О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака *

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

Физическая природа величины подчинена ее математической форме ... Математика любит прежде всего симметрию.
Д.К.Максвелл

Д.К. Максвеллу удалось выманить у природы в результате одного лишь мышления такие тайны, которые лишь спустя целое поколение удалось показать в остроумных и трудоемких опытах.
М. Планк

Анализируются симметрийные свойства уравнений Максвелла для электромагнитного поля, а также уравнений Дирака и Кеммера–Дэффина–Петье. В рамках "нелиевского" подхода показано, что помимо хорошо известной инвариантности относительно конформной группы и преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича уравнения Максвелла обладают дополнительной симметрией относительно группы $U(2)\otimes U(2)$ и относительно 23-мерной алгебры Ли A_{23}. Преобразования дополнительной симметрии задаются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами. Исследована симметрия уравнения Дирака в классе дифференциальных и интегро-дифференциальных преобразований. Показано, что это уравнение инвариантно относительно 18-параметрической группы, включающей в качестве подгруппы группу Пуанкаре. Найдена 28-параметрическая группа инвариантности уравнения Кеммера–Дэффина–Петье. Получены конечные преобразования из конформной группы для безмассового поля с произвольным спином. Приведен явный вид конформных преобразований для электромагнитного поля, а также для полей Дирака и Вейля.

Symmetry properties of the Maxwell equation for the electromagnetic field are analysed as well as of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau one. In the frame of the non-geometrical approach it is demonstrated, that besides to the well-known invariance under the conformal group and Heaviside–Larmor–Rainich transformation, Maxwell equations possess the additional symmetry under the group $U(2)\otimes U(2)$ and under the 23-dimensional Lie algebra A_{23}. The additional symmetry transformations are realized by the non-local (integro-differential) operators. The symmetry of the Dirac equation under the differential and integro-differential transformations is investigated. It is shown, that this equation is invariant under the 18-parametrical group, which includes the Poincaré group as a subgroup. The 28-parametrical invariance group of the Kemmer–Duffin–Petiau equation is found. The finite conformal group transformations for a massless field of any spin are obtained. The explicite form of the conformal transformations for the electro magnetic field as well as for the Dirac and Weyl fields in given.

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1983, **14**, вып. 1, С. 5–57.

* Эта статья посвящена 150-летию со дня рождения Джеймса Кларка Максвелла (1831–1879).

Введение

Исследование симметрии уравнений Максвелла имеет долгую и славную историю. Именно при изучении симметрии этих уравнений Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном были получены основные формулы релятивистской механики и электродинамики, а последующее обобщение принципа релятивистской инвариантности на все законы физики сыграло поистине революционную роль в современном естествознании.

Оказалось, что классические результаты Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Бейтмена, Канингхема не исчерпывают всех свойств симметрии уравнений Максвелла. В работах [15–27] были найдены новые группы инвариантности этих уравнений, а также уравнений Дирака, Кеммера–Дэффина–Петье (КПД) и других уравнений релятивистской физики. Особенностью новых групп симметрии релятивистских уравнений является то, что они включают нелокальные (неточечные) преобразования зависимых и независимых переменных и поэтому в принципе не могут быть получены в классическом подходе Ли. Детальному анализу нелокальных симметрий посвящена [64].

В настоящей статье, являющейся в основном обзором наших работ [15–35], в рамках единого теоретико-алгебраического похода будут получены классические результаты симметрии уравнений Максвелла, а также установлены не известные до недавнего времени (1974 г. [16], 1978 г. [28, 31, 32]) симметричные свойства этих уравнений (дополнительная инвариантность относительно группы $U(2)\otimes U(2)$ и 23-мерной алгебры Ли A_{23}). Будут также проанализированы свойства симметрии уравнений Дирака и КПД и найдены в явном виде конформные преобразования для безмассовых полей с произвольным спином.

1. Прежде чем приступать к краткому изложению полученных результатов и основных идей используемого подхода, остановимся кратко на истории вопроса о симметрии уравнений Максвелла.

Современный вид уравнениям Максвелла придали Герц и Хевисайд. В 1893 г. Хевисайд [1], записав их в симметричной форме, обратил внимание на то, что они инвариантны относительно замены:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\qquad \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E},\tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей. Лармор [2] и Райнич [3] обобщили эту симметрию до семейства однопараметрических преобразований следующего вида:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}\cos\theta+\boldsymbol{H}\sin\theta,\qquad \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}\cos\theta-\boldsymbol{E}\sin\theta.\tag{2}$$

В конце прошлого века выдающимся норвежским математиком Ли были созданы математические основы науки о симметрии дифференциальных уравнений (ДУ). Не ставя перед собой общей задачи исследования групповых свойств ДУ, Лоренц [4], Пуанкаре [5, 6] и Эйнштейн [7] получили один из наиболее фундаментальных результатов в этой области, сыгравший революционную роль в физике. Именно Лоренц, который не был знаком с теорией Ли, нашел линейные преобразования координат и времени (и соответствующие преобразования для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$), оставляющие инвариантными уравнения Максвелла для электромагнитного поля в отсутствие зарядов.

Пуанкаре и независимо от него Эйнштейн показали, что и при наличии зарядов и токов уравнения Максвелла инвариантны относительно тех же преобразований, если плотности токов и зарядов преобразуются соответствующим образом. Пуанкаре впервые установил и детально изучил одно из самых важных свойств подобных преобразований — их групповую структуру. Подчеркнем, что именно на основе анализа свойств симметрии уравнений Максвелла в работах Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна были заложены основы релятивистской теории.

В 1909 г. Бейтмен [8] и Канингхем [9] доказали, что уравнения Максвелла инвариантны относительно нелинейных конформных преобразований, которые можно представить как произведение преобразований инверсии:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu/(x_\lambda x^\lambda), \qquad \mu, \lambda = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

сдвига $x'_\mu \to x''_\mu = x_\mu - d_\mu$ и вторичной инверсии $x''_\mu \to x'''_\mu = x''_\mu/(x''_\lambda x''^\lambda)$. Канингхем [9] нашел в явном виде линейные преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, которые совместно с (3) оставляют уравнения Максвелла инвариантными.

Конформные преобразования совместно с преобразованиями Лоренца и преобразованиями изменения масштаба образуют 15-параметрическую конформную группу $C(1,3)$. Как показано Бейтменом [8], эта группа является максимальной точечной группой симметрии уравнений Максвелла с токами и зарядами. Отметим, что группа конформных преобразований в 4-пространстве R_4 была изучена еще Ли [10].

В последнее двадцатилетие основные идеи и методы классического теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений получили существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников [11–14]. Сравнительно недавно алгоритм Ли–Овсянникова был применен при групповом анализе уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [13]. В результате было установлено, что максимальной локальной группой инвариантности такого уравнения является 16-параметрическая группа $C(1,3) \otimes H$, где H — однопараметрическая подгруппа преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (2).

2. В связи с изложенным выше может сложиться впечатление, что свойства симметрии уравнений Максвелла полностью изучены и нет никаких надежд получить какой-либо новый результат в этой области. На самом деле это не так, поскольку уравнения Максвелла обладают скрытой (негеометрической) симметрией, которая не связана с локальными преобразованиями координат [16, 28, 31].

Как отмечалось в [15–35], инфинитезимальный метод Ли позволяет обнаружить далеко не все симметрии, которыми обладает та или иная система ДУ. Хорошо известным примером "нелиевской" симметрии является инвариантность уравнения Шредингера для атома водорода относительно группы $O(4)$, впервые обнаруженная Фоком [36].

Чтобы уяснить себе, какие группы инвариантности ДУ могут и какие не могут быть найдены в классическом подходе Ли–Овсянникова, рассмотрим произвольное линейное дифференциальное уравнение

$$\hat{L}(x, d/dx)\Psi(x) = 0, \tag{4}$$

где $\hat{L}$ — некоторый линейный оператор, Ψ — вектор-функция с компонентами $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$, $x \in R_n$. В подходе Ли–Овсянникова инфинитезимальные операторы группы инвариантности уравнения (9) ищутся в виде дифференциальных операторов первого порядка:

$$\hat{Q}_A = \xi^\mu_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^k_A(x,\Psi)\frac{\partial}{\partial \Psi_k}, \tag{5}$$

где $\xi^\mu_A(x,\Psi)$ и $\eta^k_A(x,\Psi)$ — неизвестные функции, которые можно найти исходя из требования, чтобы операторы (5) удовлетворяли условию инвариантности уравнения (4):

$$\hat{L}\hat{Q}_A\Psi(x) = 0. \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы операторы (5) задавали базис конечномерной алгебры Ли, то функции $\xi^\mu_A(x,\Psi)$ и $\eta^k_A(x,\Psi)$ должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, которые вытекают из соотношений

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B] = if_{ABC}\hat{Q}_C, \tag{7}$$

где f_{ABC} — структурные константы. Совокупность операторов, удовлетворяющих условиям (6) и (7), будем называть алгеброй инвариантности (АИ) уравнения (4).

Очевидно, что подход Ли–Овсянникова не позволяет найти все возможные АИ заданного дифференциального уравнения, поскольку на базисные элементы АИ накладывается априорное требование принадлежности классу дифференциальных операторов первого порядка*. Из сказанного ясно, что постановку задачи об исследовании алгебраических свойств ДУ можно существенно обобщить, если расширить класс искомых операторов $\hat{Q}_A$, удовлетворяющих (6), (7). Например, можно искать алгебру инвариантности ДУ в классе дифференциальных операторов второго порядка или даже интегро-дифференциальных операторов. Именно таким путем были найдены новые АИ уравнений Дирака [15–19], Максвелла [16, 28, 31, 32] и многих других уравнений квантовой механики [15–35]. Такие алгебры инвариантности, называемые ниже *негеометрическими*, соответствуют нелокальным преобразованиям зависимых и независимых переменных и поэтому не порождают локальных групп Ли.

Не будем здесь касаться широкого круга вопросов, которые связаны с динамической симметрией физических систем, достаточно полно освещенных в литературе (см., например, [38–40]). Физическим аспектам динамической симметрии посвящена книга [41].

3. Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с негеометрическим подходом к исследованию симметрийных свойств ДУ, состоит в следующем: каким способом конструктивно вычислить операторы $\hat{Q}_A$, образующие АИ заданного дифференциального уравнения? Обобщая результаты конкретных вычислений АИ уравнений квантовой механики, можно сформулировать следующий алгоритм для нахождения явного вида таких операторов [24, 30, 33]: 1) система ДУ с помощью невырожденного преобразования приводится к каноническому диагональному виду, т.е. производится максимальное расщепление системы ДУ на независимые подсистемы; 2) находится АИ преобразованного уравнения; 3) если операторы $\hat{Q}_A$ удовлетворяют соотношениям (7), то устанавливается, какое именно представление алгебры Ли реализуют эти операторы на множестве решений исследуемого

*Следует отметить, что подход Ли–Овсянникова получил существенное-развитие в работе Ибрагимова и Андерсена с помощью преобразования Ли–Бэклувда [37].

уравнения; 4) с помощью обратного преобразования находится явный вид базисных элементов алгебры инвариантности исходного уравнения; 5) по найденному представлению АИ вычисляются конечные преобразования

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp(iQ_A\theta_A)\Psi(x), \tag{8}$$

где θ_A — параметры преобразований.

В основе сформулированного алгоритма лежит одна из самых плодотворных и эффективных идей в теории ДУ — преобразования независимых и зависимых переменных. Приведем более подробное описание первого шага этого алгоритма.

Важную роль в реализации алгоритма будет играть понятие символа оператора $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$, который можно определить с помощью преобразования Фурье (более подробно о символах см., например, в [42]):

$$\hat{L}(x, \partial/\partial x)\Psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{D(p)} L(x,p)\exp(i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p})\tilde{\Psi}(p)\, d^n p, \tag{9}$$

где $\tilde{\Psi} \in C_0^\infty(R^n)$, $\tilde{\Psi} = F\Psi(x)$ — фурье-образ $\Psi(x)$, F — унитарный оператор Фурье, отображающий вектор из гильбертова пространства H в $\tilde{H}$, $\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$, $D(p)$ — область интегрирования, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} = g^{\mu\nu}x_\mu p_\nu = g^{00}x_0p_0 + g^{11}x_1p_1 + \cdots + g^{n-1\,n-1}x_{n-1}p_{n-1}$, $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор риманова пространства R_n.

Связь между оператором $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$ и его символом $L(x,p)$ задается формулами

$$\hat{L}(x, \partial/\partial x) = F^{-1}L(x,p)F, \tag{10}$$

$$L(x,p) = F\hat{L}(x, \partial/\partial x)F^{-1}. \tag{11}$$

Формулы (10), (11) указывают путь реализации первого шага алгоритма. Действительно, если уравнение (4) таково, что символ оператора $\hat{L}(x, \partial/\partial x)$ является матрицей с переменными коэффициентами, а это имеет место для абсолютного большинства уравнений математической физики, то задача о расщеплении системы (4) на максимально возможное число незацепляющихся уравнений сводится к преобразованию матрицы $L(x,p)$ (11) к диагональной или жордановой форме. Такая диагонализация в общем случае представляет достаточно сложную проблему, но если вектор-функция $\Psi(x)$ имеет не слишком много компонент, то трудности носят чисто технический характер.

Следует сказать, что полная реализация приведенного выше алгоритма для конкретных уравнений физики и механики, как правило представляет непростую математическую задачу. Сказанное в полной мере относится и к алгоритму Ли–Овсянникова.

1. Различные формулировки уравнений Максвелла

Изложим здесь основные формулировки уравнений Максвелл для электромагнитного поля в вакууме и в присутствии токов и зарядов. Все эти формулировки математически эквивалентны, но каждая из них может оказаться наиболее удобной при решении конкретно физической задачи. Кроме того, разные формы уравнений Максвелла открывают путь к совершенно различным обобщениям этих уравнений.

Уравнения Максвелла в векторных обозначениях. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}=i\partial\boldsymbol{H}/\partial t,\qquad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}=-i\partial\boldsymbol{E}/\partial t, \tag{12а}$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H}=0, \tag{12б}$$

где $p_a=-i\partial/\partial x_a$, $a=1,2,3$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей. Мы используем систему единиц Хевисайда, в которой $\hbar=c=1$.

При наличии токов и зарядов система уравнений Максвелла принимает вид:

$$i\partial\boldsymbol{E}/\partial t=-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-ij_0, \tag{13а}$$

$$i\partial\boldsymbol{H}/\partial t=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H}=0, \tag{13б}$$

где $j=(j_0,\boldsymbol{j})$ — 4-вектор электрического тока, а константа электромагнитного взаимодействия выбрана равной единице.

Запись уравнений Максвелла в форме (12) или (13) была предложена еще Герцем и Хевисайдом. Использование векторных обозначений делает уравнения (12) и (13) достаточно компактными и изящными. Однако формулировки (12) и (13) не являются явно релятивистски-инвариантными. Глядя на формулы (12) и (13), очень непросто догадаться, что эти уравнения можно интерпретировать как уравнения для безмассовых частиц со спиральностью $\lambda=\pm1$. Наконец, уравнения в форме (12) или (13) невозможно непосредственно обобщить на случай частиц с произвольным (отличным от ±1) значением спиральности. Форма уравнений (12) и (13) не очень удобна также для исследования их свойств симметрии. Поэтому приведем ниже другие формулировки уравнений Максвелла, свободные от перечисленных недостатков.

Уравнения Максвелла в операторной форме. Для исследования свойств симметрии уравнений Максвелла удобно представить систему (12) как результат действия некоторых линейных операторов на вектор-функцию

$$\varphi(t,\boldsymbol{x})=\text{столбец }(E_1,E_2,E_3,H_1,H_2,H_3), \tag{14}$$

где E_a и H_a — компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей.

Обозначим символами S_a $(a=1,2,3)$ и σ_μ $(\mu=0,1,2,3)$ следующие матрицы:

$$\begin{gathered}
S_a=\begin{pmatrix}\hat S_a & 0\\ 0 & \hat S_a\end{pmatrix},\quad \sigma_0=\begin{pmatrix}1 & \hat 0\\ \hat 0 & 1\end{pmatrix},\\
\sigma_1=\begin{pmatrix}\hat 0 & 1\\ 1 & \hat 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=i\begin{pmatrix}\hat 0 & -1\\ 1 & \hat 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & \hat 0\\ \hat 0 & -1\end{pmatrix},\\
\hat S_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \hat S_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad \hat S_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{15}$$

где $\hat 0$ и 1 — трехрядные квадратные нулевые и единичные матрицы. Используя обозначения (15), уравнения (12а) можно записать в форме Шредингера:

$$\hat L_1\varphi(t,\boldsymbol{x})=0,\qquad \hat L_1=i\partial/\partial t+\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}. \tag{16}$$

Что же касается уравнений (12б), то их также можно записать в операторной форме

$$\hat{L}_2^a \varphi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{17}$$

где $\hat{L}_2^a$ — любой из трех операторов

$$\hat{L}_2^a = (\delta_{ab} - S_b S_a) p_b, \qquad a, b = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Здесь и далее δ_{ab} означает символ Кронекера, а по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Таким образом, уравнения (12) можно представить в форме уравнения Шредингера (16) для шестикомпонентной вещественной функции (14) и дополнительного условия (17), которое, как будет показано ниже, уменьшает число независимых компонент функции (14) до четырех. Именно формулировку (16), (17) будем в основном использовать ниже при исследовании свойств симметрии уравнений Максвелла.

