\quad & \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a + b_1 y_0}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2 = \beta_a x_a + b_2 y_0 + b_3 \ln y_0, \\ & \omega_3 = \frac{\gamma_a y_a}{y_0} + b_4 \ln y_0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где b_i, $i=\overline{1,4}$, α_a, β_a, γ_a — постоянные, $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\gamma_a\beta_a=\beta^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=\gamma_a\gamma_a=\beta_a\beta_a=0$, $a=\overline{1,3}$.

$$5.\quad \begin{aligned} &\omega_1=ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=\beta_a y_a+\gamma_a A_a(x_0),\\ &\omega_3=\gamma_a y_a+\beta_a A_a(x_0), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $A_a(x_0)=\delta_a x_0+d_a$, a, b, c, δ_a, d_a — постоянные, α_a, β_a, γ_a те же, что в формуле (3.1), $z_0=bx_0$, $a=\overline{1,3}$.

$$6.\quad \begin{aligned} &\omega_1=ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=(\beta_a y_a-\beta_a A_a(x_0))\exp bx_0,\\ &\omega_3=(\gamma_a y_a+\gamma_a A_a(x_0))\exp(-bx_0), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $A_a(x_0)=\delta_a x_0+d_a$, a, b, c, δ_a, d_a, α_a, β_a, γ_a — постоянные, $\alpha_a\alpha_a=-\alpha^2\neq 0$, $\beta_a\gamma_a=\beta^2\neq 0$, $\alpha_a\beta_a=\alpha_a\gamma_a=\beta_a\beta_a=\gamma_a\gamma_a=0$, $a=\overline{1,3}$.

$$7.\quad \omega_1=x_0-\alpha_a x_a, \qquad \omega_2=x_0-\beta_a x_a, \qquad \omega_3=x_0-\gamma_a x_a, \tag{3.7}$$

где α_a, β_a, γ_a — постоянные, $a=\overline{1,3}$.

$$8.\quad \omega_1=\frac{\alpha_a y_a}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_2=\frac{\beta_a y_a}{\sqrt{y_0}}, \qquad \omega_3=\frac{\gamma_a y_a}{\sqrt{y_0}}, \tag{3.8}$$

где α_a, β_a, γ_a — постоянные, $a=\overline{1,3}$.

В приведенных формулах $y_\nu=x_\nu+a_\nu$, $z_a=x_a+\frac{a_2}{2}$, a_ν — произвольные постоянные, $a=\overline{1,3}$, $\nu=\overline{0,3}$.

§ 4. Точные решения трехмерных уравнений газовой динамики

Уравнения, описывающие изэнтропические движения газа, имеют вид

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}+\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p=0,\\ &\rho_0+\operatorname{div}(\rho\vec{u})=0, \qquad p=f(\rho), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\vec{u}=\vec{u}(x)\equiv\{u^1(x),u^2(x),u^3(x)\}$ — скорость распространения, $\rho(x)$ — плотность, $p(x)$ — давление газа, $x=(x_0,x_1,x_2,x_3)$.

В работе [5] установлено, что если

$$p=\lambda\rho^{5/3}, \qquad \lambda=\mathrm{const}, \tag{4.2}$$

то уравнения (4.1) инвариантны относительно 16-мерной алгебры Ли, базис которой задается операторами

$$\partial_\mu, \quad J_{ab}=x_a\partial_b-x_b\partial_a+u^a\partial_{u^b}-u^b\partial_{u^a}, \quad \mu=\overline{0,3}, \tag{4.3}$$

$$G_a=x_0\partial_a+\partial_{u^a}, \tag{4.4}$$

$$D_0=2x_0\partial_0+x_a\partial_a-3\rho\partial_\rho-u^a\partial_{u^a}, \tag{4.5}$$

$$D_1=x_0\partial_0-3\rho_0\partial_\rho-u^a\partial_{u^a}, \tag{4.6}$$

$$A=x_0(x_0\partial_0+x_a\partial_a-3\rho\partial_\rho-u^a\partial_{u^a})+x_a\partial_{u^a}, \quad a\neq b, \quad a=\overline{1,3}; \tag{4.7}$$

в случае

$$p = \frac{2}{\gamma}\rho^{\gamma} \tag{4.8}$$

уравнения (4.1) инвариантны относительно 15-мерной алгебры Ли, образуемой операторами (4.3), (4.4) и (4.9), (4.10):

$$D_0 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{\gamma - 1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}, \tag{4.9}$$

$$D_1 = x_0\partial_0 - \frac{2}{\gamma - 1}\rho\partial_\rho - u^a\partial_{u^a}; \tag{4.10}$$

в случае

$$p = f(\rho), \tag{4.11}$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, уравнения (4.1) инвариантны относительно 13-мерной алгебры Ли, базисные операторы которой имеют вид (4.3), (4.4). Эта алгебра изоморфна алгебре Галилея $G(1,3)$.

