Интегро-дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредингера и конформной группы

В.И. ФУЩИЧ, Н.А. СЕЛЕХМАН

An explicit form of integro-differential equations invariant with respect to the $G(1,n)$, $P(1,n)$, $Sch(1,n)$ and $C(1,n)$ groups is obtained.

Симметрийные свойства интегро-дифференциальных уравнений почти совершенно не изучены [1]. В работе [2] поставлена задача об описании интегро-дифференциальных уравнений вида

$$(L\varphi)(x)+\lambda\int\limits_{R^{n+1}}K(x,y,\varphi(y))\,dy=0 \tag{1}$$

инвариантных относительно групп Галилея $G(1,4)$, Пуанкаре $P(1,n)$, Шредингера $Sch(1,n)$ и конформной группы $C(1,n)$, где L — дифференциальный оператор, K — функция класса C^1 по всем переменным.

В настоящем сообщении найдены явные выражения для $K(x,y,\varphi(y))$, при которых уравнение (1) инвариантно относительно перечисленных групп.

Примем следующие обозначения и соглашения: алгебры перечисленных групп обозначаются теми же символами, что и группы; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 0 до n, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_0,y_1,\ldots,y_n)$, $z=(x-y)$, $dy=dy_0\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n$, $r^2=z_\mu z^\mu$, $p_\mu=ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu$, $\tilde p_\mu=ig_{\mu\nu}\partial/\partial y_\nu$, $\vec p^{\,2}=\sum\limits_{i=1}^n p_ip_i$ и т.д., $\supset\!\!\!+$ — символ полупрямой суммы алгебр Ли; φ^* — функция, комплексно сопряженная к φ.

Рассмотрим уравнение (1) с дифференциальным оператором Даламбера

$$\left(p_0^2-\vec p^{\,2}\right)\varphi(x)=\lambda\int\limits_{R^{n+1}}K(x,y,\varphi(y))dy. \tag{2}$$

Теорема 1. *Уравнение (2) инвариантно относительно следующих алгебр:*

1) алгебры $P(1,n)$, если $K=(r^2,\varphi)$.

2) алгебры $\tilde P(1,n)=P(1,n)\supset\!\!\!+\,D$, если

$$K=F_1\left(\varphi|r^\alpha\right)r^s\varphi^\varkappa,\qquad \alpha\varkappa=\alpha-s-n-3,$$
$$D=D_1=x_\mu p^\mu+y_\mu\tilde p^\mu+i\alpha\left(\varphi(x)\partial_{\varphi(x)}+\varphi(y)\partial_{\varphi(y)}\right)$$

или

$$K=F_2\left(\exp(\varphi)|r^\alpha\right)r^{-(n+3)},\qquad D=D_2=x_\mu p^\mu+y_\mu\tilde p^\mu+i\alpha\left(\partial_{\varphi(x)}+\partial_{\varphi(y)}\right),$$

Доклады АН УССР, 1983, № 5, С. 21–24.

α, s — произвольные действительные числа, F_1, F_2 — произвольные дифференцируемые функции.

3) алгебры $C(1,n)$, если $K = r^{-(n+3)}\varphi(y)$.

Доказательство. Изучение групповых свойств уравнения (1) методом [3] сводится к исследованию следующих дифференциальных форм:

$$\begin{aligned}&\Omega = db_0dx_1\dots dx_n + db_1dx_0dx_2\dots dx_n +\\&\quad + \dots + (-1)^{n+1}db_ndx_0dx_1\dots dx_{n-1} + \lambda K dy\wedge dx,\\&\Omega_1(x) = d\varphi(x) - b_\mu dx_\mu, \qquad \Omega_1(y) = d\varphi(y) - \tilde{b}_\mu dy_\mu,\\&\Omega_2(x) = d\Omega_1(x), \qquad \Omega_2(y) = d\Omega_1(y).\end{aligned}$$

Здесь $db_0dx_1\dots dx_n \equiv db_0\wedge dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$, $\wedge$ — знак внешнего произведения.