Рассмотрим здесь еще одну форму уравнений (12), в которой используется трехкомпонентная комплексная вектор-функция:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 - iE_1 \\ H_2 - iE_2 \\ H_3 - iE_3 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

В обозначениях (15), (19) уравнения (12) можно переписать в следующем виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi, \qquad \hat{H} = \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{p}, \tag{20а}$$

$$(p_a - \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{p} S_a)\Psi = 0. \tag{20б}$$

Уравнение (20б), будучи записано покомпонентно, сводится к следующему условию для функции (19):

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$.

Формулировка уравнений Максвелла в виде (20а), (21) была впервые предложена Майорана (см. [43])*. Эта формулировка очень удобна для корпускулярной интерпретации уравнений (12) (см. ниже разд. 5).

Уравнения Максвелла в форме Дирака. Рассмотрим теперь другую формулировку уравнений (12), впервые полученную А.А. Боргардтом [44], а затем Ломонтом [45] и Мозесом [46]. Обозначим символами α_1, α_2 и α_3 четырехрядные матрицы следующего вида:

$$\alpha_1 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

*Такая формулировка (но в покомпонентной, а не в матричной записи) использовалась значительно ранее Бейтменом и Циммерманом [63].

а символом $\chi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентную функцию, первая компонента которой тождественно равна нулю:

$$\chi(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 - iH_1 \\ E_2 - iH_2 \\ E_3 - iH_3 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Используя обозначения (22), (23), уравнения (12) можно записать в виде:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\right)\chi = 0. \tag{24}$$

Действительно, расписывая (12) и (22)–(24) покомпонентно и принимая во внимание вещественность $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, приходим к одинаковым системам уравнений.

Матрицы α_a (22) удовлетворяют алгебре Клиффорда–Дирака

$$\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a = 2\delta_{ab}. \tag{25}$$

Следует подчеркнуть, однако, что уравнение (24) даже в случае, когда $\chi(t,\boldsymbol{x})$ — произвольная функция, неэквивалентно уравнению Дирака с $m = 0$, поэтому название *уравнения Максвелла в форме Дирака* очень условно.

Основное достоинство записи уравнений Максвелла в форме (22)–(24) состоит в том, что эта формулировка легко обобщается на случай релятивистского безмассового поля произвольного спина. Однако уравнения (22)–(24) неинвариантны относительно пространственной инверсии и, кроме того, с чисто эстетической точки зрения не очень привлекательно выглядит условие равенства нулю первой компоненты функции $\chi(t,\boldsymbol{x})$ (23).

Следуя [47, 48], приведем еще одну формулировку уравнений (12) в которой, как и в (15)–(17), используем вещественную вектор-функцию, имеющую на этот раз восемь компонент:

$$\Psi = \text{столбец}\,(H_1, H_2, H_3, \varphi_1, E_1, E_2, E_3, \varphi_2). \tag{26}$$

Уравнения (12) можно представить в виде следующей системы для функции (26):

$$\begin{aligned} &\hat{L}_1\Psi = 0, \qquad \hat{L}_1 = \gamma_\mu p^\mu, \\ &\hat{L}_2\Psi = 0, \qquad \hat{L}_2 = \gamma_\mu p^\mu S_{\sigma\nu}S^{\sigma\nu}, \end{aligned} \tag{27}$$

где γ_μ и $S_{\sigma\nu}$ — матрицы размерности 8×8

$$\begin{gathered} \gamma_0 = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = -i\begin{pmatrix} \alpha_a & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \alpha_a \end{pmatrix}, \quad S_{ab} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{ab} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{S}_{ab} \end{pmatrix}, \\ S_{0a} = i\begin{pmatrix} \tilde{0} & -\tilde{S}_{0a} \\ \tilde{S}_{0a} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ab} = -i\varepsilon_{abc}\tilde{S}_{0a} = \varepsilon_{abc}\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \hat{S}_c & & 0 \\ & - & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{28}$$

$\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ — нулевые и единичные матрицы размерности 4×4, α_a и $\hat{S}_c$ — матрицы (22), (15).

Подставляя (26), (28) в (27) и расписывая получившуюся систему покомпонентно, приходим к уравнениям (12) для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и следующим условиям для φ_1 и φ_2:

$$p_a\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_1 = p_a\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 = 0, \tag{29}$$

откуда заключаем, что φ_1 и φ_2 — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения Максвелла в форме (26)–(28) также допускают самое непосредственное обобщение на случай полей с произвольным спином [47, 48] и, в отличие от (22), (23), инвариантны относительно пространственной инверсии (см. разд. 2).

Уравнения в форме Кеммера–Дэффина–Петье. Во всех рассмотренных выше формулировках уравнения Максвелла записывали как результат действия двух (или четырех) линейных операторев на некоторую вектор-функцию. Однако систему (12) можно представить также в виде единого уравнения:

$$(\beta_\mu p^\mu + \beta\varkappa)\Psi = 0, \tag{30}$$

где β_μ — десятирядные матрицы КДП, удовлетворяющие алгебре

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\nu\lambda}\beta_\mu, \tag{31}$$

$\beta = \beta_5^2$, $\beta_5 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma/4!$, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор: $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$.

Покажем, что уравнения (12) действительно можно представить в форме (30), (31). Выбирая β_μ и Ψ в виде

$$\beta_0 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & -1 & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 1 & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \lambda_a \\ \hat{0} & \hat{0} & -\hat{S}_a & 0 \\ \hat{0} & \hat{S}_a & \hat{0} & 0 \\ -\lambda_a^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_5 = i\begin{pmatrix} \hat{0} & -1 & \hat{0} & 0 \\ 1 & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{A} \\ A_0 \end{pmatrix} = \text{столбец}\ (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, A_1, A_2, A_3, A_0),$$

где $\hat{S}_a$ — матрицы (15),

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$\hat{0}$ и 1 — нулевые и единичные матрицы размерности 3×3, $\hat{0}$ — нулевые матрицы соответствующей размерности, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &i\partial A_b/\partial t + i\partial A_0/\partial x_b = -i\varkappa E_b, \qquad \varkappa\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \\ &i\partial\boldsymbol{E}/\partial t = -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

из которой непосредственно следуют уравнения (12) для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Запись уравнений Максвелла в форме (30), (31) была впервые предложена, по-видимому, Ф.И. Федоровым ([49], а также см. [50, 51]).

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла с токами и зарядами (13) и покажем, что их можно записать в виде системы двух уравнении типа (30). Обозначим символом $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ десятикомпонентную функцию следующего вида:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{j} \\ j_0 \end{pmatrix} = \text{столбец } (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3, j_1, j_2, j_3, j_0). \tag{35}$$

Тогда уравнения (13) можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} &\hat{L}_1\tilde{\Psi} = 0, \qquad \hat{L}_1 = (1-\beta_5^2)(\beta_\mu p^\mu + 1), \\ &\hat{L}_2\tilde{\Psi} = 0, \qquad \hat{L}_2 = \beta_\mu p^\mu \beta_5, \end{aligned} \tag{36}$$

где β_μ и β_5 — матрицы (32). Подставив (32), (35) в (36), приходим к уравнениям (13).

Формулировка уравнений Максвелла в виде (35), (36) во многих отношениях более удобна, чем общепринятая запись этих уравнений в векторной форме (13). В частности, уравнения (36) явно инвариантны относительно группы Пуанкаре (см. разд. 2).

Отметим еще, что систему уравнений (13) можно записать также в виде единого уравнения типа (30), где β_μ — матрицы размерности 16×16, удовлетворяющие алгебре (29). Такие матрицы можно выбрать в форме [52]:

$$\beta_\mu = (\gamma_\mu^1 + \gamma_\mu^2)/2, \tag{37}$$

где $\{\gamma_\mu^1\}$ и $\{\gamma_\mu^2\}$ — два взаимно коммутирующих набора матриц Дирака

$$\gamma_\mu^\alpha\gamma_\nu^\alpha + \gamma_\nu^\alpha\gamma_\mu^\alpha = 2g_{\mu\nu}, \qquad [\gamma_\mu^1, \gamma_\nu^2] = 0, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Если теперь матрицу β в (30) выбрать в виде

$$\beta = \beta_5^2 + (1 + \gamma_\mu^1\gamma_\mu^2)(\gamma_5^1 - \gamma_5^2)/4\varkappa, \tag{38}$$

то уравнения (30), (37), (38) эквивалентны системе уравнений Максвелла с токами и зарядами (13).

Существуют и другие формулировки уравнений Максвелла (например, с использованием 4-потенциала A_μ), на которых не будем здесь останавливаться.

2. Релятивистская и конформная инвариантность уравнений Максвелла

Опишем здесь алгебру инвариантности уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка и найдем в явном виде конечные преобразования. Получим также явный вид конформных преобразований для безмассового поля с произвольным спином.

Определение алгебры инвариантности. Приступим к исследованию свойств симметрии уравнений Максвелла. Будем исходить из формулировки этих уравнений, задаваемой соотношениями (36). Рассмотрим также несколько более общую систему, задаваемую уравнениями (31), (36), где $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ — произвольная комплексная функция; β_μ — произвольные (не обязательно совпадающие с (32)) десятирядные матрицы, удовлетворяющие алгебре КДП.

Обозначим $\{Q_A\}$ $(A = 1, 2, \ldots, N,\ N < \infty)$ некоторую совокупность линейных операторов, определенных на множестве, всюду плотном в пространстве десятикомпонентных квадратично интегрируемых функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ и образующих конечномерную алгебру Ли.

Определение 1. *Уравнения (36) инвариантны относительно алгебры $\{Q_A\}$, если операторы Q_A удовлетворяют условиям:*

$$\begin{aligned}
&[\hat{L}_1, Q_A] = f_A^1 \hat{L}_1 + g_A^1 \hat{L}_2,\\
&[\hat{L}_2, Q_A] = f_A^2 \hat{L}_1 + g_A^2 \hat{L}_2,
\end{aligned} \tag{39}$$

где f_A^1, g_A^1, f_A^2, g_A^2 — некоторые операторы, определенные на множестве решений уравнений (36), а символ $[A,B]$ означает коммутатор: $[A,B] = AB - BA$.

Действительно, если выполняется (39), то преобразование $\Psi \to Q_A\Psi$ переводит решение уравнения (23) в другое его решение.

Таким образом, задача описания алгебры инвариантности уравнений Максвелла сводится к нахождению возможно более широкого класса операторов Q_A, удовлетворяющих условиям (39). Отметим, что в определении 1 не содержится никаких требований относительно общего вида операторов Q_A — это могут быть, например, дифференциальные операторы, включающие производные выше первого порядка и даже интегро-дифференциальные операторы. В этом состоит принципиальное отличие нашей постановки задачи от классического подхода Ли–Овсянникова, в котором инфинитезимальные операторы группы инвариантности дифференциального уравнения, образующие, очевидно, АИ данного уравнения, всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

Алгебра инвариантности уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка. Рассмотрим задачу о нахождении АИ уравнений (36) в классе дифференциальных операторов первого порядка, которая состоит в определении всех возможных операторов вида

$$Q_A = B_A(t,\boldsymbol{x}) + C_A^b(t,\boldsymbol{x})\partial/\partial x_b + D_A(t,\boldsymbol{x})\partial/\partial t, \tag{40}$$

удовлетворяющих условиям (39) и образующих конечномерную алгебру Ли. В формуле (40) $C_A^b(t,\boldsymbol{x})$ и $D_A(t,\boldsymbol{x})$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $B_A(t,\boldsymbol{x})$ — матрицы размерности 10×10, матричные элементы которых также бесконечно дифференцируемы.

Теорема 1. *Алгебра инвариантности уравнений (36) в классе дифференциальных операторов первого порядка — 15-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются формулами:*

$$\begin{aligned}
&P_\mu = p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial x_\nu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},\\
&D = x_\mu p^\mu + ik, \qquad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2S_{\mu\nu}x^\nu,
\end{aligned} \tag{41}$$

где

$$S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \qquad k = \beta_\mu\beta^\mu = 3 - \beta_5^2. \tag{42}$$

Доказательство. Используя соотношения

$$\beta_5^2 = \beta_5, \qquad (1-\beta_5^2)\beta_\mu = \beta_\mu\beta_5^2, \tag{43}$$

которые вытекают из алгебры (31), непосредственной проверкой убеждаемся, что операторы (36) и (41) удовлетворяют условиям

$$[P_\mu, \hat{L}_\alpha] = [J_{\mu\nu}, \hat{L}_\alpha] = [D, \hat{L}_\alpha] = [K_\mu, \hat{L}_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{44}$$

которые совпадают с (39) при $g_A^\alpha = f_A^\alpha \equiv 0$.

Используя (31), нетрудно убедиться, что операторы (41) образуют 15-мерную алгебру Ли, так как удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu),\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda}),\\
&[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu),\\
&[K_\mu, P_\nu] = -2i(g_{\mu\nu}D + J_{\mu\nu}), \qquad [K_\mu, K_\nu] = 0,\\
&[D, P_\mu] = -iP_\mu, \qquad [D, K_\mu] = iK_\mu, \qquad [J_{\mu\nu}, D] = 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, операторы (41) действительно образуют АИ уравнений Максвелла. Теорема доказана.

Соотношения (45) определяют алгебру Ли конформной группы $C(1,3)$. Эта алгебра содержит подалгебру Пуанкаре, образуемую операторами P_μ и $J_{\mu\nu}$ и задаваемую соотношениями (45а).

Следствие 1. Каждое из уравнений (36) в отдельности инвариантно относительно алгебры $C(1,3)$.

Это утверждение следует непосредственно из того факта, что согласно (44) оператор $\hat{L}_1$ из первого и оператор $\hat{L}_2$ из второго уравнения (36) коммутируют со всеми базисными элементами алгебры $C(1,3)$, задаваемыми формулами (41).

Следствие 2. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме инвариантны относительно алгебры $C(1,3)$.

Действительно, уравнения Максвелла без токов и зарядов, задаваемые формулами (12), можно представить в виде системы (36), на множество решений которой наложено дополнительное условие

$$\hat{L}_3\tilde{\Psi} \equiv (1-\beta_5^2)\tilde{\Psi} = 0 \tag{46}$$

(при этом матрицы β_μ должны иметь вид (32)). Но матрица $\hat{L}_3$ коммутирует с генераторами (41) и, следовательно, уравнение (46), как и (36), инвариантно относительно алгебры $C(1,3)$.

Из симметрии уравнений (36) относительно алгебры (41) следует, что эти уравнения инвариантны также относительно множества преобразований вида

$$\Psi \to \exp(iQ_A\theta_A)\Psi, \qquad A = 1, 2, \ldots, 15, \tag{47}$$

где Q_A — произвольный оператор из множества (41), θ_A — вещественные параметры. Ниже получим в явном виде все преобразования типа (47), которые образуют представление конформной группы. Как показал еще Бейтмен [8], конформная группа является максимальной локальной группой преобразований переменных $\boldsymbol{x}$ и t, оставляющих инвариантными уравнения Максвелла с токами и зарядами.

Инвариантность уравнений для электромагнитного поля в вакууме относительно алгебры $\boldsymbol{C(1,3)\oplus H}$. Выше было показано, что уравнения (36), (46) инвариантны относительно 15-мерной алгебры $C(1,3)$. Оказывается, АИ этих уравнений в классе дифференциальных операторов первого порядка можно расширить до 16-мерной алгебры Ли, как это устанавливается в следующей теореме.

Теорема 2. *Система уравнений (36), (46) инвариантна относительно 16-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (41) и (48):*

$$F=\beta_5. \tag{48}$$

Доказательство. Используя соотношения (43), получаем для $\hat{L}_1$ и $\hat{L}_2$ из (36) и $\hat{L}_3$ из (46) $[\hat{L}_1,\beta_5]=-\hat{L}_2$, $[\hat{L}_2,\beta_5]=\hat{L}_1-\hat{L}_3-\beta_5\hat{L}_2$, $[\hat{L}_3,\beta_5]=0$, откуда непосредственно следует, что оператор (41) удовлетворяет условию инвариантности уравнений (36), (46). Оператор F (48) коммутирует со всеми операторами (41). Это означает, что операторы (41), (48) образуют алгебру $C(1,3)\oplus H$, где H включает единственный элемент (48). В силу следствия 2 из теоремы 1 эта алгебра является АИ уравнений (36), (46). Теорема доказана.

Как увидим ниже, оператор (48) порождает преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича (2). В [13] показано, что алгебра $C(1,3)\oplus H$ является максимальной АИ уравнений Максвелла для электромагнитного ноля в вакууме. В разд. 3 найдем новые АИ уравнений Максвелла, базисные элементы которых являются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами.

Замечание. Все формулировки уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме рассмотрены в разд. 1 и инвариантны относительно алгебры $C(1,3)$. Базисные элементы этой АИ во всех случаях принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка и задаются формулами (41), где

$$S_{ab}=\varepsilon_{abc}S_c,\qquad S_{0a}=i\sigma_2S_a\qquad \text{для}\quad (16),\ (17); \tag{49а}$$

$$S_{ab}=\varepsilon_{abc}\hat{S}_c,\qquad S_{0a}=i\hat{S}_a\qquad \text{для}\quad (20); \tag{49б}$$

$$S_{\mu\nu}=\tilde{S}_{\mu\nu}\qquad \text{для}\quad (23),\ (24), \tag{49в}$$

и, наконец, $S_{\mu\nu}$ имеют форму (28) для (27). Здесь S_a, $\hat{S}_a$ и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — матрицы (15), (28). При этом уравнения (16), (17) и (27) инвариантны относительно более широкой алгебры $C(1,3)\oplus H$, где H включая единственный элемент F, равный σ_2 для уравнений (16), (17) и $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ для уравнений (27), в то время как для уравнений (20) и (23), (24) максимальной АИ в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка является $C(1,3)$.