Рассмотрим систему уравнений (4.1) в случае политропного газа, т.е. когда давление p задается формулой (4.8):

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda\rho^{\gamma-2}\vec{\nabla}\rho = 0, \\ &\rho_0(\vec{u}\vec{\nabla})\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Решение системы (4.12) ищем в виде

$$\begin{aligned} &u(x) = A(x)\varphi(\omega) + B(x), \\ &\rho(x) = f(x)\varphi^0(\omega), \end{aligned}$$

где $u(x)$, $\varphi(\omega)$ — вектор-столбцы, $A(x)$, $B(x)$ — известные матрицы размерности (3×3) и (3×4) соответственно, $f(x)$ — известная функция или, в векторной форме

$$\begin{aligned} &\vec{u}(x) = \vec{M}(x_0)\varphi^1(\omega) + \vec{N}(x_0)\varphi^2(\omega) + \vec{L}(x_0)\varphi^3(\omega) + \vec{B}(x_0), \\ &\rho \equiv u^0 = y_o^k\varphi^0(\omega). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Отметим, что функции $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{B}$ и постоянная k принимают различные значения в зависимости от вида инвариантов (§ 3). Приведем их вид для каждого из случаев значений инвариантов $\omega(x)$:

$$1)\quad \vec{M}(x_0) = \frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0) = \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0) = \frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0) = \vec{v},\quad k = \frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a = -b$, $\beta_a v^a = c\beta_a\delta_a - \alpha\gamma_a\delta_a$, $\gamma_a v^a = c\gamma_a\delta_a + \alpha\beta_a\delta_a$;

$$2)\quad \vec{M}(x_0) = \frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0) = \frac{\vec{\beta}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0) = \frac{\vec{\gamma}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0) = \vec{v},\quad k = \frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a = \alpha_a\beta_a$, $\beta_a v^a = \beta_a\delta_a - a\alpha_a\delta_a$, $\gamma_a v^a = \gamma_a\delta_a - 2a\beta_a\delta_a + 2a^2\alpha_a\delta_a$;

$$3)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{\beta}}{y_0^{a_+}},\quad \vec{L}(x_0)=\frac{\vec{\gamma}}{y_0^{a_-}},\quad \vec{B}(x_0)=\vec{v},\quad k=\frac{1}{1-\gamma},$$

где $\alpha_a v^a=-b$, $\beta_a v^a=-b_+$, $\gamma_a v^a=-b_-$;

$$4)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{\gamma}}{y_0},\quad \vec{L}(x_0)=\vec{\beta},$$
$$\vec{B}(x_0)=-\vec{\gamma}\frac{b_2}{\beta^2}-\vec{\beta}\frac{b_4}{\beta^2}\ln y_0,\quad k=\frac{1}{1-\gamma};$$

$$5)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{\alpha},\quad \vec{N}(x_0)=\vec{\beta},\quad \vec{L}(x_0)=\vec{\gamma},\quad \vec{B}(x_0)=-\frac{2a}{\alpha^2}x_0\vec{\alpha}+\vec{v},\quad k=0,$$

где $\alpha_a v^a=0$, $\beta_a v^a=\gamma_a\delta_a$, $\gamma_a v^a=-\beta_a\delta_a$;

$$6)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{\alpha},\quad \vec{N}(x_0)=\exp(-bx_0)\vec{\gamma},\quad \vec{L}(x_0)=\exp(bx_0)\vec{\beta},$$
$$\vec{B}(x_0)=\frac{2ax_0}{\alpha^2}\vec{\alpha}+\vec{v},\quad k=0,$$

где $\alpha_a v^a=0$, $\beta_a v^a=\beta_a\delta_a$, $\gamma_a v^a=-\gamma_a\delta_a$;

$$7)\quad \vec{M}(x_0)=\vec{e}_1,\quad \vec{N}(x_0)=\vec{e}_2,\quad \vec{L}(x_0)=\vec{e}_3,\quad \vec{B}(x_0)=0,\quad k=0,$$