Условие инвариантности форм $\{\Omega,\Omega_1(x),\Omega_1(y),\Omega_2(x),\Omega_2(y)\}$ состоит в следующем:

$$\begin{aligned}&L_{X_A}\Omega_1(x) = h_1^A\Omega_1(x), \qquad L_{X_A}\Omega_1(y) = \tilde{h}_1^A\Omega_1(y),\\&L_{X_A}\Omega_2(x) = h_2^A\Omega_2(x) + \Omega_1(x)\wedge\omega^A, \quad L_{X_A}\Omega_2(y) = \tilde{h}_2^A\Omega_2(y) + \Omega_1(y)\wedge\tilde{\omega}^A,\\&L_{X_A}\Omega = h_A\Omega + \Omega_1(x)\wedge\omega_1^A + \Omega_1(y)\wedge\tilde{\omega}_1^A + \Omega_2(x)\wedge\omega_2^A + \Omega_2(y)\wedge\tilde{\omega}_2^A.\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь L_{X_A} — производная Ли вдоль поля X_A; h_A, h_1^A, $\tilde{h}_1^A$, h_2^A, $\tilde{h}_2^A$, ω^A, $\tilde{\omega}^A$, ω_1^A, $\tilde{\omega}_1^A$, ω_2^A, $\tilde{\omega}_2^A$ — неизвестные пока дифференциальные формы соответствующих степеней,

$$X_A = \xi_A^\mu\partial_{x_\mu} + \tau_A^\mu\partial_{y_\mu} + \eta_A\partial_{\varphi(x)} + \tilde{\eta}_A\partial_{\varphi(y)} + \eta_A^\mu\partial_{b_\mu} + \tilde{\eta}_A^\mu\partial_{\tilde{b}_\mu}. \tag{4}$$

Индекс A указывает алгебру, к которой принадлежит оператор X_A.

Из условия (3) следует, что функция K должна удовлетворять уравнению

$$\xi_A^\mu K_{x_\mu} + \tau_A^\mu K_{y_\mu} + \tilde{\eta}_A K_{\varphi(y)} + \partial_{y_\mu}(\tau_A^\mu)K = h_A K,$$

причем $h_{P(1,n)} = 0$, $h_{D_1} = \beta - 1$, $h_{D_2} = -2$, $h_{\tilde{C}(1,n)} = -(n+3)\alpha_\mu x^\mu$, $\tilde{C}(1,n)$ — алгебра собственно конформных операторов K_μ, $\alpha_\mu\in R^1$, $K_{x_\mu} = \partial_{x_\mu}K$, $K_\varphi = \partial_\varphi K$ и т.д.

Условия на функцию K, при которых уравнение (2) инвариантно относительно $P(1,n)$, $\tilde{P}_1(1,n)$, $\tilde{P}_2(1,n)$, $C(1,n)$ таковы:

$$\begin{aligned}&P(1,n) && c_{\mu\nu}z_\nu K_{z_\mu} = 0, \quad c_{0a} = c_{a0}, \quad c_{ab} = -c_{ba}, \quad a,b = \overline{1,n},\\&\tilde{P}_1(1,n) && (d_1z_\mu + c_{\mu\nu}z_\nu)K_{z_\mu} + d_1\beta\varphi K_\varphi = d_1(\beta - n - 3)K,\\&\tilde{P}_2(1,n) && (d_2z_\mu + c_{\mu\nu}z_\nu)K_{z_\mu} + d_2\alpha K_\varphi = -d_2(n+3)K,\\&C(1,n) && (\alpha, x+y)r\Phi_r + 2\beta(\alpha,y)\Phi_\varphi\cdot\varphi +\\& && \quad +[s(\alpha,x+y) + 2\beta\varkappa(\alpha,y) + 2(n+1)(\alpha,y) + (n+3)(\alpha,x)]\Phi = 0,\\& && K = \Phi\left(\varphi|r^\beta\right)r^s\varphi^\varkappa, \qquad \beta = -(n-1).\end{aligned}$$

Здесь $(\alpha,x) = a_\mu x^\mu$ и т.д. Легко убедиться, что решением этих уравнений являются функции, указанные в теореме. Теорема доказана.

Следствие 1. Все конформно инвариантные уравнения вида (2) являются линейными уравнениями.

Приведем далее несколько теорем, доказываемых точно так же, как и теорема 1.

Теорема 2. *Максимальной алгеброй инвариантности (в смысле С. Ли) уравнения*

$$\left(p_0^2-\vec{p}^{\,2}\right)\varphi(x)+\lambda_1\varphi^{\frac{n+3}{n-1}}+\lambda_2\int\limits_{R^{n+1}} r^{-(n+3)}\varphi(y)\,dy=0 \tag{5}$$

является алгебра $C(1,n)$. Уравнение (5) единственное $C(1,n)$-инвариантное уравнение в классе уравнений вида

$$\left(p_0^2-\vec{p}^{\,2}\right)\varphi(x)+\lambda_1F\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)+\lambda_2R\left(\varphi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\int\limits_{R^{n+1}}K(x,y,\varphi(y))\,dy=0.$$

Рассмотрим уравнение вида (1) с дифференциальным оператором Шредингера

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)=\lambda\int\limits_{R^{n+1}}K\left(x,y,\Psi(y),\Psi^*(y)\right)\,dy. \tag{6}$$