Преобразования дискретной симметрии. Рассмотренные выше алгебры Ли — максимально широкие АИ уравнений Максвелла в классе дифференциальных операторов первого порядка, но не исчерпывают, как увидим ниже, всех свойств симметрии этих уравнений. Хорошо известным примером симметрии, которую не включают рассмотренные выше АИ, является инвариантность уравнений Максвелла относительно следующих дискретных преобразований

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x},\qquad t\to t,\\ &\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\to-\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{x}),\\ &\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})\to-\boldsymbol{j}(t,-\boldsymbol{x}),\qquad j_0(t,\boldsymbol{x})\to j_0(t,-\boldsymbol{x});\end{aligned} \tag{50а}$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}, \qquad t\to -t,\\
&\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{E}(-t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})\to -\boldsymbol{H}(-t,\boldsymbol{x}),\\
&\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})\to -\boldsymbol{j}(-t,\boldsymbol{x}), \qquad j_0(t,\boldsymbol{x})\to j_0(-t,\boldsymbol{x});
\end{aligned}
\tag{50б}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}, \qquad t\to t,\\
&\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})\to \boldsymbol{H}^*(t,\boldsymbol{x}),\\
&\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})\to \boldsymbol{j}^*(t,\boldsymbol{x}), \qquad j_0(t,\boldsymbol{x})\to j_0^*(t,\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{50в}
$$

Преобразования (50) называют пространственной инверсией P, обращением времени T и зарядовым сопряжением C.

Используя обозначения (32), (35), преобразования (50) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})\to P\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})=(1-2\beta_0^2)\tilde\Psi(t,-\boldsymbol{x}),\\
&\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})\to T\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})=(1+2\beta_1^2)(1+2\beta_2^2)(1+2\beta_3^2)\tilde\Psi(-t,\boldsymbol{x}),\\
&\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})\to C\tilde\Psi(t,\boldsymbol{x})=\Psi^*(t,\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Принимая во внимание соотношения (31), нетрудно убедиться, что преобразования (51) оставляют уравнения (46) инвариантными, поскольку выполняется

$$
[P,\hat L_1]=[P,\hat L_2]_+=[T,\hat L_1]_+=[T,\hat L_2]=[C,\hat L_1]=[C,\hat L_2]=0,
$$

где $\hat L_1$ и $\hat L_2$ — операторы (36), символ $[A,B]_+$ означает антикоммутатор, $[A,B]_+=AB+BA$. Операторы (51) удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям совместно с генераторами группы $C(1,3)$ (41):

$$
\begin{aligned}
&[P,P_0]=[P,P_a]_+=[P,J_{ab}]=[P,J_{0a}]_+=0,\\
&[T,P_0]_+=[T,P_a]=[T,J_{ab}]=[T,J_{0a}]_+=0,\\
&[C,P_\mu]_+=[C,J_{\mu\nu}]_+=0, \qquad [P,D]=[P,K_0]=[P,K_a]_+=0,\\
&[T,D]=[T,K_0]_+=[T,K_a]=0, \qquad [C,D]_+=[C,K_\mu]_+=0,\\
&[P,T]=[P,C]=[T,C]=0, \qquad T^2=P^2=C^2=1.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Коммутационные и антикоммутационные соотношения (52) могут служить абстрактным определением операторов P, T и C. Мы видим, что уравнения Максвелла инвариантны относительно множества операторов $\{P_\mu,J_{\mu\nu},D,K_\mu,P,T,C\}$, образующих алгебру (52), которая не является алгеброй Ли.

Явный вид преобразований из конформной группы для $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$ и j_0. Найдем теперь в явном виде представление конформной группы, которое реализуется на множестве решений уравнений Максвелла с токами и зарядами, т.е. вычислим конечные преобразования координат времени, векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и 4-вектора тока, порождаемые генераторами (41).

Представление конформной группы на множестве решений системы (36) реализуется операторами вида

$$
U=\exp(iQ_A\theta_A), \qquad A=1,2,\ldots,15,
\tag{53}
$$

где Q_A — генераторы (36), θ_A — произвольные вещественные параметры, а по повторяющемуся индексу A подразумевается суммирование от 1 до 15. Поскольку генераторы (38) образуют конечномерную алгебру Ли, то оператор (51) всегда можно представить в форме

$$U = U_5 U_4 U_3 U_2 U_1,$$

где

$$\begin{aligned} &U_1 = \exp(iP_\mu a^\mu) = \exp(ip_\mu a^\mu), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,\\ &U_2 = \exp(iJ_a\theta_a), \qquad J_a = \varepsilon_{abc}J_{bc}/2,\\ &U_3 = \exp(iJ_{0a}\lambda_a), \qquad U_4 = \exp(iD\lambda_0), \qquad U_5 = \exp(iK_\mu b^\mu), \end{aligned} \tag{54}$$

где a_μ, θ_a, λ_a, b_μ — вещественные параметры. Следовательно, для определения явного вида конечных преобразований из конформной группы достаточно задать действие операторов (54).

Преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и 4-вектора $j = (\boldsymbol{j}, j_0)$, порождаемые операторами (54), хорошо известны. Преобразования из группы Пуанкаре, генерируемые U_1, U_2 и U_3, были найдены еще Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном, преобразования дилатации, совершаемые оператором D, для произвольного поля описаны Вейлем и, наконец, собственно конформные преобразования, порождаемые операторам K_μ, были описаны Канингхемом [9]. Однако насколько нам известно, явный вид конформных преобразований для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ нигде не приведен, хотя в [53] и имеется очень сложная формула для преобразования тензора электромагнитного поля.

Здесь выпишем в явном виде преобразования из конформной группы для $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и j, а ниже приведем доказательство этих формул и установим закон преобразования для конформно-инвариантного поля произвольного спина.

Конформные преобразования для независимых переменных $\boldsymbol{x}$ и t задаются формулами:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a},\\ &t \to t' = t - a_0; \end{aligned} \tag{55а}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x}(1-\cos\theta)/\theta^2,\\ &t \to t'' = t; \end{aligned} \tag{55б}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}''' = \boldsymbol{x}\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{\lambda}t\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x})(\mathrm{ch}\,\lambda - 1)/\lambda^2,\\ &t \to t''' = t\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda; \end{aligned} \tag{55в}$$

$$x_\mu \to x_\mu^{\mathrm{IV}} = \exp(-\lambda_0)x_\mu; \tag{55г}$$

$$x_\mu \to x_\mu^{\mathrm{V}} = (x_\mu + b_\mu x_\nu x^\nu)/(1 + 2b_\nu x^\nu + b_\nu b^\nu x_\lambda x^\lambda), \tag{55д}$$

где $\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}$, $\lambda = \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right)^{1/2}$.

Преобразования (55а)–(55в) сохраняют квадратичную форму $x_0^2 - \boldsymbol{x}^2$ и образуют группу $P(1,3)$, называемую *группой Пуанкаре*. Формулы (55г), (55д) задают масштабные и собственно конформные преобразования, которые образуют совместно с (55а)–(55в) конформную группу $C(1,3)$. Операторы (54) реализуют представление этой группы на множестве решений уравнений (36) и порождают следующие преобразования функции $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$:

$$\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}'(t,\boldsymbol{x}) = U_1\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \tilde{\Psi}(t',\boldsymbol{x}'); \tag{56а}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}''(t,\boldsymbol{x}) &= U_2\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})\tilde{\Psi}(t'',\boldsymbol{x}'') = \\ &= \left[1 + i\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta}\sin\theta/\theta + (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta})^2(\cos\theta - 1)/\theta^2\right]\tilde{\Psi}(t'',\boldsymbol{x}'');\end{aligned} \tag{56б}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}'''(t,\boldsymbol{x}) &= U_3\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(iS_{0a}\lambda_a)\tilde{\Psi}(t''',\boldsymbol{x}''') = \\ &= \left[1 + iS_{0a}\lambda_a\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + (S_{0a}\lambda_a)^2(1 - \mathrm{ch}\,\lambda))/\lambda^2\right]\tilde{\Psi}(t''',\boldsymbol{x}''');\end{aligned} \tag{56в}$$

$$\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}^{\mathrm{IV}}(t,\boldsymbol{x}) = U_4\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = \exp(-k\lambda_0)\tilde{\Psi}(t^{\mathrm{IV}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{IV}}); \tag{56г}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \to \tilde{\Psi}^{\mathrm{V}}(t,\boldsymbol{x}) &= \left[\varphi\beta_5^2 + \varphi^2(1-\beta_5^2)\right]\times \\ &\times\left[\varphi + 2iS_{\mu\nu}b^\mu x^{\mathrm{V}\nu}(b_\nu x^{\mathrm{V}\nu} - 1) - 2(S_{\mu\nu}b^\mu x^{\mathrm{V}\nu})^2\right]\tilde{\Psi}(t^{\mathrm{V}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}),\end{aligned} \tag{56д}$$

где $S_a = \varepsilon_{abc}S_{bc}/2$, $\varphi = 1 - 2b^\nu x_\nu^{\mathrm{V}} + b_\nu b^\nu x_\lambda^{\mathrm{V}} x^{\mathrm{V}\lambda}$, $S_{\mu\nu}$ и k — матрицы (42). Подставляя в (56) выражения (35) для функции $\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x})$ и (32) для матриц β_μ, получаем конформные преобразования для векторов напряженности электрического и магнитного полей и 4-вектора электрического тока в виде:

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}, \qquad j_\mu \to j'_\mu = j_\mu; \tag{57а}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{E}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{E})(1-\cos\theta)/\theta^2,\\ &\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{H}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{H}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{H})(1-\cos\theta)/\theta^2,\\ &\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{j}'' = \boldsymbol{j}\cos\theta - \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{j}\sin\theta/\theta + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{j})(1-\cos\theta)/\theta^2,\\ &j_0 \to j''_0 = j_0;\end{aligned} \tag{57б}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}''' = \boldsymbol{E}\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{H}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{E})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2,\\ &\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}''' = \boldsymbol{H}\,\mathrm{ch}\,\lambda + \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{E}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{H})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2,\\ &\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{j}''' = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{\lambda}j_0\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j})(1-\mathrm{ch}\,\lambda)/\lambda^2,\\ &j_0\to j'''_0 = j_0\,\mathrm{ch}\,\lambda - \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{sh}\,\lambda/\lambda;\end{aligned} \tag{57в}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}^{\mathrm{IV}} = \exp(-2\lambda_0)\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}^{\mathrm{IV}} = \exp(-2\lambda_0)\boldsymbol{H},\\ &j_\mu\to j_\mu^{\mathrm{IV}} = \exp(-3\lambda_0)j_\mu;\end{aligned} \tag{57г}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}^{\mathrm{V}} &= \varphi\left[(b_\mu x^{\mathrm{V}\mu}-1)^2\boldsymbol{E} + (b^\mu x_\mu^{\mathrm{V}} - 1)(b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{H} + \right.\\ &+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}(x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E}) + \\ &\left.+(\boldsymbol{b}x_0^{\mathrm{V}} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E} + b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E})\right],\\ \boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H}^{\mathrm{V}} &= \varphi\left[(b_\mu x_\mu^{\mathrm{V}}-1)^2\boldsymbol{H} + (b^\mu x_\mu^{\mathrm{V}} - 1)(x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{E} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E} + \right.\\ &+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{H} + b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{E} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{E}) + \\ &\left.+(\boldsymbol{b}x_0^{\mathrm{V}} - b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}})(b_0\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\cdot\boldsymbol{H} - x_0^{\mathrm{V}}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathrm{V}}\times\boldsymbol{E})\right],\\ j_\lambda\to j_\lambda^{\mathrm{V}} &= \varphi^2\left\{\varphi j_\lambda - 2[b_\lambda(1 - 2x_\nu^{\mathrm{V}}b^\nu) + x_\lambda^{\mathrm{V}}b_\nu b^\nu]x_\mu^{\mathrm{V}}j^\mu + \right.\\ &\left.+2(x_\lambda^{\mathrm{V}} - b_\lambda x_\nu^{\mathrm{V}}x^{\mathrm{V}\nu})b_\mu j^\mu\right\}.\end{aligned} \tag{57д}$$

В формулах (57) ради краткости опущены аргументы функций $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и j_μ.

Соотношения (55), (57) задают явный вид преобразований из конформной группы для векторов напряженности электрического и магнитного полей и 4-вектора тока. Эти формулы значительно упрощаются, если ограничиться однопараметрическими преобразованиями, когда отличен от нуля только один из входящих в (57) параметров. Так, полагая в (57д) $\boldsymbol{b} = 0$, $b_0 = b$, получаем:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}^{\mathrm{V}}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\varphi}\left[(bt-1)^2\boldsymbol{E} - b^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E} + 2b(bt-1)\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{H}\right],\\
&\boldsymbol{H}^{\mathrm{V}}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\varphi}\left[(bt-1)^2\boldsymbol{H} - b^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{H} - 2b(bt-1)\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{E}\right],\\
&\boldsymbol{j}^{\mathrm{V}}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\varphi}^2\left[\tilde{\varphi}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}b^2 - 2b(1-bt)\boldsymbol{x}j_0\right],\\
&j_0^{\mathrm{V}}(\tilde{t}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \tilde{\varphi}^2\left[\tilde{\varphi}j_0 - 2b(1-bt)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{j}\right],
\end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\tilde{\varphi} = 1 - 2bt + b^2 x_\nu x^\nu, \qquad \tilde{x}_\mu = (x_\mu - b x_\nu x^\nu \delta_{\mu 0})/\tilde{\varphi}.$$

Интегрирование представлений конформной алгебры, соответствующих произвольному спину. Приведем доказательство справедливости формул (57), задающих конечные преобразования из конформной группы. Одновременно решим более общую задачу получения в явном виде группы преобразований, порождаемых генераторами (46), где $S_{\mu\nu}$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие алгебре $O(1,3)$:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\lambda}] = i(g_{\mu\lambda}S_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}S_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}S_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}S_{\mu\rho}). \tag{59}$$

Генераторы (41) имеют вид:

$$Q_A = \eta_A^\mu(x)\partial/\partial x_\mu + C_A(x), \qquad A = 1, 2, \ldots, 15, \tag{60}$$

где $\eta_A^\mu(x)$ — функции от $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $C_A(x)$ — матрицы, матричные элементы которых также могут зависеть от x. Операторы (59) порождают конечные преобразования из конформной группы вида

$$\Psi(x) \to \Psi'(x'),$$

где $\Psi(x)$ — вектор-функции, образующие линейное пространство представления группы $C(1,3)$. Явный вид этих преобразований можно получить с помощью интегрирования уравнений Ли [54]:

$$\partial x'_\mu/\partial\theta_A = \eta_A^\mu(x')x'_\mu, \qquad x'_\mu|_{\theta_A=0} = x_\mu, \tag{61}$$

$$\partial\Psi'/\partial\theta_A = C_A(x')\Psi', \qquad \Psi'|_{\theta_A=0} = \Psi, \tag{62}$$

где θ_A — параметры преобразования.

Каждая из формул (61), (62) определяет систему обыкновенных дифференциальных уравнений с заданным начальным условием, т.е. задачу Коши, имеющую единственное решение. Укажем это решение для случая, когда операторы Q_A (60) совпадают с генераторами собственно конформных преобразований K_μ (41), поскольку преобразования, порождаемые остальными генераторами конформной группы, т.е. P_μ, $J_{\mu\nu}$ и D (41), хорошо известны.

Теорема 3. *Конечные преобразования, порождаемые генераторами K_μ (41), где $S_{\mu\nu}$ — матрицы, реализующие произвольное представление алгебры $O(1,3)$ (59), k — произвольное число, задаются формулами:*

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = \hat{\varphi}^k \exp\{2iS_{\mu_0\nu}x^\nu \operatorname{arctg}[a_{\mu_0}/(b_{\mu_0}x^{\mu_0}-1)]/a_{\mu_0}\}\,\Psi(x), \tag{63}$$

$$x_\mu \to x'_\mu = (x_\mu - \delta_{\mu\mu_0}b_{\mu_0}x_\lambda x^\lambda)/(1 - 2x_{\mu_0}b^{\mu_0} + b_{\mu_0}b^{\mu_0}x_\lambda x^\lambda), \tag{64}$$

где

$$\hat{\varphi} = 1 - 2b_{\mu_0}x^{\mu_0} + g_{\mu_0\mu_0}b_{\mu_0}^2 x_\lambda x^\lambda, \qquad a_{\mu_0} = b_{\mu_0}\sqrt{x_\nu x^\nu - x_{\mu_0}x^{\mu_0}}, \tag{65}$$

индекс μ_0 принимает одно фиксированное значение, b_{μ_0} — параметр преобразования.