где $\vec{e}_a$, $a=\overline{1,3}$ — единичные орты;

$$8)\quad \vec{M}(x_0)=\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{N}(x_0)=\frac{\vec{e}_2}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{L}(x_0)=\frac{\vec{e}_3}{\sqrt{y_0}},\quad \vec{B}(x_0)=0,\quad k=\frac{1}{1-\gamma}.$$

Подставляя (4.13) в (4.12) и используя явный вид $\omega(x)=\{\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x)\}$ (см. (3.1)–(3.8)), значения функций $\vec{M}(x_0)$, $\vec{N}(x_0)$, $\vec{L}(x_0)$, $\vec{B}(x_0)$ и постоянной k, для неизвестных функций $\varphi(\omega)\equiv(\varphi^0(\omega),\vec{\varphi}(\omega))$ получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned}
1.\quad &(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^1_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^1_2-\\
&-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^1_3-\varphi^1+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^2_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^2_2-\\
&-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^2_3-\varphi^2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^3_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^3_2-\\
&-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^3_3-\varphi^3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^0_1+\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^0_2-\\
&-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^0_3-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2(\alpha^2\varphi^1_1+\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
2.\quad &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi^1_1+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi^1_2+\\
&+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi^1_3-\varphi^1+a\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^2+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^2+\\
&\quad+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^2-\varphi^2+2a\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^3+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^3+\\
&\quad+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^3-\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^0+(a\omega_1-\omega_2+2\beta^2\varphi^2)\varphi_2^0+(2a\omega_2-\omega_3+2\alpha^2\varphi^1+\\
&\quad+2\gamma^2\varphi^3)\varphi_3^0+2(\alpha^2\varphi_3^1+\alpha^2\varphi_1^3+\beta^2\varphi_2^2+\gamma_3^3\varphi_3^3)\varphi^0-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

3.
$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^1-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^1-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^1+\varphi^1-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^2-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^2-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^2+2a_+\varphi^2-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^3-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^3-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^3+2a_-\varphi^3-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^0-2(\beta^2\varphi^3-a_+\omega_2)\varphi_2^0-2(\beta^2\varphi^2-a_-\omega_3)\varphi_3^0-\\
&\quad-2(-\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_3^2+\beta^2\varphi_2^3)\varphi^0+\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

4.
$$
\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^1-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^1-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^1+\varphi^1-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^2-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^2-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^2+2\varphi^2-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^3-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^3-\\
&\quad-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^3+\frac{2b_4}{\beta^2}-2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1+\omega_1)\varphi_1^0-2(\beta^2\varphi^2+b_3)\varphi_2^0-2(\beta^2\varphi^3-\omega_3+b_4)\varphi_3^0+\\
&\quad+\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0-2(-\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_2^2+\beta_3^3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

5.
$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^1+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^1+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^1-\frac{2a}{\alpha^2}+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^2+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^2-b\varphi^3+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_2^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^3+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^3+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^3+b\varphi^2+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_3^0=0,\\
&(\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^0+(\beta^2\varphi^2+\omega_3)\varphi_2^0+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-\omega_2)\varphi_3^0+(\alpha^2\varphi_1^1+\beta^2\varphi_2^2+\beta^2\varphi_3^3)\varphi^0=0.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

6.
$$
\begin{aligned}
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi_1^1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi_2^1+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi_3^1-2\frac{a}{\alpha^2}+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^2_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^2_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^2_3-b\varphi^2+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^3_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^3_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^3_3+b\varphi^3+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&(-\alpha^2\varphi^1+bc)\varphi^0_1+(\beta^2\varphi^2+b\omega_2)\varphi^0_2+\\
&\quad+(\beta^2\varphi^3-b\omega_3)\varphi^0_3+(-\alpha^2\varphi^1_1+\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}\tag{4.19}$$

7. $$\begin{aligned}
&(1-\vec\alpha\vec\varphi)\vec\varphi_1+(1-\vec\beta\vec\varphi)\vec\varphi_2+(1-\vec\gamma\vec\varphi)\vec\varphi_3+\\
&\quad+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}(\vec\alpha\varphi^0_1+\vec\beta\varphi^0_2+\vec\gamma\varphi^0_3)=0,\\
&(1-\vec\alpha\vec\varphi)\varphi^0_1+(1-\vec\beta\vec\varphi)\varphi^0_2+(1-\vec\gamma\vec\varphi)\varphi^0_3-\varphi^0(\vec\alpha\vec\varphi_1+\vec\beta\vec\varphi_2+\vec\gamma\vec\varphi_3)=0.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

