Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера

В.И. ФУЩИЧ, Н.И. СЕРОВ

При решении многомерной проблемы Минковского А.В. Погорелов пришел к естественному обобщению классического уравнения Монжа–Ампера (МА) для двух переменных на случай n переменных (см. [1])

$$|u_{\mu\nu}| = 0, \tag{1}$$

где $|u_{\mu\nu}|$ — определитель из вторых производных $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1$, $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Ниже будет показано, что уравнение МА обладает уникальными симметрийными свойствами, которые не присущи линейным дифференциальным уравнениям. Это свойство дает возможность, используя теоретико-алгебраические идеи [2], построить классы точных решений уравнения (1) и получить формулу "размножения" решений.

1. Симметрия уравнения МА. Методом С. Ли [3] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение (1) инвариантно относительно группы* $\{JGL(n+1, R), C(n+1)\}$*, базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид*

$$\begin{aligned} &p_A = ig^{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad L_{AB} = x_A p_B, \qquad A, B = 0, 1, \ldots, n, \\ &K_A = x_a D, \qquad D = ig^{AB} x_A \frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad x_n \equiv u, \end{aligned} \tag{2}$$

где g^{AB} *— метрический тензор в* $(n+1)$*-мерном пространстве,* $JGL(n+1, R)$ *— группа линейных неоднородных преобразований пространства* R_{n+1}*,* $C(n+1)$ *— конформная группа в* R_{n+1}*.*

Замечание 1. Уравнение (1) при $n = 1$ совпадает с уравнением Ньютона

$$u_{00} = 0, \tag{3}$$

групповые свойства которого полностью изучил еще С. Ли [6]. Алгебра (2) при $n = 1$ совпадает с 8-мерной алгеброй, построенной С. Ли для уравнения (3). Групповые свойства уравнения Монжа–Ампера для двух переменных изучены Овсянниковым [3].

2. Точные решения уравнения (1). Решения уравнения МА, следуя [2] , ищем в виде

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \tag{4}$$

Доклады академии наук СССР, 1983, **273**, № 3, С. 543–546.

где $\varphi(\omega)$ — неизвестная функция, зависящая от $n-1$ инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)\}$, а $f(x)$, $g(x)$ — некоторые заданные функции.

В том частном случае, когда $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, $\omega(x) = \omega_1(x)$, уравнение (1) редуцируется к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) для функции φ с переменными коэффициентами

$$M(\omega)\varphi'' + N(\omega)\varphi' = 0, \tag{5}$$

где $N(\omega) = |\omega_{\mu\nu}|$, а $M(\omega)$ строится из $N(\omega)$ и представляет собой сумму следующих детерминантов:

$$\begin{gathered} M(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_0 & \omega_0 & \omega_{01} & \ldots & \omega_{0\,n-1} \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_{11} & \ldots & \omega_{1\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_0 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1\,1} & \ldots & \omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \omega_{00} & \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{0\,n-1} \\ \omega_{10} & \omega_1 & \omega_1 & \ldots & \omega_{1\,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n-1\,0} & \omega_{n-1} & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_{00} & \omega_{01} & \ldots & \omega_0 & \omega_{n-1} \\ \omega_{10} & \omega_{11} & \ldots & \omega_1 & \omega_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n-1\,0} & \omega_{n-1\,1} & \ldots & \omega_{n-1} & \omega_{n-1} \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим в качестве инвариантной переменной и линейную комбинацию переменных x_μ, т.е.

$$\omega = \alpha x \equiv a_\mu x^\mu, \tag{7}$$

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ — постоянный вектор. В этом случае, как это следует из (5), получаем решение

$$u = \varphi(\omega), \qquad \omega = \alpha x, \tag{8}$$

где φ — произвольная функция из C^2. Обобщая (8), можно построить следующие решения уравнения (1):

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}), \tag{9}$$

где $\omega_k = \alpha^k_\nu x^\nu$, $\alpha^k = (\alpha^k_0, \alpha^k_1, \ldots, \alpha^k_{n-1})$ — произвольные постоянные векторы, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Рассмотрим в качестве инвариантной переменной $\omega = x^2 \equiv x_\mu x^\mu$. В этом случае

$$M(\omega) = 2^{n+1}\omega, \qquad N(\omega) = 2^n.$$

Уравнение (5) имеет вид

$$2\omega\varphi'' + \varphi' = 0, \tag{10}$$

общим решением которого является функция

$$\varphi = c_1\sqrt{\omega} + c_2. \tag{11}$$

В неявном виде решения (1) можно записать так:

$$u^2 - x^2 = 0.$$

Приведем еще несколько семейств решений уравнения (1) в явном и неявном виде:

$$u = (\alpha x)^2 - \alpha^2 x^2; \tag{12}$$

$$u = \frac{x^2}{\alpha x}, \tag{13}$$

при этом $M(\omega) \neq 0$, $N(\omega) = 0$;

$$u^2 = x_\nu x^\nu - c(\alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u)^2, \tag{14}$$

где $c, \alpha_\nu, \alpha_n = \mathrm{const}$;

$$\alpha_\nu x^\nu - \alpha_n u = \varphi(\beta_\nu x^\nu - \beta_n u), \tag{15}$$

$\varphi \in C^2$, β — произвольная постоянная.