Доказательство. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что преобразования (63), (64) удовлетворяют уравнениям Ли (61), (62). Действительно, сравнивая генераторы K_μ (41) с (60), получаем:

$$C_\mu(x) = -2kx_\mu + 2iS_{\mu\nu}x^\nu, \qquad \eta_\mu^\nu(x) = 2x_\mu x^\nu - \delta_{\mu\nu}x_\lambda x^\lambda. \tag{66}$$

Используя (66), уравнения Ли (61), (62) для случая собственно конформных преобразований перепишем в виде:

$$dx'_\mu/db_{\mu_0} = 2x'_\mu x'^{\mu_0} - x'_\lambda x'^\lambda \delta_{\mu\mu_0}, \qquad x'_\mu|_{b_{\mu_0}=0} = x_\mu, \tag{67}$$

$$\partial\Psi'/\partial b_{\mu_0} = 2(iS_{\mu_0\nu}x'^\nu - kx'_{\mu_0}), \tag{68а}$$

$$\Psi'|_{b_{\mu_0}=0} = \Psi. \tag{68б}$$

Легко видеть, что преобразование (64) удовлетворяет уравнениям (67). Убедимся, что решение уравнений (68) задается формулой (63), Дифференцируя (63) по b_{μ_0} и принимая во внимание легко проверяемые тождества

$$\frac{d}{db_{\mu_0}}\{2iS_{\mu_0\nu}b^{\mu_0}x^\nu \operatorname{arctg}[a_{\mu_0}/(b_{\mu_0}x^{\mu_0}-1)]/a_{\mu_0}\} = 2iS_{\mu_0\nu}x^\nu,$$

$$\frac{d}{db_{\mu_0}}\hat{\varphi}^k = -2k\hat{\varphi}^k x'_{\mu_0},$$

получаем уравнение (68а). Положив в (63) $b_{\mu_0} = 0$, приходим к начальному условию (68б).

Таким образом, преобразования (63), (64) действительно удовлетворяют уравнениям и начальным условиям (67), (68) и в силу единственности решения задачи Коши задают единственное решение уравнений Ли для конформных преобразований, порождаемых генераторами K_μ (41). Теорема доказана.

Используя тот факт, что генераторы K_μ образуют абелеву подалгебру, нетрудно найти из (63), (64) общий вид собственно конформных преобразований

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = \hat{\varphi}^k\{2iS_{\mu\nu}b^\mu x^\nu \operatorname{arctg}[a/(b_\mu x^\mu - 1)]/a\}\,\Psi(x), \tag{69}$$

где

$$a = \left[b_\mu b^\mu x_\nu x^\nu - (b_\nu b^\nu)^2\right]^{1/2}, \qquad \varphi = 1 - 2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu, \tag{70}$$

x'_μ задаются формулой (55д).

Формулы (55д), (70) дают явный вид конформных преобразований для произвольного представления группы $C(1,3)$, порождаемого генераторами вида (41). Если задаться каким-либо конкретным конечномерным представлением алгебры (59), то экспоненту из (69) нетрудно представить в виде полинома по степеням матрицы $S_{\mu\nu}b^\mu x^\nu$. Для случая, когда матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид (42), формула (69) сводится к (56д). Если же матрицы $S_{\mu\nu}$ образуют представление $D(0,1/2)$ алгебры $O(1,3)$:

$$S_{ab} = \varepsilon_{abc}\sigma_c/2, \qquad S_{0a} = i\sigma_a/2,$$

где σ_a — матрицы Паули, $k = 3/2$, что соответствует представлению конформной алгебры, реализующемуся на множестве решений уравнения Вейля, то формула (69) принимает вид

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = (1-2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu)[b_\mu x^\mu - 1 + \boldsymbol{\sigma}\cdot(x_0\boldsymbol{b} - b_0\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b})]\Psi(x), \tag{71}$$

где $\Psi(x)$ — двухкомпонентный вейлевский спинор. Для множеств решений безмассового уравнения Дирака, которому соответствуют матрицы $S_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4$, где γ_μ — матрицы Дирака, получаем из (69) конформные преобразования в следующем виде:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = (1 - 2b_\mu x^\mu + b_\nu b^\nu x_\mu x^\mu)(b_\mu x^\mu - 1 + i\gamma_\mu\gamma_\nu b^\mu x^\nu)\Psi(x), \tag{72}$$

где $\Psi(x)$ — четырехкомпонентный биспинор Дирака.

Отметим, что формула (69) справедлива и в том случае, если k — не число, а произвольная матрица, коммутирующая с $S_{\mu\nu}$.

3. Негеометрическая симметрия уравнений Максвелла

Рассмотрим здесь скрытую (негеометрическую [24, 30]) симметрию уравнений Максвелла, которую нельзя обнаружить в классическом подходе Ли–Овсянникова. С помощью нелиевского метода исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений [24, 28, 30, 32] показано, что эти уравнения помимо конформно инвариантности обладают дополнительной симметрией относительно 8-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре $U(2) \otimes U(2)$, а также относительно 23-мерной алгебры A_{23}, включающей координаты $P(1,3)$ и $U(2) \otimes U(2)$.

Инвариантность относительно алгебры A_8. Рассмотрим задачу о нахождении АИ уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме в классе интегро-дифференциальных операторов. Будем исходить из формулировки этих уравнений, задаваемой соотношениями (14)–(18). Следуя первому шагу алгоритма, кратко изложенному во введении, перейдем от уравнений (16), (17) к уравнениям в импульсном пространстве:

$$L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{73а}$$

$$L_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1, \tag{73б}$$

где $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ — фурье-образ вектор-функции (14):

$$\varphi(t,\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\ \varphi(t,\boldsymbol{x})\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}), \tag{74}$$

$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$, p_1, p_2 и p_3 — независимые переменные.

Из условия вещественности функции $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ получаем, что для $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ должно выполняться:

$$\varphi^*(t,\boldsymbol{p}) = \varphi(t,-\boldsymbol{p}). \tag{75}$$

Условие инвариантности (39) в терминах операторов (73) принимает вид:

$$[L_1, Q_A] = f_A^1 L_1 + g_A^1 L_2, \qquad [L_2, Q_A] = f_A^2 L_1 + g_A^2 L_2, \tag{76}$$

где L_1, L_2 — операторы (73), Q_A — символы базисных элементов АИ исходной системы (16), (17), f_A^1, g_A^1, f_A^2, g_A^2 — матрицы размерности 6×6, в общем случае зависящие от p_μ и x_μ, $\mu = 0,1,2,3$.

Рассмотрим задачу описания всех возможных (с точностью до эквивалентности) операторов $Q_A = Q_A(\boldsymbol{p})$, удовлетворяющих условиям (76). Потребуем, чтобы эти операторы не выводили (74) из класса функций, удовлетворяющих условию (75). Это требование можно записать в виде

$$Q_A^*(\boldsymbol{p} = Q_A(-\boldsymbol{p}). \tag{77}$$

Теорема 4 [28, 31, 32]. *Уравнения Максвелла (16), (17) инвариантны относительно 8-мерной алгебры Ли A_8, базисные элементы которой принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов. Символы этих базисных элементов имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&Q_1 = \sigma_3 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D/p, \qquad Q_2 = i\sigma_2, \qquad Q_3 = -\sigma_1\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D/p, \qquad Q_4 = -\sigma_1 D,\\
&Q_5 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/p, \qquad Q_6 = -\sigma_3 D, \qquad Q_7 = I, \qquad Q_8 = i\sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}/p,
\end{aligned} \tag{78}$$

где

$$\begin{gathered}
D = \left\{\sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1-S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right] - \right.\\
\left. - pp_1p_2p_3\left[1-(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/p^2\right]\right\}\delta^{-1},\\
\delta = \left[p_1^4\left(p_2^2-p_3^2\right)^2 + p_2^4\left(p_3^2-p_1^2\right)^2 + p_3^4\left(p_1^2-p_2^2\right)^2\right]^{1/2}\Big/\sqrt{2},
\end{gathered} \tag{79}$$

σ_a и S_a — матрицы (15). Операторы (78) удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned}
&[Q_a, Q_b] = -[Q_{3+a}, Q_{3+b}] = -\varepsilon_{abc}Q_c,\\
&[Q_{3+a}, Q_b] = \varepsilon_{abc}Q_{3+c}, \qquad a,b,c = 1,2,3,\\
&[Q_7, Q_A] = [Q_8, Q_A] = 0, \qquad A = 1,2,\ldots,8,
\end{aligned} \tag{80}$$

которая изоморфна алгебре Ли группы $U(2)\otimes U(2)$.

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться непосредственной проверкой. Для этого достаточно воспользоваться тождествами:

$$\begin{aligned}
&D\sigma_a = \sigma_a D, \qquad D\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D, \qquad D(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 = Dp^2,\\
&D^2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad L_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = 0, \qquad [D, L_2] = (D + pp_1p_2p_3\delta^{-1})L_2,
\end{aligned} \tag{81}$$

из которых вытекают соотношения (76), (80). Сами же тождества (81) несложно проверить, записав матрицы D и $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ в явном виде [см. (15), (79)]:

$$
\begin{gathered}
D = D_0 + D_1, \qquad D_0 = \left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2/p^2 - 1\right] pp_1p_2p_3\delta^{-1}, \\
D_1 = \begin{pmatrix} \hat{D}_1 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{D}_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{82}
$$

где $\hat{0}$ — квадратные трехрядные нулевые матрицы:

$$
\begin{gathered}
\hat{D}_1 = \begin{pmatrix} f - 2p_2^2p_3^2 & p_1p_2p_3^2 & p_1p_2^2p_3 \\ p_1p_2p_3^2 & f - 2p_1^2p_3^2 & p_1^2p_2p_3 \\ p_1p_2^2p_3 & p_1^2p_2p_3 & f - 2p_1^2p_2^2 \end{pmatrix} \delta^{-1}, \\
f = p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2, \qquad \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p} = i\begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{83}
$$

Поскольку согласно (82), (83) $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}D_0 = D_0\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} \equiv 0$, проверка соотношений (81) сводится к перемножению матриц $\hat{D}_1$ и $\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{p}$, D, $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ и L_2. Из (78), (82) видно также, что операторы Q_A удовлетворяют (77). Теорема доказана.

Таким образом, найдена новая АИ уравнений Максвелла, базисными элементами которой являются операторы (78). Эти операторы определены на множестве векторов $\varphi(t,\boldsymbol{p})$, являющихся фурье-образами решений уравнений Максвелла (16), (17). Каждой матрице Q_A (78) можно сопоставить интегральный оператор $\hat{Q}_A$, заданный в пространстве функций $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (14):

$$
\begin{aligned}
\hat{Q}_A\varphi(t,\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\, Q_A\varphi(t,\boldsymbol{p})\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) = \\
&= (2\pi)^{-3}\int d^3p\, d^3x'\, Q_A\varphi(t,\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')].
\end{aligned} \tag{84}
$$

Интегральные операторы (84) удовлетворяют условию инвариантности уравнений (16), (17) и образуют алгебру Ли, изоморфную $U(2)\oplus U(2)$. В отличие от базисных элементов конформной алгебры эти операторы порождают нелокальные преобразования функции $\varphi(t,\boldsymbol{x})$ (14), а значит, и векторов напряженности электрического п магнитного полей. Поэтому найденную здесь АИ уравнений Максвелла в принципе нельзя получить в классическом подходе Ли–Овсянникова.

Подчеркнем, что симметрия относительно алгебры A_8 не является специфическим свойством уравнений Максвелла в форме (16), (17), но ее можно установить для любой формулировки этих уравнений. Справедливость такого утверждения демонстрируется ниже, где найдены преобразования симметрии, порождаемые алгеброй A_8, непосредственно в терминах напряженностей электрического и магнитного полей.

Конечные преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, порождаемые негеометрической АИ. Приведем другое доказательство теоремы 4, из которого следует, что найденная выше АИ уравнений Максвелла является в некотором смысле максимально широкой. Основная идея его состоит в преобразовании уравнения (73) к такой эквивалентной диагональной форме, для которой утверждения теоремы станут очевидными.

Операторы L_1 и L_2 из (73) не коммутируют друг с другом и поэтому не могут быть диагонализованы одновременно. Чтобы обойти подобную трудность, рассмотрим вместо L_2 оператор L_3:

$$L_3 = L_4 L_2 \equiv p^2 - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2, \qquad L_4 = p_1 + iS_2p_3 - iS_3p_2, \tag{85}$$

коммутирующий с L_1. Из (73б), (85) вытекает: $L_2 \equiv p^{-2}L_2L_3$. Откуда следует, что если L_3 удовлетворяет условиям

$$[L_3, Q_A] = f_A^3 L_1 + g_A^3 L_3, \tag{86}$$

то для L_2 имеют место соотношения (76), где

$$f_A^2 = L_3 f_A^3/p, \qquad g_A^2 = [Q_A, L_2/p^2]L_4 + L_2 g_A^3 L_4/p^2. \tag{87}$$

Если матрица L_2 удовлетворяет (76), то для L_3 (85) выполняется (86), а первое из соотношений (76) можно переписать в виде

$$[L_1, Q_A] = f_A^1 L_1 + \tilde{g}_A^1 L_3, \tag{88}$$

где $\tilde{g}_A^1 = g_A^1 L_2/p$. Следовательно, условия инвариантности (76) эквивалентны условиям (86), (88), накладываемым на L_1 (73а) и L_3 (85).

Для диагонализации L_1 и L_3 воспользуемся оператором

$$W = U_4U_3U_2U_1, \tag{89}$$

где

$$\begin{aligned}
&U_1 = \exp\left(-P_+ D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\pi/2\right) = P_- - P_+ D\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}},\\
&U_2 = \exp\left\{-i\varepsilon_{abc}S_a(p_b - p_c)\,\mathrm{arctg}\,[\tilde{p}/(p_1+p_2+p_3)]/2p\right\},\\
&U_3 = \exp\left[i(S_2 - S_1)\pi/4\sqrt{2}\right],\\
&U_4 = \left[1 - i(S_1S_2 + S_2S_1 + 1 - S_3^2)\right]/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{90}$$

$\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p$, $\tilde{p} = \left[(p_1-p_2)^2 + (p_2-p_3)^2 + (p_3-p_1)^2\right]^{1/2}$, $P_\pm = (1 \mp \sigma_2)/2$.

В результате несложных выкладок получаем:

$$WL_1W^\dagger = L_1' = i\partial/\partial t + \Gamma_0 p, \qquad WL_3W^\dagger = (1 - \Gamma_0^2)p^2, \tag{91}$$

где Γ_0 — диагональная матрица,

$$\Gamma_0 = -i(S_1S_2 + S_2S_1)S_3 = \mathrm{diag}\,(1, -1, 0, 1, -1, 0). \tag{92}$$

После преобразования (91) условия инвариантности (86), (88) принимают вид:

$$[L_1, Q_A'] = f_A'^1 L_1' + \tilde{g}_A^1 L_3', \qquad [L_3', Q_A'] = f_A'^3 L_1' + g_A'^3 L_3'. \tag{93}$$

Используя (91), (92), нетрудно найти общий вид матрицы $Q_A(\boldsymbol{p})$, удовлетворяющий условиям (93):

$$Q_A(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ e & 0 & 0 & f & 0 & 0\\ 0 & g & 0 & 0 & h & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{F}(p)L_3', \tag{94}$$

где $\hat{F}(p)$ — произвольная матрица размерности 6×6, элементы которой зависят от p; $a, b, \ldots, h$ — произвольные функции от p. При этом ввиду (73б), (85), (91), не умаляя общности, можно положить $\hat{F}(p) = 0$.

Таким образом, существует всего восемь линейно независимых матриц, удовлетворяющих условиям (93). Выберем эти матрицы в виде:

$$Q'_a = i\sigma_a, \qquad Q'_{3+a} = i\Gamma_0 Q'_a, \qquad Q'_7 = -1, \qquad Q'_8 = -i\Gamma_0, \tag{95}$$

где матрицы σ_a и Γ_0 задаются формулами (15), (92); 1 — единична матрица. С помощью оператора (89) получаем явный вид этих матриц на множестве решений исходной системы (73): $Q_A = W^\dagger Q'_A W$, где Q_A — операторы (78). Теорема 4 доказана.

Приведенное доказательство допускает простое обобщение на случай уравнений для безмассовых полей произвольного спина, например, при использовании формулировки таких уравнений, предложенной в [47, 48].