8. $$\begin{aligned}
&(\omega_1+\vec\alpha\vec\varphi)\vec\varphi_1+(\omega_2+\vec\beta\vec\varphi)\vec\varphi_2+(\omega_3+\vec\gamma\vec\varphi)\vec\varphi_3+\\
&\quad+\frac12\vec\varphi+\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}(\vec\alpha\varphi^0_1+\vec\beta\varphi^0_2+\vec\gamma\varphi^0_3)=0,\\
&(\omega_1+\vec\alpha\vec\varphi)\varphi^0_1+(\omega_2+\vec\beta\vec\varphi)\varphi^0_2+(\omega_3+\vec\gamma\vec\varphi)\varphi^0_3+\\
&\quad+\frac{1}{\gamma-1}\varphi^0+\varphi^0(\vec\alpha\vec\varphi_1+\vec\beta\vec\varphi_2+\vec\gamma\vec\varphi_3)=0.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Отметим, что каждая из систем уравнений (4.14)–(4.21) представляет собой систему уравнений в частных производных для функций $\varphi(\omega)$ относительно переменных ω_1, ω_2, ω_3, причем число переменных $\omega(x)$ на единицу меньше, чем переменных x в уравнении (4.12). Если удается найти какое либо решение систем (4.14)–(4.21), то тем самым по формуле (4.13) имеем решение уравнений (4.12).

Рассмотрим уравнения (4.14) в предположении, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}=0$, т.е. $\varphi=\varphi(\omega_2,\omega_3)$. Для функций φ получим уравнения в пространстве двух независимых переменных $\omega=(\omega_2,\omega_3)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^1_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^1_3-\varphi_1=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^2_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^2_3-\\
&\qquad-\varphi^2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_2=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^3_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^3_3-\\
&\qquad-\varphi^3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_3=0,\\
&\left(\frac{\alpha}{c}\omega_3-\omega_2+2\beta^2\varphi^2\right)\varphi^0_2-\left(\frac{\alpha}{c}\omega_2+\omega_3+2\beta^2\varphi^3\right)\varphi^0_3-\\
&\qquad-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2(\beta^2\varphi^2_2+\beta^2\varphi^3_3)\varphi^0=0.
\end{aligned}$$

Если же $\varphi=\varphi(\omega_1)$, то получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^1_1-\varphi_1+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1=0,\\
&(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi^2_1-\varphi_2-\frac{\alpha}{c}\varphi^3=0,
\end{aligned}$$

$$(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi_1^3-\varphi_3+\frac{\alpha}{c}\varphi^2=0,$$
$$(2\alpha^2\varphi^1-\omega_1)\varphi_1^0-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0+2\alpha^2\varphi_1^1\varphi^0=0,$$

частное решению которой при $\gamma+2$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi^1=\frac{\omega_1}{\alpha^2}, && \varphi^2=c_1\omega_1\sin\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2\omega_1\right),\\ &\varphi^3=c_1\omega_1\cos\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2\omega_1\right), && \varphi^0=c_0,\end{aligned}\tag{4.22}$$

где c_0, c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Тогда из (4.13), (4.22) и (3.1) имеем решение системы (4.12) для $\gamma=2$

$$\begin{aligned}&\rho=\frac{c_0}{y_0},\\ &\vec{u}=\frac{M(x)}{\sqrt{y_0}}\left[\frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}+\vec{\beta}c_1\sin\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2M(x)\right)+\vec{\gamma}c_1\cos\left(\frac{\alpha}{c}\ln c_2M(x)\right)\right]+\vec{v},\end{aligned}\tag{4.23}$$

где

$$M(x)=\frac{\alpha_a y_a+by_0}{\sqrt{y_0}}.$$

Из (4.15), предполагая $\varphi=\varphi(\omega_1)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^1-\varphi^1+a\varphi^2+2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi_1^0=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^2-\varphi^2+2a\varphi^3=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^3-\varphi^3=0,\\ &(2\alpha^2\varphi^3-\omega_1)\varphi_1^0+2\alpha^2\varphi_1^3-\frac{2}{\gamma-1}\varphi^0=0.\end{aligned}$$