3. Размножение решений. Линейные и нелинейные уравнения, инвариантные относительно нетривиальных групп преобразований $x' = f_1(x,u,a)$, $u' = f_2(x,u,a)$, a — параметры группы, обладают важным свойством: если $u = h(x)$ является решением уравнения (1), то новое решение уравнения (1) находится из функционального уравнения

$$f_2(x,u,a) = h(f_1(x,u,a)). \tag{16}$$

Явные формулы типа (16) для уравнений Гамильтона–Якоби, Дирака приведены в [2, 4].

Воспользовавшись формулой (16) и инвариантностью уравнения (1), например, относительно конформных преобразований

$$x'_\mu = \sigma^{-1}(x,u)x_\mu, \qquad \mu = 0,1,\ldots,n-1,$$
$$u' = \sigma^{-1}(x,u)u,$$

где

$$\sigma(x,u) = 1 + b_\mu x^\mu - b_n u,$$

получаем

$$\sigma^{-1}(x,u)u = h\left(\sigma^{-1}(x,u)x\right). \tag{17}$$

Если $b_n = 0$, то u можно явно определить:

$$u = \sigma(x)h\left(\sigma^{-1}(x)x\right), \qquad \sigma(x) = 1 + b_\mu x^\mu.$$

Из формулы (17) следует, что функции

$$u = \sigma(x,u)\varphi\left(\sigma^{-1}(x,u)\omega_1, \sigma^{-1}(x,u)\omega_2, \ldots, \sigma^{-1}(x,u)\omega_{n-1}\right),$$
$$u = \sigma^{-1}(x,u)\left\{(\alpha x)^2 - \alpha^2 x^2\right\}$$

будут решениями уравнения (1).

В заключение рассмотрим следующее нелинейное обобщение уравнения (1):

$$|u_{\mu\nu}| = F(x,u), \tag{18}$$

F — произвольная функция x, u. Оказывается, что среди множества уравнений вида (18), уравнение МА инвариантно относительно алгебры (2), т.е. справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (18) было инвариантно относительно алгебры (2), необходимо и достаточно, чтобы* $F(x,u)\equiv 0$.

Если рассмотреть подалгебру алгебры (2)

$$\begin{aligned} &p_\mu = ig^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu, \\ &K_\mu = x_\mu D, \qquad D = x_\nu p^\nu, \qquad \mu,\nu = 0,1,\ldots,n-1, \end{aligned} \tag{19}$$

то, кроме уравнения МА, инвариантного относительно алгебры (19), существует еще одно уравнение, т.е. имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (18) было инвариантно относительно алгебры (19), необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(x,u) = \lambda u^{-(n+2)}, \qquad \lambda = \mathrm{const}.$$

Если же рассмотреть подалгебру алгебры (2)

$$\begin{aligned} &p_A = ig^{AB}\frac{\partial}{\partial x_B}, \qquad J_{AB} = x_A p_B - x_B p_A, \\ &D = x_A p_A, \qquad A,B = 0,1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{20}$$

то имеет место

Теорема 4. *Максимальной алгеброй инвариантности уравнения*

$$\lambda_1\left[\Box u(1-u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right]^{(n+4)/3} + \lambda_2\left[(1-u_\nu u^\nu)|u_{\mu\nu}|\right] = 0 \tag{21}$$

при $\lambda_1\lambda_2\neq 0$ *является алгебра (20).*

Заметим, что при $\lambda_2 = 0$ (21) является многомерным аналогом уравнения Борна–Инфельда, а при $\lambda_1 = 0$ уравнение (21) распадается на два уравнения эйконала и МА.

Теоремы 2–4 доказываются методом С. Ли [3]. Вопрос о линеаризации уравнений Монжа–Ампера–Борна–Инфельда и некоторых других рассмотрен в [5].

1. Погорелов А.В., Многомерная проблема Минковского, М., 1975.
2. Фущич В.И., В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике, Киев, 1981, 5–28.
3. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.
4. Fushchych W.I., Shtelen W.M., *J. Phys. A*, 1983, **16**, № 2, 271; *Lett. Nuovo Cim.*, 1982, **34**, № 16, 498.
5. Фущич В.И., Тычинин В.А., О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований, Препринт № 33, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1982.
6. Lie S., *Math. Ann.*, 1885, **25**, № 1, 71–151.