Из полученных результатов следует, что уравнения Максвелла (73) инвариантны относительно восьмипараметрических преобразований:

$$\varphi(t, \boldsymbol{p}) \to \varphi'(t, \boldsymbol{p}) = \exp(Q_A\theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), \tag{96}$$

где θ_A — произвольные вещественные параметры. Принимая во внимание соотношения (73), формулу (96) можно переписать в виде

$$\varphi'(t, \boldsymbol{p}) = \begin{cases} (\cos\theta_A + Q_A \sin\theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), & A = 1, 2, 3, 8, \\ (\operatorname{ch}\theta_A + Q_A \operatorname{sh}\theta_A)\varphi(t, \boldsymbol{p}), & A = 4, 5, 6, 7. \end{cases} \tag{97}$$

Подставляя в (97) явный вид операторов Q_A (78) и используя для компонент функции $\varphi(t, \boldsymbol{p})$ обозначения

$$\varphi(t, \boldsymbol{p}) = \text{столбец } (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3), \tag{98}$$

где $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ — фурье-образы компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей, получаем закон преобразования для $\tilde{E}_a$ и $\tilde{H}_a$ в форме:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a &\to \tilde{E}_a \cos\theta_1 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_1, \\ \tilde{H}_a &\to \tilde{H}_a \cos\theta_1 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_1; \end{aligned} \tag{99а}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a &\to \tilde{E}_a \cos\theta_2 + \tilde{H}_a \sin\theta_2, \\ \tilde{H}_a &\to \tilde{H}_a \cos\theta_2 - \tilde{E}_a \sin\theta_2; \end{aligned} \tag{99б}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a &\to \tilde{E}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{H}_d \sin\theta_3, \\ \tilde{H}_a &\to \tilde{H}_a \cos\theta_3 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b D_{cd}\tilde{E}_d \sin\theta_3; \end{aligned} \tag{99в}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a &\to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_4, \\ \tilde{H}_a &\to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_4 - D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_4; \end{aligned} \tag{99г}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a &\to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b \tilde{E}_c \operatorname{sh}\theta_5, \\ \tilde{H}_a &\to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_5 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b \tilde{H}_c \operatorname{sh}\theta_5; \end{aligned} \tag{99д}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \operatorname{ch}\theta_6 - D_{ab}\tilde{H}_b \operatorname{sh}\theta_6,\\&\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \operatorname{ch}\theta_6 + D_{ab}\tilde{E}_b \operatorname{sh}\theta_6;\end{aligned} \tag{99е}$$

$$\tilde{E}_a = \tilde{E}_a \exp\theta_7, \qquad \tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \exp\theta_7; \tag{99ж}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_a \to \tilde{E}_a \cos\theta_8 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{H}_c \sin\theta_8,\\&\tilde{H}_a \to \tilde{H}_a \cos\theta_8 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\tilde{E}_c \sin\theta_8.\end{aligned} \tag{99з}$$

Формулы (99б) задают преобразования Хевисайда–Лармора–Райнича [1–3]. Остальные соотношения (99), дополняющие преобразования (99б) до восьмипараметрической группы A_8, локально изоморфной $U(2)\otimes U(2)$, соответствуют нелокальным (интегральным) преобразованиям векторов $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\, \tilde{\boldsymbol{E}} \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}),\\&\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\, \tilde{\boldsymbol{H}} \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{100}$$

Преобразования (99а)–(99в), (99з) сохраняют билинейную форму

$$\mathcal{E} = \int d^3x\, \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right), \tag{101}$$

которая ассоциируется с энергией электромагнитного поля. Остальные преобразования (99г)–(99ж) не сохраняют (101). Однако существует положительно неопределенная билинейная форма, инвариантная относительно всех преобразований (99), которая имеет вид

$$\begin{aligned}(\varphi_1,\varphi_2) &= \int d^3p\, \varphi_1^\dagger(t,\boldsymbol{p})\sigma_2 D\varphi_2(t,\boldsymbol{p}) =\\&= (2\pi)^{-3}\int d^3p\, d^3x\, d^3x' \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{x})\sigma_2 D\varphi_2(t,\boldsymbol{x}') \exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')].\end{aligned} \tag{102}$$

Таким образом, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме помимо хорошо известной симметрии относительно конформной группы дополнительно инвариантны относительно восьмипараметрической группы интегральных преобразований (99). Преобразования (99) с точностью до замены $\theta_b \to i\theta_b$, $b = 4,5,6,7$ совпадают с полученными в работах [28, 31, 32]. Отметим, что симметрию уравнений (73) относительно преобразований (99) легко можно проверить непосредственно.

Инвариантность относительно 23-мерной алгебры Ли. Мы показали выше, что существует два набора операторов — $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$ (41), (49а) и $\{Q_A\}$ (78), образующих АИ уравнений Максвелл. Однако, как нетрудно убедиться, операторы (41), (49а) и (78) не образуют совместно замкнутой алгебры. Докажем здесь теорему, устанавливающую симметрию уравнений Максвелла относительно 23-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры $C(1,3)$ и A_8. Такое объединение алгебр $C(1,3)$ и A_8 удается осуществить, если базисные элементы конформной алгебры задать в классе интегральных операторов.

Теорема 5. *Уравнения (73) инвариантны относительно 23-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (78) и (103):*

$$\begin{aligned} &P_\mu = ip_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = i(x'_\mu p_\nu - x'_\nu p_\mu), \\ &D = i(x'_\mu p^\mu - i), \qquad K_\mu = i(2x'_\mu D - x'_\nu x'^\nu p_\mu), \end{aligned} \tag{103}$$

где $x'_a = W^\dagger i\frac{\partial}{\partial p_a}W$, $x'_0 = t$, W *— оператор (89).*

Доказательство. Утверждения теоремы становятся почти очевидными в представлении, где операторы L_1 (73a) и L_3 (85) имеют диагональную форму (91), (92). В таком представлении операторы (78) принимают вид (95), а для операторов (103) получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} &P'_\mu = ip_\mu, \qquad J'_{\mu\nu} = i(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu), \\ &D' = i(x_\mu p^\mu + i), \qquad K'_\mu = i(2x_\mu D' - x_\nu x^\nu p_\mu), \end{aligned} \tag{104}$$

где $x_\mu = i\frac{\partial}{\partial p_\mu}$, $B'_a = WB_aW^\dagger$, B_a произвольный оператор из (103). Прямой проверкой убеждаемся, что операторы L'_1 и L'_3 (91), (92) и генераторы (78), (104) удовлетворяют условиям инвариантности (86), (88):

$$\begin{aligned} &[L'_1, P'_\mu] = [L'_1, J'_{ab}] = [L'_1, Q'_A] = 0, \\ &[L'_1, J'_{0a}] = -ip_a p^{-2} L'_3 + ip_a p^{-1} Q'_7 L'_1, \qquad [L'_1, D'] = iL'_1, \\ &[L'_1, K'_0] = -2\left\{[x_0 + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i)Q'_7 p^{-1}]L'_1 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} - i)p^{-1}L'_3\right\}, \\ &[L'_1, K'_a] = -2\left\{(x_a + Q'_7 x_0 p_a p^{-1})L'_1 - x_0 p_a p^{-2} L'_3\right\}, \\ &[L'_3, P'_\mu] = [L'_3, J'_{ab}] = [L'_3, Q'_A] = 0, \\ &[L'_3, J'_{0a}] = -2p_a p_0 p^{-2} L'_3, \qquad [L'_3, D'] = -2L'_3, \\ &[L'_3, K'_0] = -2\left[2x_0 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})p_0 p^{-2}\right] L'_3, \\ &[L'_3, K'_a] = -2\left[2x_a + i2p_a D' p^{-1} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})p_a p^{-2}\right] L'_3. \end{aligned} \tag{105}$$

Операторы (104) принадлежат алгебре $C(1,3)$, так как они удовлетворяют коммутационным соотношениям (45). Кроме того, эти операторы коммутируют с матрицами Q'_A (95), которые, в свою очередь, образуют представление алгебры A_8 (80). Отсюда заключаем, то операторы (95), (104) образуют базис алгебры $C(1,3) \oplus A_8$. Теорема доказана.

Каждому оператору (78), (103), заданному в пространстве функций $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ (74), можно сопоставить интегральное преобразование в пространстве H функций $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ (14):

$$\varphi(t, \boldsymbol{x}) \to \varphi'(t, \boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3p\, d^3x' \exp(iG_\alpha\theta_\alpha)\varphi(t, \boldsymbol{x}) \exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')], \tag{106}$$

где G_α — один из операторов (78), (103), θ_α параметр преобразования, $\alpha = 1, 2, \ldots, 23$. Преобразования (106) оставляют инвариантными уравнения Максвелла (16), (17) и образуют представление группы $C(1,3) \oplus A_8$.

Таким образом, получили 23-параметрическую группу симметрии уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме, включающую подгруппы $C(1,3)$ и A_8. Поскольку преобразования (106) нелокальны, соответствующую группу инвариантности в принципе нельзя найти в подходе Ли–Овсянникова [11–14], в котором инфинитезимальные операторы принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка и порождают точечные преобразования.

Симметрия относительно преобразований, не изменяющих времени. Со времени создания специальной теории относительности считалось, что преобразования Лоренца (55а)–(56в) — единственные преобразования симметрии уравнений Максвелла, которые можно сопоставить переходу к новой инерциальной системе отсчета. Поэтому сама постановка вопроса о существовании таких преобразований решений уравнений Максвелла, которые образуют представление группы Пуанкаре, но не изменяют времени, может показаться довольно неожиданной. Однако на самом деле такой вопрос вполне правомерен, и на него имеется положительный ответ [16, 28, 30]. А именно, существуют преобразования вида:

$$t \to t' = t, \qquad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t, \lambda_1, \dots, \lambda_{10}), \tag{107а}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}\right), \\ \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}\right), \end{aligned} \tag{107б}$$

где λ_a — вещественные параметры, реализующие представление группы $P(1,3)$ и оставляющие инвариантность уравнения Максвелла.

В [15–17, 29] показано, что уравнение Шредингера–Клейна–Гордона–Фока и другие релятивистские уравнения помимо инвариантности относительно преобразований независимых переменных из группы Лоренца инвариантны также относительно преобразований вида (107а). Иными словами, все релятивистские уравнения обладают двойственной симметрией [29].

Здесь рассмотрим формулировку уравнений Максвелла, задаваемую соотношениями (23) и (24). Симметрия уравнений (23) и (24) также имеет двойственный характер, поскольку генераторы группы Пуанкаре (41), (49б), (28) на множестве решений этих уравнений можно представить также в виде:

$$\begin{aligned} &P_0 = H = -\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ &J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, \qquad J_{0a} = tp_a - x_a H + \tilde{S}_{0a}, \end{aligned} \tag{108}$$

где α_a и $\tilde{S}_{\mu\nu}$ — матрицы (22), (28). Операторы (108), как и (41), (49в), (28), удовлетворяют условиям инвариантности уравнений (22)–(24) и коммутационным соотношениям (45а), т.е. образуют АИ уравнений Максвелла. Однако в отличие от генераторов (41), (49в) операторы (108) коммутируют с t, т.е. порождают преобразования из группы Пуанкаре, не изменяющие времени.

Найдем в явном виде группу преобразований, порождаемую операторами (108). Формально их можно записать в виде

$$\Psi \to \Psi' = W\Psi, \qquad W = \exp(i\theta_A Q_A), \tag{109}$$

где Q_A — генераторы (108), θ_A — вещественные параметры, Ψ — вектор-функция (23).

Ограничимся случаем, когда Q_A совпадают с генераторами J_{0a} (вычисление явного вида преобразований, порождаемых остальными генераторами P_μ и J_{ab}, не представляет трудностей (ср. (56а), (56б)). Генераторы J_{0a}, , задаваемые формулами (108), нельзя представить в виде суммы коммутирующих величин, одна из которых — числовая матрица, а вторая выражается через дифференциальные операторы первого порядка. Хотя оператор

$$W = \exp(iJ_{0a}\theta_a), \qquad a = 1, 2, 3, \tag{110}$$

всегда может быть представлен в виде конечного ряда по степеням спиновых матриц, вычисление этого ряда в явном виде представляет довольно сложную задачу.

Преобразуем оператор (110) к форме, не содержащей матриц под знаком экспоненты. Воспользуемся тождеством

$$iJ_{0a}\theta_a = A_+P_+ + A_-P_-, \tag{111}$$

где

$$P_\pm = (1 \pm H/p)/2, \qquad A_\pm = i(tp_a \mp x_a p + S_{0a})\theta_a. \tag{112}$$

Операторы (112) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &P_\pm P_\pm = P_\pm, \qquad P_\pm P_\mp = P_\mp P_\pm = 0, \qquad P_\pm A_\mp P_\mp = 0,\\ &P_\mp A_\pm P_\pm = 0, \qquad A_\pm P_\pm A_\pm P_\pm = A_\pm^2 P_\pm, \end{aligned} \tag{113}$$

используя которые, нетрудно получить следующее выражение для оператора (110):

$$\begin{aligned} \exp(iJ_{0a}\theta_a) &\equiv \exp(A_+P_+ + A_-P_-) = \exp(A_+P_+)\exp(A_-P_-) = \\ &= \left(1 + A_+P_+ + \frac{1}{2!}A_+^2P_+ + \cdots\right)\left(1 + A_-P_- + \frac{1}{2!}A_-^2P_- + \cdots\right) = \\ &= [\exp(A_+)P_+ + P_-][\exp(A_-)P_- + P_+] = \exp(A_+)P_+ + \exp(A_-)P_-. \end{aligned} \tag{114}$$

Но вычисление экспонент от операторов A_+ и A_- (112) не составляет труда, поскольку $A_\pm$ состоят из двух коммутирующих слагаемых, одно из которых выражается через спиновые матрицы. Действительно:

$$\exp(A_\pm) \equiv \exp[i(tp_a \mp x_a p + S_{0a})\theta_a] = \exp[i(tp_a \mp x_a p)]\exp(iS_{0a}\theta_a), \tag{115}$$

где последнюю экспоненту можно записать в виде конечной суммы по степеням матриц $S_{0a}\theta_a$:

$$\exp(iS_{0a}\theta_a) \equiv N(\theta) = 1 + iS_{0a}\theta_a \operatorname{sh}\theta/\theta + (S_{0a}\theta_a)^2(1 - \operatorname{ch}\theta)/\theta^2, \tag{116}$$

где $\theta = \left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\right)^{1/2}$.

Подставив (115), (116) в (114), получим

$$W = \exp(iJ_{0a}\theta_a) = N(\theta)[\exp(iB_+)P_+ + \exp(iB_-)P_-], \tag{117}$$

где введены обозначения

$$B_\pm \equiv (tp_a \mp x_a p)\theta_a.$$

Аналогично вычисляется обратный оператор

$$W^{-1} = N(-\theta)[\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-]. \tag{118}$$

Формулы (116)–(118) задают искомое представление операторов W, которое не содержит спиновых матриц под знаком экспоненты. Используя (116)–(118), нетрудно найти в явном виде закон преобразования функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ в импульсном пространстве

$$\Psi(t,\boldsymbol{p}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{p}) = W\Psi(t,\boldsymbol{p}) = N(\theta)[\Psi_+(t,\boldsymbol{p}') + \Psi_-(t,\boldsymbol{p}'')], \tag{119}$$

где

$$\begin{aligned} p'_a &= p_a \operatorname{ch}\theta - \theta_a p \operatorname{sh}\theta/\theta + \theta_a\theta_b p_b(\operatorname{ch}\theta - 1)/\theta^2, \\ p''_a &= p_a \operatorname{ch}\theta + \theta_a p \operatorname{sh}\theta/\theta + \theta_a\theta_b p_b(\operatorname{ch}\theta - 1)/\theta^2, \qquad \Psi_\pm = P_\pm\Psi. \end{aligned} \tag{120}$$

Преобразованиям (119) соответствуют нелокальные (интегральные) преобразования функции (23):

$$\Psi(t,\boldsymbol{x}) \to \Psi'(t,\boldsymbol{x}) = N(\theta)(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\ \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})[\Psi_+(t,\boldsymbol{p}')+\Psi_-(t,\boldsymbol{p}'')], \tag{121}$$

здесь $N(\theta)$, $\Psi_\pm(t,\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$ задаются формулами (116) и (120). Преобразования (121) совместно с (56а), (56б) образуют представление группы $P(1,3)$, но оставляют время инвариантным, $t' = WtW^+ = t$.

Нелиевская симметрия уравнений Максвелла в проводящей среде. Исследуем негеометрическую симметрию уравнений Максвелла в проводящей среде:

$$\begin{aligned} &i\partial\boldsymbol{E}/\partial t = -\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H} + i\sigma\boldsymbol{E}, \qquad i\partial\boldsymbol{H}/\partial t = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}, \\ &\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \tag{122}$$

где σ — коэффициент проводимости. Покажем, что уравнения (122), как и уравнения (12) для электромагнитного поля в вакууме, инвариантны относительно алгебры A_8.

Используя обозначения (14), (15), запишем систему (122) в виде:

$$\hat{L}_1\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \hat{L}_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)(1+\sigma_3)\sigma, \tag{123}$$

$$\hat{L}_2\varphi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \hat{L}_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1. \tag{124}$$

Найти АИ уравнений (123), (124) означает определить совокупность операторов $\{Q_A\}$, образующих конечномерную алгебру Ли и удовлетворяющих условиям инвариантности (39). Поскольку здесь будем искать АИ в классе интегро-дифференциальных операторов, перейдем от (123) и (124) к эквивалентной системе уравнений в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} &L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_1 = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)(1+\sigma_3)\sigma, \\ &L_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_2 = p_1 - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}S_1, \end{aligned} \tag{125}$$

здесь $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ — фурье-образ $\varphi(t,\boldsymbol{x})$, p_a — независимые переменные $-\infty < p_a < \infty$.

Теорема 6. *Уравнения (125) инвариантны относительно алгебры A_8. Ее базисные элементы на множестве решений уравнений (125) задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &Q_1 = \sigma_3\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}D, \qquad Q_2 = ih\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/|h|, \qquad Q_3 = ih\sigma_3 D/|h|, \\ &Q_{3+a} = ihQ_a/|h|, \qquad Q_7 = h/|h|, \qquad Q_8 = I, \end{aligned} \tag{126}$$

где σ_a, S_a, D — матрицы (6), (103), (104):

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/p, \qquad h = \sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + (i/2)\sigma_3\sigma, \\
&h = \sqrt{h^2} = [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})^2 - \sigma_2/4]^{1/2} = \\
&\qquad = (p^2 - \sigma^2/4)^{1/2}(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2 + (i/2)\sigma[1 - (\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2].
\end{aligned} \tag{127}$$

Доказательство. Подобно тому как это делалось выше [см. (85)–(88)], рассмотрим вместо (125) систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&L_1\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \\
&L_3\varphi(t,\boldsymbol{p}) = 0, \qquad L_3 = 1 - (\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2,
\end{aligned} \tag{128}$$

где L_1 — оператор из (125).