Частное решение этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}&\varphi^0=c_0\omega_1^{2/(\gamma-1)}\exp(-2\omega_1),\\ &\varphi^1=\frac{a\omega_1}{\alpha^2}(\omega_1+c_2)^2+\frac{2\lambda c_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}\omega_1\exp(-2(\gamma-1)\omega_1)+c_1\omega_1,\\ &\varphi^2=-\frac{2a}{\alpha^2}\omega_1(\omega_1+c_2),\\ &\varphi^3=\frac{\omega_1}{\alpha^2},\end{aligned}\tag{4.24}$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Тогда из (4.13), (4.24) и (3.2) имеем решение уравнений (4.12) для любых значений γ:

$$\begin{aligned}&\rho=y_0^{1/(1-\gamma)}(B(x)^{2/(\gamma-1)}\exp(-2B(x)),\\ &\vec{u}=\frac{B(x)}{\sqrt{y_0}}\left\{\vec{\alpha}\left[\frac{a^2}{\alpha^2}(B(x)+c_2)^2+\frac{2\lambda c_0^{\gamma-1}}{\gamma-1}\exp(-2(\gamma-1)B(x))+c_1\right]-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{2a}{\alpha^2}\vec{\beta}(B(x)+c_2)+\frac{\vec{\gamma}}{\alpha^2}\right\}+\vec{v},\qquad B(x)=\frac{\alpha_a x_a-\alpha_a A_a^-(x_0)}{\sqrt{y_0}}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Рассмотрим теперь уравнение (4.17). Его удалось решить в случае $\varphi = \varphi(\omega_1)$, т.е. найти частное решение следующей системы:

$$(2\alpha^2\varphi^1 + \omega_1)\varphi^1_1 + \varphi^1 - 2\lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1 = 0,$$
$$(2\alpha^2\varphi^1 + \omega_1)\varphi^2_1 + 2\varphi^2 = 0,$$
$$(2\alpha^2\varphi^1 + \omega_1)\varphi^3_1 + \frac{2b_4}{\beta^2} = 0,$$
$$(2\alpha^2\varphi^1 + \omega_1)\varphi^0_1 + \frac{2}{\gamma-1}\varphi^0 + 2\alpha^2\varphi^1_1\varphi^0 = 0$$

для $\gamma = 2$ и $b_4 = 0$:

$$\varphi^0 = \frac{\omega_1^2 + c_0}{-8\alpha^2\lambda}, \qquad \varphi^1 = \frac{\omega_1}{2\alpha^2}, \qquad \varphi^2 = 0, \qquad \varphi^3 = F(\omega_1), \tag{4.26}$$

где c_0 — постоянная интегрированния, F — произвольная дифференцируемая функция.

Из (4.13), (4.26) и (3.4) получаем решение уравнений (4.12), содержащее произвольную функцию:

$$\rho = \frac{(\alpha_a y_a + b_1 y_0)^2}{8\alpha^2\lambda y_0^2},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2}\frac{\alpha_a y_a - b_1 y_0}{y_0} + \vec{\beta}F\left(\frac{\alpha_a y_a + b_1 y_0}{\sqrt{y_0}}\right), \tag{4.27}$$

где $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \beta_a\beta_a = 0$.

Если в уравнениях (4.18) $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$, то для определения функций φ получим уравнения

$$(\alpha^2\varphi^1 + bc)\varphi^1_1 - \frac{2a}{\alpha^2} + \lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\varphi^0_1 = 0,$$
$$(\alpha^2\varphi^1 + bc)\varphi^2_1 - b\varphi^3 = 0,$$
$$(\alpha^2\varphi^1 + bc)\varphi^3_1 + b\varphi^2 = 0,$$
$$(\alpha^2\varphi^1 + bc)\varphi^0_1 + \alpha^2\varphi^1_1\varphi^0 = 0,$$

общее решение которых для $\gamma = -1$ составляют функции

$$\varphi^0 = \sqrt{\frac{c_0^2 - \alpha^2\lambda}{4a(\omega_1 + c_1)}}, \qquad \varphi^1 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{c_0}{\varphi^0} - bc\right),$$
$$\varphi^2 = c_2\sin\left[\frac{2b}{c_0}(\omega_1 + c_1)\varphi^0 + c_3\right], \qquad \varphi^3 = c_2\cos\left[\frac{2b}{c_0}(\omega_1 + c_1)\varphi^0 + c_3\right], \tag{4.28}$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Из (4.13), (4.28) и (3.5) имеем решение уравнений (4.12) для $\gamma = -1$:

$$\rho = A(x),$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}\left(\frac{c_0}{A(x)} - 2ax_0 - bc\right) + \vec{\beta}c_2\sin\left[\frac{2b}{c_0}(\alpha_a x_a + ax_0^2 + bcx_0 + \right.$$
$$\left. + c_1)A(x) + c_3\right] + \vec{\gamma}c_2\cos\left[\frac{2b}{c_0}(\alpha_a x_a + ax_0^2 + bcx_0 + c_1)A(x) + c_3\right] + \vec{v}, \tag{4.29}$$