Теорема 3. *Уравнение (6) инвариантно относительно следующих алгебр:*

1) алгебры $G(1,n)$, если $K=\exp\left(\dfrac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)\Phi(z_0,\Psi\Psi^*)\Psi$;

2) алгебры $\tilde{G}(1,n)=G(1,n)\supset\!\!\!\!+\, D$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Phi_1(\Psi\Psi^*|z_0^\alpha)\Psi,$$

$$D=D_1=2x_0p_0-x_ip_i+2y_0\tilde{p}_0-y_i\tilde{p}_i+i\alpha\left(\Psi(x)\partial_{\Psi(x)}+\Psi(y)\partial_{\Psi(y)}\right),$$

$\alpha\in R^1$; Φ_1, Φ_2 — произвольные дифференцируемые функции;

3) алгебры $Sch(1,n)$, если

$$K=\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Psi(y).$$

Теорема 4. *Максимальной алгеброй симметрии (в смысле С. Ли) уравнения*

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)+\lambda_1(\Psi\Psi^*)^{2/n}\Psi(x)=\lambda_2\int\limits_{R^{n+1}}\exp\left(\frac{i\vec{z}^{\,2}}{2z_0}\right)z_0^{-(n+4)/2}\Psi(y)\,dy \tag{7}$$

является алгебра $Sch(1,n)$. Любое уравнение вида

$$\left(p_0-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2}\right)\Psi(x)+\lambda_1F(\Psi,\Psi^*,\Psi_{x_\mu})+$$
$$+\lambda_2R(\Psi,\Psi^*,\Psi_{x_\mu})\int\limits_{R^{n+1}}K\left(x,y,\Psi(y),\Psi^*(y)\right)\,dy,$$

допускающее группу $Sch(1,n)$, приводится к (7) неособой локальной заменой переменных.

Следствие 2. Уравнения вида (6), допускающие группу, являются линейными уравнениями.

Замечание. Укажем преобразования, с помощью которых можно непосредственно проверить приведенные выше утверждения. Следующие преобразования образуют группу $C(1,3)$

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + b_\mu, \\ \varphi'(x') = \varphi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x}\cos\theta - \dfrac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \dfrac{\vec{\theta}\times\vec{x}}{\theta}\sin\theta, \\ x'_0 = x_0, \qquad \varphi'(x') = \varphi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x} + \dfrac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda}\vec{x})}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda - 1) + \dfrac{\vec{\lambda}}{\lambda}x_0\operatorname{sh}\lambda, \\ x'_0 = x_0\operatorname{ch}\lambda + \dfrac{(\vec{x}\vec{\lambda})}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_\mu = e^s x_\mu, \\ \varphi'(x') = e^{-s}\varphi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_\mu = (x_\mu - \alpha_\mu(x_\nu x^\nu))/\sigma, \\ \varphi'(x') = \sigma\varphi(x), \qquad \sigma = 1 - 2\alpha_\nu x^\nu + \alpha_\nu\alpha^\nu x_\mu x^\mu. \end{cases}$$

Следующие преобразования образуют группу $Sch(1,n)$

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + b_\mu, \\ \Psi'(x') = \Psi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x}\cos\theta - \dfrac{\vec{\theta}(\vec{\theta}\vec{x})}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \dfrac{\vec{\theta}\times\vec{x}}{\theta}\sin\theta, \\ x'_0 = x_0, \qquad \Psi'(x') = \Psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{V}x_0, \qquad x'_0 = x_0, \\ \Psi'(x') = \exp\left(i(\vec{V}\vec{x}) - i\dfrac{\vec{V}^{\,2}}{2}x_0\right)\Psi(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_0 = e^{2s}x_0, \qquad \vec{x}\,' = e^s\vec{x}, \\ \Psi'(x') = e^{-3s/2}\Psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0/\omega, \qquad \vec{x}\,' = \vec{x}/\omega, \\ \Psi'(x') = \omega^{1/2}\exp\left(\dfrac{i\vec{x}^{\,2}}{2}\dfrac{a}{\omega}\right)\Psi(x), \qquad \omega = 1 - ax_0. \end{cases}$$

Здесь $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $(\vec{x}\vec{\lambda}) = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i\lambda_i$, $\theta^2 = \vec{\theta}^{\,2}$, $\lambda^2 = \vec{\lambda}^{\,2}$.

Указанные соотношения следует дополнить такими же преобразованиями для переменной y.

1. Фущич В.И., Об одном способе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений, *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, № 6, 834–838.
2. Фущич В.И., Симметрия в уравнениях математической физики, в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в мат. физике, Киев, 1981, 134–138.
3. Estabrook F.B., Harrison B.K., Geometric approach to invariance groups, *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, № 4, 653–666.