Исследование симметрийных свойств системы (128) представляет более простую задачу ввиду коммутативности операторов L_1 и L_3. Вместе с тем, как можно показать в полной аналогии с (85)–(88), АИ уравнений (125) и (128) совпадают.

Используя тождества (81) и принимая во внимание антикоммутативность матриц Паули, нетрудно убедиться, что операторы (126) удовлетворяют условиям инвариантности (86), (88) уравнений (128) и коммутационным соотношениям (80), т.е. образуют АИ A_8 системы (128), а значит, и системы (125). Теорема доказана.

Итак, уравнения Максвелла для электромагнитного поля в проводящей среде имеют такую же негеометрическую АИ, как и соответствующие уравнения в отсутствие токов и зарядов. Из теоремы 6 следует также инвариантность системы (125) относительно группы преобразований вида (96), где Q_A — оператор (126).

В заключение раздела отметим, что помимо наших работ [15–25] негеометрический подход к исследованию симметрии уравнений Максвелла использовался также в [55, 56]. Этот подход может оказаться эффективным и при исследовании групповых свойств новой формулировки электродинамики, предложенной в [57, 58].

4. Симметрия уравнений Дирака и КДП

Этот раздел в основном посвящен исследованию симметрии уравнения Дирака

$$L\Psi(t,\boldsymbol{x}) \equiv (\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{129}$$

где $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ — четырехкомпонентная волновая функция, γ_μ — матрицы размерности 4×4, удовлетворяющие алгебре

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \tag{130}$$

Следуя [15–18, 19, 27, 31], установим АИ уравнения (129) в классе дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов. Отдельно будет рассмотрен случай $m = 0$ и показано, что симметрия уравнения Дирака для безмассовых частиц определяется той же самой 23-мерной алгеброй Ли, что и симметрия уравнения Максвелла.

Будет исследована также симметрия уравнения Кеммера–Дэффина–Петье.

АИ уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов. Хорошо известно, что уравнение (129) инвариантно относительно группы Пуанкаре. Генераторы этой группы на множестве решений уравнения (129) имеют вид:

$$P_\mu = p_\mu, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{131}$$

где $S_{\mu\nu} = (i/4)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Операторы (131) коммутируют с L из (129) и удовлетворяют коммутационным соотношениям (45a), т.е. образуют АИ уравнения (129). В [14, 59] показано, что алгебра Ли, натянутая на базисные элементы (131), является максимальной АИ уравнения Дирака в классе дифференциальных операторов первого порядка.

Однако инвариантность относительно алгебры (131) не исчерпывает всех свойств симметрии уравнения Дирака. Если расширить класс операторов, которому принадлежит АИ, то можно доказать следующее утверждение [18, 19].

Теорема 7. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно алгебры* A_8, *заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры на множестве решений уравнения (129) задаются формулами:*

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\mu\nu} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + (i/m)(1 - i\gamma_5)(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu),\\&\Sigma_0 = 1, \qquad \Sigma_1 = \gamma_5 - (i/m)(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu,\end{aligned} \tag{132}$$

где $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, 1 *— единичная матрица.*

Доказательство. В справедливости теоремы проще всего убедиться прямой проверкой. Используя соотношения (130), получаем:

$$\begin{aligned}&[\Sigma_{\mu\nu}, L] = (i/m)(\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu)L, \qquad [\Sigma_0, L] = 0,\\&[\Sigma_1, L] = -(2i/m)\gamma_5\gamma_\mu p^\mu L, \qquad [\Sigma_1, \Sigma_2] = [\Sigma_\alpha, \Sigma_{\mu\nu}] = 0,\\&[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\sigma}] = 2i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}),\end{aligned} \tag{133}$$

откуда видно, что операторы (132) удовлетворяют условию инвариантности уравнения (129) и образуют 8-мерную алгебру Ли, изоморфную алгебре A_8 (80). Этот изоморфизм устанавливается следующими соотношениями:

$$\Sigma_{ab} \leftrightarrow \varepsilon_{abc}Q_c, \qquad \Sigma_{0a} \leftrightarrow Q_{3+a}, \qquad \Sigma_0 \leftrightarrow Q_7, \qquad \Sigma_1 \leftrightarrow Q_8.$$

Над полем вещественных чисел все элементы алгебры A_8, задаваемые формулами (132), линейно независимы. Чтобы убедиться в этом, достаточно подвергнуть операторы (132) преобразованию

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\mu\nu} \to \Sigma'_{\mu\nu} = V\Sigma_{\mu\nu}V^{-1} = (i/2)[\gamma_\mu, \gamma_\nu],\\&\Sigma_0 \to \Sigma'_0 = V\Sigma_0V^{-1} = 1, \qquad \Sigma_1 \to \Sigma'_1 = V\Sigma_1V^{-1} = \gamma_5,\end{aligned} \tag{134}$$

где

$$V = \exp[-(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu/2m] = 1 - (1 - i\gamma_5)\gamma_\mu p^\mu/2m. \tag{135}$$

Теорема доказана.

Отметим, что формулы (132) не задают базис алгебры Ли над полем комплексных чисел, поскольку

$$(\Sigma_{ab} - i\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c})\Psi = (\Sigma_1 - i\Sigma_0)\Psi = 0, \tag{136}$$

где Ψ — произвольное решение уравнения (129).

Таким образом, уравнение Дирака обладает такой же негеометрической АИ, как и система уравнений Максвелла (12). Хотя операторы (132) включают производные по независимым переменным не выше первого порядка, они не порождают локальных преобразований волновой функции $\Psi(t,\boldsymbol{x})$. Если использовать обозначения Овсянникова [11, 12], то генераторы (132) можно классифицировать как дифференциальные операторы второго порядка, включающие производные вида $\partial^2/\partial x_\mu \partial \Psi_\alpha$.

Из доказанной теоремы следует, что уравнение Дирака инвариантно относительно восьмипараметрической группы преобразований:

$$\begin{aligned}
&\Psi \to (\cos\theta_{ab} - \gamma_a\gamma_b \sin\theta_{ab})\Psi + \\
&\qquad +(1/m)\sin\theta_{ab}(1-i\gamma_5)(\gamma_a\partial\Psi/\partial x_b - \gamma_b\partial\Psi/\partial x_a), \\
&\Psi \to (\operatorname{ch}\theta_{0a} - \gamma_0\gamma_a \operatorname{sh}\theta_{0a})\Psi + \\
&\qquad +(1/m)\operatorname{sh}\theta_{0a}(1-i\gamma_5)(\gamma_0\partial\Psi/\partial x_a - \gamma_a\partial\Psi/\partial x_0), \\
&\Psi \to (\operatorname{ch}\theta_1 + i\gamma_5 \operatorname{sh}\theta_1)\Psi + (1/m)\operatorname{sh}\theta_1(1-i\gamma_5)\gamma_\mu\partial\Psi/\partial x_\mu, \\
&\Psi \to \exp(i\theta_0)\Psi,
\end{aligned} \tag{137}$$

где θ_0, θ_1, $\theta_{\mu\nu}$ — произвольные вещественные параметры. Преобразования (137) унитарны в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x\ \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi. \tag{138}$$

Итак, уравнение Дирака помимо инвариантности относительно группы Пуанкаре обладает дополнительной симметрией относительно преобразований (137), образующих представление группы $U(2)\otimes U(2)$. Принципиальное отличие преобразований (137) от преобразований Лоренца для биспинора Ψ состоит в том, что преобразованная функция зависит не только от Ψ (и параметров преобразования), но также от производных $\partial\Psi/\partial x_\mu$.

Возникает вопрос, нельзя ли объединить группу симметрии уравнения Дирака, задаваемую преобразованиями (137), и группу Пуанкаре? Оказывается, такое объединение возможно, поскольку операторы (131) и (132) образуют 18-мерную алгебру Ли.

Теорема 8. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно 18-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются формулами (131), (132). Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133) и приведенным ниже соотношениям (139)*

$$\begin{aligned}
&[P_\mu, \Sigma_{\lambda\sigma}] = [P_\mu, \Sigma_\alpha] = [J_{\mu\nu}, \Sigma_\alpha] = 0, \\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\lambda}).
\end{aligned} \tag{139}$$

Доказательство. Оно сводится к проверке справедливости соотношений (139), которую несложно осуществить, используя соотношения (130).

Из доказанного выше заключаем, что уравнение Дирака инвариантно относительно 18-параметрической группы преобразований вида (11). Эта группа изоморфна группе $P(1,3)\otimes U(2)\otimes U(2)$ и включает неоднородные преобразования Лоренца для биспинора $\Psi(x)$, а также преобразования, явный вид которых приведен в (137).

АИ уравнения Дирака в классе интегро-дифференциальных операторов. Покажем теперь, что в классе нелокальных (интегро-дифференциальных) преобразований симметрия уравнения Дирака еще выше. А именно, справедливо следующее утверждение [16, 18, 19].

Теорема 9. *Уравнение Дирака (129) инвариантно относительно алгебры заданной над полем комплексных чисел. Базисные элементы АИ принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned}&\tilde\Sigma_{\mu\nu}=(i/2)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]+(\gamma_\mu p_\nu-\gamma_\nu p_\mu)(1-i\gamma_5H/E)/2m,\\&\tilde\Sigma_0=1,\qquad \tilde\Sigma_1=H/E,\end{aligned}\tag{140}$$

где

$$H=\gamma_0\gamma_a p_a+\gamma_0 m,\qquad E=\sqrt{H^2}=\sqrt{p^2+m^2}.\tag{141}$$

Вместо доказательства приведем явный вид оператора, диагонализующего уравнение (129) и одновременно преобразующего операторы (140) к представлению, в котором они не зависят от p_a:

$$V=\exp[iS_{0a}p_a\operatorname{arth}(p/E)/p]\times\exp[\gamma_a p_a\operatorname{arctg}(p/m)/p].\tag{142}$$

С помощью оператора (142) получаем

$$\begin{aligned}&\tilde\Sigma'_{ab}=V\tilde\Sigma_{ab}V^{-1}=(i/2)\gamma_a\gamma_b,\qquad \tilde\Sigma'_1=V\tilde\Sigma_1V^{-1}=\gamma_0,\\&\tilde\Sigma'_{0a}=V\tilde\Sigma_{0a}V^{-1}=(i/2)\gamma_4\gamma_a,\qquad \tilde L'=V\gamma_0LV^{-1}=i(\partial/\partial t)-\gamma_0E,\end{aligned}\tag{143}$$

где L — оператор Дирака (129). В представлении (143) утверждения теоремы становятся очевидными.

Операторы (143) в отличие от (132) задают базис алгебры Ли над полем комплексных чисел. Поэтому из теоремы 9 вытекает инвариантность уравнения (129) относительно 16-параметрической группы Ли, включающей преобразования вида:

$$\Psi'=\exp(i\tilde\Sigma_{\mu\nu}\tilde\theta_{\mu\nu})\Psi,\qquad \Psi''=\exp(i\tilde\Sigma_\alpha\tilde\theta_\alpha)\Psi,\tag{144}$$

где $\tilde\theta_{\mu\nu}=\theta^1_{\mu\nu}+i\theta^2_{\mu\nu}$, $\tilde\theta_\alpha=\theta^1_\alpha+i\theta^2_\alpha$, $\alpha=1,2$, $\theta^1_{\mu\nu}$, $\theta^2_{\mu\nu}$, θ^1_α, θ^2_α — вещественные параметры. Подставляя (140) в (144) и принимая во внимание тот факт, что квадрат любого из операторов (140) совпадает с единичным оператором, получаем преобразования (144) в следующей форме:

$$\begin{aligned}&\Psi\to\Psi'=(\cos\tilde\theta_{ab}-\gamma_a\gamma_b\sin\tilde\theta_{ab})\Psi+\\&\qquad+\sum_\varepsilon(1-i\varepsilon\gamma_5)\sin\tilde\theta_{ab}(\gamma_a\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_b-\gamma_a\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_a)/m,\\&\Psi\to\Psi''=(\operatorname{ch}\tilde\theta_{0b}-\gamma_0\gamma_b\operatorname{sh}\tilde\theta_{0b})\Psi+\\&\qquad+\sum_\varepsilon(1-i\varepsilon\gamma_5)\operatorname{sh}\tilde\theta_{0b}(\gamma_0\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_b-\gamma_b\partial\Psi^\varepsilon/\partial x_0)/m,\\&\Psi\to\Psi'''=\operatorname{ch}\tilde\theta_1\Psi+\sum_\varepsilon\varepsilon\operatorname{sh}\tilde\theta_1\Psi^\varepsilon,\qquad \Psi\to\Psi''''=\exp(i\tilde\theta_0)\Psi,\end{aligned}\tag{145}$$

где $\Psi^\varepsilon=(1/2)(1-\varepsilon H/E)\Psi$, $\varepsilon=\pm1$, $\tilde\theta_{\mu\nu}$, $\tilde\theta_\alpha$ — комплексные параметры. Преобразования (145) образуют группу локально изоморфную группе $GL(2,C)\otimes GL(2,C)$.

Операторы (140) в отличие от (132) не образуют замкнутой алгебры совместно с генераторами группы Пуанкаре (131). Однако генераторы (131) на множестве решений уравнения (129) можно представить также в форме:

$$\begin{aligned}&P_0=H,\qquad P_a=p_a=-i\partial/\partial x_a,\\&J_{ab}=x_ap_b-x_bp_a+S_{ab},\qquad J_{0a}=tp_a-[x_a,H]_+/2.\end{aligned}\tag{146}$$

Операторы (140) и (146) удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133), (139) и, следовательно, задают базис алгебры $P(1,3) \oplus U(2) \oplus U(2)$.

Симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака. Рассмотрим восьмикомпонентное уравнение Дирака

$$\tilde{L}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \tilde{L} = \Gamma_\mu p^\mu - m, \tag{147}$$

где Γ_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ — матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие совместно с Γ_4, Γ_5, Γ_6 алгебре Клиффорда.

Выбирая Γ_μ и $\tilde{\Psi}$ в виде:

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi^c \end{pmatrix}, \qquad \Psi^c = \gamma_2 \Psi^*, \tag{148}$$

здесь γ_μ — четырехрядные матрицы Дирака, Ψ — четырехкомпонентная волновая функция, получаем из (147) систему уравнений, совпадающую с уравнением Дирака (129) и уравнением, сопряженным (129). В общем же случае, когда Γ_μ — произвольные матрицы размерности 8×8, удовлетворяющие алгебре Клиффорда, уравнение (147) допускает самую различную интерпретацию, в том числе как уравнение движения частиц со спином 1 [45, 47, 48] и 3/2 [60].

В результате увеличения числа компонент волновой функции уравнение (147) обладает более высокой симметрией, чем уравнение Дирака (129). Помимо почти очевидной инвариантности относительно группы Пуанкаре, генераторы которой задаются формулами (131), где $S_{\mu\nu} = (i/4)[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$, уравнение (147) имеет скрытую негеометрическую симметрию, описываемую следующей теоремой.

Теорема 10. *Восьмикомпонентное уравнение Дирака (147) инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, заданной над полем комплексных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{nl} = i[\Gamma_n, \Gamma_l]/2 + (1 + i\Gamma_6)(\Gamma_n p_l - \Gamma_l p_n)/m, \\ &\Sigma_0 = 1, \qquad l, n = 0, 1, \ldots, 5. \end{aligned} \tag{149}$$

Доказательство повторяет почти дословно доказательство теоремы 7. Подчеркнем, что по определению

$$p_{3+a}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \equiv -i\frac{\partial}{\partial x_{3+a}}\tilde{\Psi}(t,\boldsymbol{x}) \equiv 0,$$

поэтому часть генераторов (149), у которых l и $n > 3$, на множестве функций $\Psi(t,\boldsymbol{x})$ сводится к числовым матрицам.

Генераторы Σ_{mn} и Σ_0 удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} &[\Sigma_{mn}, \Sigma_{m'n'}] = 2i(g_{mn'}\Sigma_{nm'} + g_{nm'}\Sigma_{mn'} - g_{mm'}\Sigma_{nn'} - g_{nn'}\Sigma_{mm'}), \\ &[\Sigma_0, \Sigma_{mn}] = 0. \end{aligned} \tag{150}$$

Алгебра (150) изоморфна алгебре $O(1,5) \oplus T_1 \sim GL(4)$, где T_1 — одномерная подалгебра, реализуемая единичной матрицей.