где

$$A(x) = \sqrt{\frac{c_0^2 - \alpha^2\lambda}{4a(\alpha_a x_a + a x_0^2 + b c x_0 + c_1)}}.$$

Рассмотрим уравнение (4.21) в предположении, что $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_3} = 0$. Для функций φ получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$(\omega_1 - \vec{\alpha}\vec{\varphi})\vec{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\vec{\varphi} + \lambda(\varphi^0)^{\gamma-2}\vec{\alpha}\varphi_1^0 = 0,$$
$$(\omega_1 - \vec{\alpha}\vec{\varphi})\varphi_1^0 + \frac{1}{\gamma-1}\varphi^0 + \vec{\alpha}\vec{\varphi}_1\varphi^0 = 0$$

решение которых для $\gamma = 2$ имеет вид

$$\varphi^0 = c_0, \qquad \varphi^a = f^a(\omega_1), \tag{4.30}$$

где c_0 — постоянная интегрирования, f^a — произвольные дифференцируемые функции, причем $\alpha_a f^a = -\omega_1$, $a = \overline{1,3}$. Тогда из (4.13), (4.30) и (3.5) имеем решение уравнений (4.12), содержащее произвольные функции

$$\begin{aligned} &\rho = c_0, \\ &u^a = f^a(x_0 - \alpha_a x_a). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Аналогичным путем можно построить точные решения уравнений (4.1) и в случае $p = f(\rho)$.

§ 5. Генерирование решений уравнений (4.12)

Приведем еще несколько решений уравнений (4.12) в случае $\gamma = 5/3$, которые мы получили, используя инвариантность данных уравнений относительно преобразований

$$\begin{aligned} &x' = \frac{x}{1-\theta x_0}, \\ &\rho' = \rho(1-\theta x_0)^3, \\ &\vec{u}\,' = \vec{u}(1-\theta x_0) + \theta\vec{x}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $x = (x_0, \vec{x})$, θ — параметр, порождаемый оператором (4.7).

Если $\rho = F(x)$, $\vec{u} = \vec{G}(x)$ какое-то решение уравнений (4.12), то решениями будут следующие функции:

$$\rho = \frac{F\left(\frac{x}{1-\theta x_0}\right)}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{G}\left(\frac{x}{1-\theta x_0}\right) - \theta\vec{x}}{1-\theta x_0}. \tag{5.2}$$

Формулы (5.2) позволяют по известным решениям уравнений (4.12) строить новые решения. Даже из очевидного решения

$$\rho = c_0, \qquad \vec{u} = \vec{c},$$

где c_μ, $\mu = \overline{1,3}$ — const, можно получить решение уравнения (4.12) зависящее от всех четырех переменных

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{c} + \theta\vec{x}}{1-\theta x_0}.$$

С использованием формул (5.2) получены следующие решения уравнений (4.12):

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3},$$
$$\vec{u} = \frac{\vec{\beta}[c_2\cos cA(x) - c_1 \sin cA(x)] + \vec{\gamma}[c_2 \sin cA(x) + c_1 \cos cA(x)]}{\alpha_a x_a + b x_0} - \frac{\theta\vec{x}+\vec{v}}{1-\theta x_0},$$

где $A(x) = \ln \frac{\alpha_a x_a + b x_0}{\sqrt{x_0(1-\theta x_0)}}$, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = \beta_a\gamma_a = \alpha_a\gamma_a = 0$, $\beta_a\beta_a = \gamma_a\gamma_a = c \neq 0$, c_0, c_1, c_2 — постоянные, $a = \overline{1,3}$;

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad u^a = \frac{f^a\left(\frac{x_0 - \alpha_a x_a}{1-\theta x_0}\right) - \theta x_a}{1-\theta x_0},$$

где f^a — произвольные дифференцируемые функции, причем $\alpha_a f^a = 1$, α_a, c_0 — постоянные, $\alpha_a\alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $a = \overline{1,3}$;

$$\rho = \frac{c_0}{(1-\theta x_0)^3}, \qquad \vec{u} = \frac{\vec{\alpha} f\left[\vec{\beta}\left(\frac{\vec{x}+\vec{v}x_0}{1-\theta x_0}\right)\right] - \theta\vec{x} - \vec{v}}{1-\theta x_0},$$

где f — произвольная дифференцируемая функция, α_a, β_a, v^a — параметры, $\alpha_a\alpha_a \neq 0$, $\alpha_a\beta_a = 0$.