Операторы (149) образуют замкнутую алгебру совместно с генераторами группы Пуанкаре, поскольку выполняется:

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, \Sigma_{mn}] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, \Sigma_{m'n'}] = 0,\\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{m'\lambda}] = i(g_{\mu\lambda}\Sigma_{m'\nu} - g_{\nu\lambda}\Sigma_{m'\mu}),\\
&[J_{\mu\nu}, \Sigma_{\lambda\rho}] = i(g_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}\Sigma_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\lambda}),
\end{aligned}
\tag{151}
$$

где $m, n = 0, 1, \ldots, 6$; $3 < m'$, $n' \le 6$; $\mu, \nu, \rho, \lambda \le 3$. Отсюда следует, в частности, что уравнение (147) инвариантно относительно 26-мерной группы преобразований, включающей неоднородную группу Лоренца и преобразования вида:

$$
\begin{aligned}
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi' = (\cos\theta_{kl} - \Gamma_k\Gamma_l \sin\theta_{kl})\Psi +\\
&\qquad + i(1 + i\Gamma_6)(\Gamma_k \partial\Psi/\partial x_l - \Gamma_l \partial\Psi/\partial x_k)\sin\theta_{kl}/m, \qquad k, l \ne 0,\\
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi'' = (\operatorname{ch}\theta_{0k} - \Gamma_0\Gamma_k \operatorname{sh}\theta_{0k})\Psi +\\
&\qquad + i(1 + i\Gamma_6)(\Gamma_0 \partial\Psi/\partial x_k - \Gamma_k \partial\Psi/\partial x_0)\operatorname{sh}\theta_{0k}/m,\\
&\tilde\Psi \to \tilde\Psi''' = \exp(i\theta_0)\Psi,
\end{aligned}
\tag{152}
$$

где θ_{kl}, θ_0, θ_{0k} — произвольные параметры. При $k, l > 3$ формулы (152) задают матричные преобразования функции $\Psi(t, \boldsymbol{x})$.

В полной аналогии с изложенным в предыдущем пункте можно показать, что уравнение (147) инвариантно относительно 42-мерной алгебры Ли, изоморфной $P(1,3) \otimes GL(4,C) \otimes GL(4,C)$. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются формулами (131), где $S_{\mu\nu} = i[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]/4$, и приведенными ниже формулами

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{kl} = i[\Gamma_k, \Gamma_l]/2 + (\Gamma_k p_l - \Gamma_l p_k)(1 + i\Gamma_6 H/E)/m,\\
&\Sigma_{5+k\,5+l} = \Sigma_{kl}\Sigma_1, \qquad \Sigma_0 = 1, \qquad \Sigma_0 = H/E,
\end{aligned}
\tag{153}
$$

где $H = \Gamma_0\Gamma_a p_a + \Gamma_0 m$, $k, l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Симметрия уравнения Дирака для безмассовой частицы. Рассмотрим теперь уравнение Дирака в том особом случае, когда параметр m, характеризующий массу частицы, равен нулю.

Хорошо известно, что уравнение Дирака при $m = 0$ инвариантно относительно 16-мерной конформной алгебры. Здесь покажем, что симметрия этого уравнения выше. Если расширить класс операторов, которому принадлежат базисные элементы АИ, включив в него интегро-дифференциальные операторы, то можно доказать следующее утверждение.

Теорема 11 [31]. *Уравнение Дирака (129) при $m = 0$ инвариантно относительно 23-мерной алгебры Ли, изоморфной алгебре $C(1,3) \oplus A_8$. Базисные элементы этой АИ принадлежат классу интегро-дифференциальных операторов и задаются следующими формулами:*

$$
\begin{aligned}
&P_0 = p_0 = i\partial/\partial t, \qquad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \qquad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},\\
&J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + iH(1 - i\gamma_5)\gamma_a\gamma_b p_b/2p^2 + (1/2)\hat\Sigma_{0a},\\
&D = x_\mu p^\mu + i,\\
&K_\mu = \left(-x_\nu x^\nu + J_{ab}S_{ab}p^{-2} + p^{-2}\right)p_\mu + 2[x_\mu + (1 - \delta_{\mu 0})(1 - \gamma_0)S_{\mu b}p_b p^{-1}]D,\\
&\hat\Sigma_{0a} = \gamma_4(p_a + \gamma_0 S_{ab}p_b)/p, \qquad \Sigma_0 = 1, \qquad \hat\Sigma_1 = iH/p, \qquad \hat\Sigma_{ab} = i\Sigma_1\varepsilon_{abc}\Sigma_{0c},
\end{aligned}
\tag{154}
$$

где

$$H = \gamma_0 \gamma_a p_a, \qquad p = \sqrt{H^2} = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{1/2}.$$

Приведем схему доказательства. С помощью преобразования

$$Q_A \to Q'_A = W Q_A W^{-1}, \qquad \hat{L} \to \hat{L}' = W L W^{-1}, \qquad \Psi \to \Psi' = W\Psi,$$

где Q_A — произвольный генератор из множества, заданного формулами (154):

$$\begin{aligned} &W = W^{-1} = [1 + \gamma_0 + (1 - \gamma_0)\varepsilon_{abc} S_{ab} \hat{p}_c], \\ &\hat{L} = \gamma_0 L = i\partial/\partial t - H, \qquad \hat{p}_c = p_c/p, \end{aligned} \tag{155}$$

приводим уравнение (129) (при $m = 0$) и операторы (154) к следующей форме:

$$\begin{aligned} &L'\Psi' = 0, \qquad L' = i\partial/\partial t - i\gamma_5 p, \qquad P'_\mu = P_\mu, \\ &J'_{ab} = J_{ab}, \qquad J'_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned} &D' = D, \qquad K'_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu, \\ &\hat{\Sigma}'_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2, \qquad \hat{\Sigma}'_0 = 1, \qquad \hat{\Sigma}'_1 = \gamma_5. \end{aligned} \tag{157}$$

Операторы (157) удовлетворяют коммутационным соотношениям (45а), (133), (151) и условиям инвариантности уравнения (156):

$$\begin{aligned} &[L', P'_\mu] = [L', J'_{\mu\nu}] = [L', \Sigma'_{\mu\nu}] = [L', \Sigma'_\alpha] = 0, \\ &[L', K'_0] = 2i[x_0 + (x_a p_a - i) i\gamma_5 p^{-1}]L', \\ &[L', K'_a] = 2i(x_a + i x_0 \gamma_5 p_a/p)L', \\ &[L', D'] = iL', \qquad [L', J'_{0a}] = \gamma_5 \hat{p}_a L'. \end{aligned} \tag{158}$$

Отсюда заключаем, что операторы (154) образуют АИ уравнения (129) с $m = 0$, изоморфную $C(1,3) \oplus A_8$.

Таким образом, уравнение Дирака для безмассовой частицы инвариантно относительно 23-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры $C(1,3)$ и A_8. Такой же симметрией, как было показано выше, обладают уравнения Максвелла (12). Можно показать (например, используя метод, предложенный в [47, 48]), что указанной симметрией обладают все релятивистские уравнения для безмассовых полей, инвариантные относительно преобразований P, T и C.

Симметрия уравнения Кеммера–Дэффина–Петье. Рассмотрим теперь уравнение Кеммера–Дэффина–Петье

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{159}$$

где Ψ — десятикомпонентная волновая функция, β_μ — матрицы размерности 10×10, удовлетворяющие алгебре:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = i(g_{\mu\nu}\beta_\lambda + g_{\nu\lambda}\beta_\mu). \tag{160}$$

Хорошо известно, что уравнение (159) инвариантно относительно группы Пуанкаре. Генераторы этой группы на множестве решений сравнения (159) имеют вид, задаваемый формулами (131), где $S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu)$. Оказывается, что уравнение (159) обладает также скрытой (негеометрической) симметрией, причем более широкой, чем уравнение Дирака.

Теорема 12. *Уравнение КДП (159) инвариантно относительно 8-мерной алгебры Ли, заданной над полем вещественных чисел. Базисные элементы этой алгебры принадлежат классу дифференциальных операторов и задаются формулами:*

$$\begin{aligned}
&A^a_b = C_{ad}C_{db}, \qquad \tilde{A}^a_b = \varepsilon_{adc}C_{0b}C_{dc}/2, \quad a \neq b, \qquad A^a_a = 2/3 - C^2_{bc},\\
&\tilde{A}^a_a = \varepsilon_{adc}C_{0a}C_{dc}/6 - C_{0a}C_{bc}, \qquad (a,b,c) \text{ — цикл } (1,2,3),\\
&A_0 = 1, \qquad \tilde{A}_0 = \varepsilon_{abc}C_{0a}C_{bc}/4, \qquad a,b,c,d = 1,2,3,
\end{aligned} \tag{161}$$

где

$$\begin{aligned}
&C_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + (a_\mu p_\nu - a_\nu p_\mu)/m, \qquad S_{\mu\nu} = i[\beta_\mu, \beta_\nu], \qquad a_\mu = S_{4\mu} + iS_{5\mu},\\
&S_{4\mu} = i\beta_\mu, \qquad S_{5\mu} = i[\beta_5, \beta_\mu], \qquad \beta_5 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho\beta_\sigma/4!.
\end{aligned} \tag{162}$$

Доказательство. Используя тот факт, что матрицы β_μ, β_5 удовлетворяют алгебре КДП (160), а матрицы S_{kl} $(k,l = 0,1,\ldots,5)$ — алгебре $O(1,5)$, получаем

$$[C_{\mu\nu}, L_1] = f^1_{\mu\nu}L, \qquad f^1_{\mu\nu} = i(L+2m)(\beta_\mu p_\nu - \beta_\nu p_\mu)/m^2. \tag{163}$$

Из (163) заключаем, что операторы $C_{\mu\nu}$ (а следовательно, и A^b_a, $\tilde{A}^b_a$, A_0, $\tilde{A}_0$ (161)) удовлетворяют условию инвариантности уравнения (159).

Операторы (161) подчиняются коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[A_0, A^a_b] = [A_0, \tilde{A}^a_b] = [\tilde{A}_0, A^a_b] = [\tilde{A}_0, \tilde{A}^a_b] = [A_0, \tilde{A}_0] = 0,\\
&[A^b_a, A^d_c] = -[\tilde{A}^b_a, \tilde{A}^d_c] = if^{kl}_{abcd}A^l_k, \qquad [A^b_a, \tilde{A}^d_c] = if^{kl}_{abcd}\tilde{A}^l_k,
\end{aligned} \tag{164}$$

где $a,b,c,d,k,l = 1,2,3$; f^{kl}_{abcd} — структурные константы группы $SU(3)$ в базисе Окубо.

Соотношения (164) можно проверить непосредственно. Проще всего такая проверка осуществляется с помощью предварительного преобразования $\lambda_n \to V\lambda_n V^{-1}$, где $V = \exp[ia_\mu p^\mu/m]$, при этом $C_{\mu\nu} \to C'_{\mu\nu} = VC_{\mu\nu}V^{-1} = i[\beta_\mu, \beta_\nu]$. Теорема доказана.

Итак, помимо симметрии относительно алгебры $P(1,3)$ уравнение КДП (159) инвариантно также относительно 18-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой заданы формулами (161). Отсюда следует, что уравнение КДП инвариантно относительно преобразований вида:

$$\begin{aligned}
&\Psi \to \Psi' = \exp(iA^b_a\theta^b_a)\Psi, \qquad \Psi \to \Psi'' = \exp(iA_0\theta_0)\Psi,\\
&\Psi \to \Psi''' = \exp(i\tilde{A}^b_a\tilde{\theta}^b_a)\Psi, \qquad \Psi \to \Psi^{\mathrm{IV}} = \exp(i\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0)\Psi,
\end{aligned} \tag{165}$$

где θ^b_a, $\tilde{\theta}^b_a$, θ_0, $\tilde{\theta}_0$ — вещественные параметры. Согласно (164) преобразования (165) образуют 18-параметрическую группу Ли, локально изоморфную $U(3) \otimes U(3)$.

Операторы (164) образуют совместно с генераторами группы Пуанкаре замкнутую 28-мерную алгебру Ли. Это следует из соотношений

$$[P_\mu, C_{\lambda\sigma}] = 0, \qquad [J_{\mu\nu}, C_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}C_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}C_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}C_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}C_{\mu\lambda}). \tag{166}$$

Таким образом, уравнение КДП инвариантно относительно 28-мерной группы Ли, включающей неоднородные преобразования Лоренца и преобразования (165).

Преобразования (165) можно легко найти в явном виде, поскольку соответствующие экспоненты сводятся к полиномам от $(A_a^b\theta_a^b)^n$, $(\tilde{A}_a^b\tilde{\theta}_a^b)^n$, $(A_0\theta_0)^n$, $(\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0)^n$, $n=0,1,2$:

$$\begin{aligned}
&\exp(iA_a^b\theta_a^b) = 1 + (\cos\theta_a^b - 1)(A_a^b)^2 + i\sin(\theta_a^b)A_a^b,\\
&\exp(i\tilde{A}_a^b\tilde{\theta}_a^b) = 1 + (\operatorname{ch}\tilde{\theta}_a^b - 1)(\tilde{A}_a^b)^2 + \operatorname{sh}(\tilde{\theta}_a^b)\tilde{A}_a^b,\\
&\exp(iA_0\theta_0) = \exp(i\theta_0), \qquad \exp(i\tilde{A}_0\tilde{\theta}_0) = 1 + (\operatorname{ch}\tilde{\theta}_0 - 1)\tilde{A}_0^2 + \operatorname{sh}(\tilde{\theta}_0)\tilde{A}_0.
\end{aligned} \tag{167}$$

Нетрудно убедиться, что общее преобразование функции $\Psi(x)$, включающее преобразования Лоренца и (165), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Psi(x) \to \Psi'(x') = A\Psi(x) + B\Psi(x') + C_\mu\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_\mu} +\\
&\quad + D_{\mu\nu}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu} + E_{\mu\nu\lambda}\frac{\partial^3\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu\partial x_\lambda} + F_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial^4\Psi(x)}{\partial x_\mu\partial x_\nu\partial x_\lambda\partial x_\sigma},
\end{aligned} \tag{168}$$

где A, B, C_μ, $D_{\mu\nu}$, $E_{\mu\nu\lambda}$, $F_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — числовые матрицы.

Негеометрическая симметрия уравнений Дирака и КДП для частиц, взаимодействующих с внешним полем. До сих пор в этой главе исследовалась негеометрическая симметрия уравнений Дирака и КДП для невзаимодействующих частиц. Можно показать, что введение минимального взаимодействия в общем случае приводит к сужению негеометрической симметрии уравнений движения. Однако для некоторых классов внешних полей такая симметрия сохраняется. Кроме того, негеометрической симметрией обладают уравнения, описывающие аномальные взаимодействия типа Паули.

Здесь приведем без доказательства некоторые из результатов, полученных в [25, 27], относящихся к симметрии уравнений движения для взаимодействующих частиц.

Теорема 13. *Уравнение Дирака с взаимодействием типа Паули:*

$$L\Psi = 0, \qquad L = \gamma_\mu\pi^\mu + (i/4m)(1 - i\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu} + m, \tag{169}$$

где $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, $F_{\mu\nu} = -i[\pi_\mu, \pi_\nu]$, A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, инвариантно относительно алгебры A_8. Явный вид базисных элементов этой алгебры можно получить из (132) с помощью замены $p_\mu \to \pi_\mu$. Итак, уравнение (169) обладает такой же негеометрической симметрией, как уравнение Дирака для невзаимодействующей частицы (129).

Теорема 14. *Уравнение Дирака для частицы в однородном магнитном поле:*

$$\pi_0\Psi = \hat{H}\Psi, \qquad \hat{H} = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0 m, \tag{170}$$

где

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_1 = p_1 - eA_1(x_1, x_2), \quad \pi_2 = p_2 - eA_2(x_1, x_2),$$

инвариантно относительно алгебры A_8. Ее базисные элементы задаются следующими интегро-дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{12} = i\gamma_3\gamma_0\gamma_a\pi_a/|\gamma_0\gamma_a\pi_a|, \qquad \Sigma_{31} = i\gamma_5(\gamma_3 m + p_3)/(p_3^2 + m^2)^{1/2},\\
&\Sigma_{32} = i\Sigma_{12}\Sigma_{31}, \quad \Sigma_{0a} = i\varepsilon_{abc}\Sigma_{bc}H/2|H|, \quad \Sigma_0 = 1, \quad \Sigma_1 = iH/|H|.
\end{aligned} \tag{171}$$

Отметим, что аналогичный результат справедлив для уравнения Дирака, описывающего движение частицы в постоянном электрическом поле.

Рассмотрим теперь обобщенное уравнение КДП, описывающее движение частицы со спином 1, зарядом e и аномальным моментом q в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$:

$$[\beta_\mu \pi^\mu + m(eq/4m) S_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]\Psi = 0, \tag{172}$$

где

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2S_{12}H.$$

Теорема 15. *Уравнение (172) имеет шесть линейно-независимых интегралов движения, связанных с негеометрической симметрией. При $q = 1$ уравнение (172) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли, включающей подалгебру $O(4)$.*

Явный вид базисных элементов, перечисленных в теореме АИ, не будем приводить здесь из-за их громоздкости (см. [25, 27]).

5. Законы сохранения

Хорошо известно, что из симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре следует существование некоторых интегральных комбинаций из векторов напряженности электрического и магнитного полей, которые сохраняются во времени. В этом разделе наряду с классическими законами сохранения (энергии, импульса, углового момента электромагнитного поля) обсуждаются новые величины, возникающие вследствие симметрии уравнений Максвелла относительно алгебры A_8. Рассматриваются также новые интегралы движения для поля Дирака, связанные с негеометрической симметрией уравнения Дирака.

Классические интегралы движения электромагнитного поля. Из уравнений Максвелла (12) для электромагнитного поля в вакууме следует сохранение во времени следующих величин:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \int d^3x \, \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2, \tag{173а}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int d^3x \, \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \tag{173б}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \int d^3x \, \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \tag{173в}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \int d^3x \, \left[t\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2\right], \tag{173г}$$

которые определяют энергию, импульсы, угловой момент и центр энергии поля.