§ 6. Точные решения уравнений газовой динамики в случае изохорического движения

Рассмотрим уравнение

$$\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = 0, \tag{6.1}$$

где $\vec{u} = \{u^1(x), u^2(x), u^3(x)\}$, $x = (x_0, \vec{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$.

Используя алгоритм [3], нами установлена теорема, которую из-за громоздкости реализации лиевского алгоритма приведем без доказательства.

Теорема 1. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (6.1) является бесконечномерная алгебра Ли, причем координаты инфинитезимального оператора $\xi^\mu(x,\vec{u})$ и $\eta(x,\vec{u})$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{aligned} &\eta^a = u^b\xi^a_b - u^a u^b \xi^0_b - u^a\xi^0_0 + \xi^a_0, \\ &\eta^a_0 + u^b\eta^a_b = 0, \qquad a = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где индекс внизу, как и раньше, означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Замечание. Если $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$, то из (6.2), в частности, получим результат [4].

Решения уравнений (6.1), инвариантные относительно расширенной группы Галилея, будем искать по формуле

$$\vec{u}(x) = \vec{M}(x_0)\varphi^1(\omega) + \vec{N}(x_0)\varphi^2(\omega) + \vec{L}(x_0)\varphi^3(\omega) + \vec{B}(x_0), \tag{6.3}$$

которая является частным случаем соотношения (4.13).

Так как все случаи независимых инвариантов ω и значений функций $\vec{M}(x_0)$, $\vec{N}(x_0)$, $\vec{L}(x_0)$ и $\vec{B}(x_0)$ для уравнений (6.1) совпадают со случаями 1)–8) § 3 и

§ 4, то уравнения для функций $\varphi(\omega)$ будут совпадать с (4.14)–(4.21), где нужно положить $\lambda=0$ и опустить последнее уравнение в каждой из указанных систем.

Приведем полученные нами решения уравнений (6.1):

$$\vec{u}(x)=\frac{M(x)}{2\alpha^2\sqrt{y_0}}\left[\vec{\alpha}a^2(\ln^2 c_2M(x)+c_1)-2\vec{\beta}a\ln c_2M(x)+\vec{\gamma}\right]+\vec{v}, \tag{6.4}$$

где $M(x)=\frac{\alpha_a x_a}{\sqrt{y_0}}-\sqrt{y_0}\alpha_a A_a^-(x_0)\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha_a x_a}{\sqrt{y_0}}-\sqrt{y_0}\alpha_a A_a^-(x_0)\right)^2+c_3}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ удовлетворяют условиям (3.2);

$$\vec{u}(x)=\frac{F(x)}{\sqrt{y_0}}\left(\frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2}+\vec{\beta}c_2\sin\ln(c_3F(x))^{\alpha/c}+\vec{\gamma}c_2\cos\ln(c_3F(x))^{\alpha/c}\right)+\vec{v}, \tag{6.5}$$

где $F(x)=\frac{\alpha_a y_a+by_0\pm\sqrt{(\alpha_a y_a+by_0)^2+c_1y_0}}{\sqrt{y_0}}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.1);

$$\vec{u}=\frac{\vec{\alpha}}{2\alpha^2}F(x)+c_2\vec{\beta}\,[F(x)]^{-2a}+c_2\vec{\gamma}\,[F(x)]^{-2a}+\vec{v}, \tag{6.6}$$

где $F(x)=\frac{-\alpha_a y_a-by_0\pm\sqrt{(\alpha_a y_a+by_0)^2+c_1y_0}}{y_0}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.3);

$$\vec{u}(x)=\frac{c_1\vec{\alpha}}{\sqrt{y_0}}(\varphi^3)^{1/2a_-}+c_2\vec{\beta}(\varphi^3)^{a_+/a_-}y_0^{-a_+}+\vec{\gamma}y_0^{-a_-}\varphi^3+\vec{v}, \tag{6.7}$$

где функция φ^3 определяется из уравнения $\omega_2(\varphi^3)^{a_-}+c_2(\varphi^3)^{-a_+}=\beta^2$, ω_2, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.3);

$$\begin{gathered}\vec{u}(x)=\vec{\alpha}\left(\frac{M(x)}{2\alpha^2\sqrt{y_0}}+\frac{b_1}{\alpha^2}\right)+\vec{\gamma}\left(c_2\frac{(M(x))^2}{y_0}-\frac{b_2}{\beta^2}\right)+\\+\vec{\beta}\left(\frac{2b_4}{\beta^2}\ln M(x)-\frac{b_4}{\beta^2}\ln y_0\right),\end{gathered} \tag{6.8}$$

где $M(x)=\frac{-(\alpha_a y_a+b_1y_0)\pm\sqrt{(\alpha_a y_a+by_0)^2+c_1y_0}}{\sqrt{y_0}}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ — из (3.4);

$$\vec{u}(x)=\vec{\alpha}\left(\frac{c_1\sqrt{\varphi^2}}{y_0}+\frac{b_1}{\alpha^2}\right)+\vec{\beta}\left(\frac{b_4}{\beta^2}\ln\frac{\varphi^2}{y_0}+c_3\right)+\vec{\gamma}\left(\frac{\varphi^2}{y_0}-\frac{b_2}{\beta^2}\right), \tag{6.9}$$

где функция φ^2 определяется из уравнения $b_3\ln\varphi^2+\beta^2\varphi^2=\beta_a x_a+b_2y_0+b_3\ln y_0+c_2$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ (см. (3.3));

$$\begin{gathered}\vec{u}(x)=\frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}(M(x)-2ax_0-bc)+\vec{\beta}c_2\sin\left(\frac{b}{2a}M(x)+c_3\right)+\\+\vec{\gamma}c_2\cos\left(\frac{b}{2a}M(x)+c_3\right),\end{gathered} \tag{6.10}$$

где $M(x)=\pm\sqrt{4a(ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a)+c_1}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ — из (3.4);

$$\begin{gathered}\vec{u}(x)=\frac{\vec{\alpha}}{\alpha^2}(M(x)+2ax_0-bc)+\vec{\beta}c_2\exp\left(-\frac{b}{\sqrt{a}}M(x)+bx_0\right)+\\+\vec{\gamma}c_2b\left(\frac{1}{\sqrt{a}}M(x)-x_0\right)+\vec{v},\end{gathered} \tag{6.11}$$

где $M(x)=\sqrt{ax_0^2+bcx_0+\alpha_a x_a+c_1}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{v}$ — из (3.5);

$$u^a(x) = f^a(x_0 - \alpha_b x_b), \tag{6.12}$$

где f^a — произвольные дифференцируемые функции, α_a — производные постоянные, причем $\alpha_a f^a = 1$, $a = \overline{1,3}$;

$$\vec{u}(x) = \vec{c}F(x), \qquad F(x) = \frac{y_0 c_1^2 \pm \sqrt{c_1^2 - 3\left(\frac{\alpha_a y_a}{\sqrt{y_0}}\right)^3}}{a(\alpha_a y_a)^2}. \tag{6.13}$$

Таким образом, мы получили целый класс точных решений уравнений (6.1).

Замечание. Если решения уравнения (6.1) искать в виде

$$\vec{u}(x) = \vec{x}\varphi(\omega), \tag{6.14}$$

где φ — новая неизвестная функция, то для $\omega = \vec{\alpha}\vec{x}\exp(\lambda x_0)$ и $\omega = \sqrt{\vec{x}^{\,2}}\exp(\lambda x_0)$, $\lambda = \text{const}$, оно приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции φ

$$\omega\varphi'(\varphi + \lambda) + \varphi^2 = 0,$$

интегрируя которое, получим алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{\varphi}\exp\frac{\lambda}{\varphi} = c_1\omega. \tag{6.15}$$

Таким образом, с помощью подстановки (6.14) уравнение (6.1) приводится к алгебраическому уравнению (6.15).

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть получены частные решения уравнений Эйлера и Гамильтона–Якоби [5].

1. Фущич В.И., Симметрия в задачах математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования а математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 6–28.
2. Серова М.М., Точные решения одного нелинейного уравнения второго порядка, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1981, 29–34.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнение, М., Наука, 1978, 400 с.
4. Rosen G., Ullrich G.W., Invariance group of the equation $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}$, *Siam. J. Appl. Math.*, 1973, **24**, № 3, 286–288.
5. Овсянников Л.В., Лекции по основам газовой динамики, М., Наука, 1981, 367 с.
6. Серова М.М., О некоторых классах точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп Евклида и Галилея, Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Киев, 1983, 16 с.