Существование классических интегралов движения, перечисленных в (173), вытекает из симметрии уравнений Максвелла относительно группы Пуанкаре. Исходя из лагранжевой формулировки этих уравнений и используя теорему Нетер, можно показать, что сохранение энергии (173а) и импульса (173б) непосредственно следует из инвариантности лагранжиана относительно сдвигов по временной и пространственным координатам, сохранение момента — следствие инвариантности лагранжиана относительно пространственных поворотов и, наконец, сохранение центра энергии вытекает из инвариантности относительно преобразований Лоренца.

Возникает естественный вопрос: какие сохраняющиеся величины связаны с симметрией уравнений Максвелла относительно негеометрических преобразований? Для ответа на этот вопрос невозможно воспользоваться теоремой Нетер, поскольку негеометрические преобразования (99), (100) имеют нелокальный характер. Следовательно, приходится применять другой метод нахождения сохраняющихся величин, который заключается в вычислении средних значений базисных элементов АИ в соответствующем скалярном произведении. Покажем, как в таком подходе можно получить классические интегралы движения (173).

Будем исходить из формулировки уравнений Максвелла в импульсном пространстве (73). Генераторы группы Пуанкаре на множестве решений уравнений (73) задаются формулами

$$
\begin{aligned}
&P_0 = -\sigma_2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} \equiv \hat{H}, \qquad P_a = p_a,\\
&J_a = -i\left(\boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\right)_a + S_a, \qquad J_{0a} = tp_a - i\hat{H}\frac{\partial}{\partial p_a},
\end{aligned}
\tag{174}
$$

где p_a — независимые переменные, $-\infty < p_a < \infty$, σ_2 и S_a — матрицы (15). Операторы (174) эрмитовы относительно инденфинитного скалярного произведения

$$
(\varphi_1, \varphi_2) = \int d^3p\, \varphi_1^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)\varphi_2(t,\boldsymbol{p}),
\tag{175}
$$

где $\varphi_\alpha(t,\boldsymbol{p})$ — произвольные квадратично интегрируемые решения уравнений (73).

Из инвариантности уравнений (73) относительно алгебры (174) следует сохранение во времени средних значений операторов P_μ, $J_{\mu\nu}$ в метрике (175):

$$
\frac{\partial}{\partial t}\langle Q_A\rangle = 0,
$$

где

$$
\langle Q_A\rangle = (\varphi, Q_A\varphi) \equiv \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)Q_A\varphi(t,\boldsymbol{p}),
\tag{176}
$$

здесь Q_A — любой из генераторов (174). Подставляя в (176) выражения (174) для генераторов группы $P(1,3)$ и используя для вектор-функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ обозначения (98), после несложных вычислений получим:

$$
\langle P_0\rangle = \mathcal{E}, \qquad \langle P_a\rangle = \mathcal{P}_a, \qquad \langle J_a\rangle = \mathcal{L}_a, \qquad \langle J_{0a}\rangle = \mathcal{N}_a,
\tag{177}
$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}_a$, $\mathcal{L}_a$ и $\mathcal{N}_a$ — интегралы движения (173).

Приведем доказательство первой из формул (177). Подставляя в (176) выражение (174) для генератора $Q_A = P_0 = \hat{H}$ и принимая во внимание, что $\hat{H}^2\varphi = p^2\varphi$, находим

$$
\langle P_0\rangle = (\varphi, H\varphi) \equiv \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\varphi(t,\boldsymbol{p})/2.
\tag{178}
$$

Подставляя в (178) выражение (98) для вектора-функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$ и учитывая (75), получаем

$$\langle P_0\rangle = \int d^3p\, [\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2. \tag{179}$$

Выражая $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$ с помощью преобразования Фурье через $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$ и выполняя интегрирование по $\boldsymbol{p}$ с помощью соотношения

$$\int d^3p\, \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}) = (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{x}),$$

приходим к формуле

$$\langle P_0\rangle = \int d^3x\, \left[\boldsymbol{E}^2(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{H}^2(t,\boldsymbol{x})\right]/2. \tag{180}$$

Аналогично можно доказать все остальные соотношения (173), (177).

Интегралы движения, вытекающие из негеометрической симметрии уравнений Максвелла. Классические интегралы движения для электромагнитного поля можно представить как средние значения (в квантовомеханическом смысле) базисных элементов алгебры $P(1,3)$. Таким же образом можно вычислить новые интегралы движения, связанные с негеометрической симметрией уравнения Максвелла, рассматриваемой в разд. 3.

Найдем сохраняющиеся величины, соответствующие базисным элементам алгебры A_8. Операторы (78) коммутируют с L_1 из уравнения (73а), и сохраняются во времени следующие интегралы:

$$\langle Q_A\rangle = \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p}) M Q_A \varphi(t,\boldsymbol{p})/2p, \tag{181}$$

где M — произвольный оператор, определенный на множестве решений уравнений (73), Q_A — операторы (78).

Ограничимся выбором $M = \hat{H}/p$. В этом случае (181) определяет средние значения операторов (78) в той же самой метрике, в которой заданы средние значения генераторов группы Пуанкаре (см. (173), (176), (177)).

Вычислим последовательно средние значения всех операторов (78). Для того чтобы получить вещественные величины, умножим Q_A (78) на i и обозначим $iQ_A = \tilde{Q}_A$. Выбирая $A=3$, $\tilde{Q}_A = iQ_3 = -\sigma_2$, получаем

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_3\rangle &= -\int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})(\hat{H}/2p^2)\sigma_2\varphi(t,\boldsymbol{p}) = \\ &= -\int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p^2.\end{aligned} \tag{182}$$

Подставив в (182) явный вид матриц S_a (15) и выражение (98) для функции $\varphi(t,\boldsymbol{p})$, придем к следующей формуле:

$$\langle\tilde{Q}_3\rangle = i\int d^3p\, \boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}^*(t,\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2p^2. \tag{183}$$

Если потребовать, чтобы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяли условию вещественности, то согласно (183), (75):

$$\langle\tilde{Q}_3\rangle = i\int d^3p\, \boldsymbol{p}\cdot[\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]. \tag{184}$$

Таким образом, из инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича следует сохранение во времени интеграла (184). Найдем теперь среднее значение оператора Q_2 (73):

$$\langle\tilde{Q}_2\rangle = \int d^3p\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\sigma_3 D\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p. \tag{185}$$

Используя явный вид матрицы D (82), (83) и принимая во внимание (73), (98), имеем

$$\varphi'(t,\boldsymbol{p}) = D\varphi = D_1\varphi = (i/\delta)\begin{pmatrix} p_2p_3(p_3\dot{H}_3 - p_2\dot{H}_2)\\ p_1p_3(p_1\dot{H}_1 - p_3\dot{H}_3)\\ p_1p_2(p_2\dot{H}_2 - p_1\dot{H}_1)\\ -p_2p_3(p_3\dot{E}_3 - p_2\dot{E}_2)\\ -p_1p_3(p_1\dot{E}_1 - p_3\dot{E}_3)\\ -p_1p_2(p_2\dot{E}_2 - p_1\dot{E}_1)\end{pmatrix} + (f/\delta)\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\E_3\\H_1\\H_2\\H_3\end{pmatrix}, \tag{186}$$

где δ и f — функции (79), (83), $\dot{H}_a = \partial H_a/\partial t$, $\dot{E}_a = \partial E_a/\partial t$. Подставляя в (185) выражение (98) для $\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})$, а также явный вид матрицы σ_3 и функции $\varphi'(t,\boldsymbol{p})$ (186), получаем

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_2\rangle = \int d^3p \Bigg\{ & f\,[\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{E}^*(t,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})] + \\ & + \sum_a p_a^2\left[\dot{H}_a^*(t,\boldsymbol{p})\cdot\dot{H}_a(t,\boldsymbol{p}) - \dot{E}_a^*(t,\boldsymbol{p})\cdot\dot{E}_a(t,\boldsymbol{p})\right]\Bigg\}\Big/2\delta p.\end{aligned} \tag{187}$$

Если теперь наложить на $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$ условия вещественности (75), то интеграл (187) принимает вид:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_2\rangle = \int d^3p \Bigg\{ & f\,[\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})] + \\ & + \sum_a p_a^2\left[\dot{E}_a(t,\boldsymbol{p})\cdot\dot{E}_a(t,-\boldsymbol{p}) - \dot{H}_a(t,\boldsymbol{p})\cdot\dot{H}_a(t,-\boldsymbol{p})\right]\Bigg\}\Big/2\delta p.\end{aligned} \tag{188}$$

Совершенно аналогично получаем, что:

$$\begin{aligned}&\langle\tilde{Q}_1\rangle = \int d^3p\left[f\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p}) + \sum_a p_a^2\dot{E}_a(t,-\boldsymbol{p})\cdot\dot{H}_a(t,\boldsymbol{p})\right]\Big/\delta p,\\ &\langle\tilde{Q}_8\rangle = \int d^3p\,[\boldsymbol{E}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{H}(t,-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})]/2p,\\ &\langle\tilde{Q}_4\rangle = \langle\tilde{Q}_5\rangle = \langle\tilde{Q}_6\rangle = \langle\tilde{Q}_7\rangle = 0.\end{aligned} \tag{189}$$

Соотношения (189) справедливы только для тех векторов $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$, которые удовлетворяют условию (75). При комплексных $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ интегралы $\langle Q_B\rangle$ $(B=4,5,6,7)$ не равны нулю, но задают некоторые сохраняющиеся величины, явный вид которых здесь не приводится.

Формулы (184), (188), (189) определяют интегральные комбинации фурье-образов компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей, сохраняющиеся во времени в силу уравнений Максвелла. С помощью преобразования Фурье эти сохраняющиеся величины можно выразить через $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{p})$ и $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{p})$. Так, для $\langle\hat{Q}_1\rangle$ получаем

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_1\rangle &= (2\pi)^{-3}\int d^3x\,d^3x'\,d^3p\,(\delta p)^{-1}\times\\ &\times\left\{f\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x}')+\sum_a p_a^2\dot{E}_a(t,\boldsymbol{x})\dot{H}_a(t,\boldsymbol{x}')\exp[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\right\}.\end{aligned}\tag{190}$$

В отличие от классических интегралов движения (173) сохраняющаяся величина (190) зависит не только от напряженности электромагнитного поля, но, грубо говоря, также от бесконечного числа производных $\partial E/\partial x_a$, $\partial H/\partial x_a$, $\partial^2E/\partial x_a\partial x_b$, $\partial^2H/\partial x_a\partial x_b$, …

Исходя из АИ уравнений Максвелла, задаваемой соотношениями (78), можно построить также такие интегралы движения, которые зависят от конечного числа производных. Воспользуемся неоднозначностью в определении оператора M, входящего в (181), и выберем

$$M=\begin{cases}\hat{H}\delta, & A=1,2,\\ \hat{H}p, & A=3,\\ \hat{H}, & A=8,\end{cases}\tag{191}$$

где $\hat{H}$ и δ заданы (174) и (79). Поступая далее по аналогии с (181)–(190), получаем следующие сохраняющиеся величины:

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_1\rangle' &= \int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}\delta\hat{Q}_1\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\\ &=\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\ b,\,c\neq a}}\int d^3x\left(\frac{\partial^2E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2H_a}{\partial x_c^2}-\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}\right),\end{aligned}\tag{192а}$$

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_2\rangle' &= \int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}\delta\tilde{Q}_2\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\sum_{\substack{a,\,b,\,c\\ b,\,c\neq a}}\int d^3x\left(\frac{\partial^2E_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2E_a}{\partial x_c^2}-\right.\\ &\left.-\frac{\partial^2H_a}{\partial x_b^2}\frac{\partial^2H_a}{\partial x_c^2}+\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{H}_a}{\partial x_a}-\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a}\frac{\partial\dot{E}_a}{\partial x_a},\right),\end{aligned}\tag{192б}$$

$$\begin{aligned}\langle\tilde{Q}_3\rangle' &= \int d^3p\,\varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}pQ_3\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p=\\ &=\int d^3x\,[\dot{\boldsymbol{E}}(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})\cdot\dot{\boldsymbol{H}}(t,\boldsymbol{x})]/2,\end{aligned}\tag{192в}$$

$$\langle\tilde{Q}_8\rangle' = \int d^3p\, \varphi^\dagger(t,\boldsymbol{p})\hat{H}Q_8\varphi(t,\boldsymbol{p})/2p = \int d^3x\, \left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)/2. \tag{192г}$$

Итак, помимо классических интегралов движения (192) в силу уравнений Максвелла сохраняются во времени еще три независимые интегральные величины, задаваемые (192а)–(192в) (что же касается (192г), то этот интеграл совпадает с (173 а)). Вопрос о физической интепретации величин (192а)–(192в) пока остается открытым.

Отметим еще, что законы сохранения величин (192а)–(192в) можно сформулировать с помощью уравнения непрерывности:

$$p_\mu j_a^\mu = 0, \tag{193}$$

где

$$j_a^0 = \varphi^\dagger B_a\varphi, \qquad j_a^b = \varphi^\dagger\sigma_2 S_b B_a\varphi,$$

B_a $(a = 1,2,3)$ — дифференциальные операторы, коммутирующие с $L_1 = i\partial/\partial t - \hat{H} = i\partial/\partial t + \sigma_2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ (12а),

$$B_1 = -\tilde{D}\sigma_1, \qquad B_2 = -\tilde{D}\sigma_3, \qquad B_3 = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}, \tag{194}$$

здесь

$$\tilde{D} = \sum_{a\neq b\neq c}\left[\left(p_a^2p_b^2 + p_a^2p_c^2 - p_b^2p_c^2\right)\left(1 - S_a^2\right) + p_1p_2p_3S_aS_bp_c\right].$$

Ввиду коммутативности операторов (194) с L_1 (12а) уравнения (193) следуют непосредственно из (12).

Законы сохранения для поля Дирака. Найдем теперь сохраняющиеся величины, связанные с негеометрической симметрией уравнения Дирака.

Любому эрмитову оператору Q, определенному на множестве решений уравнений Дирака (129), можно поставить в соответствие 4-вектор тока

$$j_\mu^\theta = \bar{\Psi}\gamma_\mu Q\Psi, \tag{195}$$

где $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$. Нетрудно убедиться, что если оператор Q удовлетворяет условию инвариантности уравнения Дирака (129), то для тока (195) справедливо уравнение непрерывности (193), откуда в силу теоремы Остроградского–Гаусса вытекает сохранение во времени интеграла

$$I^\theta = \int d^3x\, \bar{\Psi}\gamma_0 Q\Psi = \int d^3x\, \Psi^\dagger Q\Psi. \tag{196}$$

Выбирая в качестве $\{Q\}$ генераторы группы Пуанкаре, получаем отсюда законы сохранения энергии, импульса, углового момента и центра энергии электронно-позитронного поля.

Возникает законный вопрос, какие новые сохраняющиеся величины можно поставить в соответствие базисным элементам негеометрической АИ уравнения Дирака, задаваемым (132). Поскольку на множестве решений уравнений Дирака выполняется (136), достаточно рассмотреть только четыре из восьми операторов (132), например, Σ_{ab} и Σ_0 $(a,b = 1,2,3)$.

Поскольку операторы Σ_{ab} (132) неэрмитовы, рассмотрим сохраняющиеся величины, соответствующие инвариантным операторам:

$$\tilde{\Sigma}_{ab} = M\Sigma_{ab}, \qquad \tilde{\Sigma}_0 = M\Sigma_0, \tag{197}$$

где

$$M = (H + 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p})/m, \qquad H = \gamma_0\gamma_a p_a + \gamma_0 m, \qquad S_a = i\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c/2.$$

Оператор M однозначно (с точностью до множителя, пропорционального единичной матрице) определяется требованиями, чтобы операторы (197) были эрмитовы и удовлетворяли условию инвариантности уравнения Дирака.

Подставляя (197) в (196), получаем

$$\begin{aligned} &C_a = (1/4)\varepsilon_{abc}\tilde{\Sigma}_{bc} = \gamma_0 S_a + (1 - i\gamma_5)p_a/2m,\\ &C_0 = \tilde{\Sigma}_0/2 = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p} + H/2)/m, \end{aligned} \tag{198}$$

а соответствующий ток (196):

$$\begin{aligned} &j^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu C_a\Psi = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_0 S_a\Psi -\\ &\quad -i[\bar{\Psi}\gamma_\mu(1 - i\gamma_5)\partial\Psi/\partial x_a - (\partial\bar{\Psi}/\partial x_a)\gamma_\mu(1 - i\gamma_5)\Psi]/4m,\\ &j^0_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu C_0\Psi = -i[\bar{\Psi}\gamma_\mu S_a\partial\Psi/\partial x_a -\\ &\quad -(\partial\bar{\Psi}/\partial x_a)\gamma_\mu S_a\Psi + (\partial\bar{\Psi}/\partial t)\gamma_\mu\Psi/2 - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial\Psi/\partial t)/2]/2m. \end{aligned} \tag{199}$$

В силу уравнения Дирака (129) и ввиду коммутативности C_μ (198) с оператором $i\partial/\partial t - H$ токи j^ν_μ (199) удовлетворяют уравнению непрерывности (193), откуда следует, в частности, сохранение во времени интегральных величин:

$$\begin{aligned} &I^a = \int d^3x\, j^a_0 = \int d^3x\, \bar{\Psi}S_a\Psi -\\ &\quad -i\int d^3x\, \left[\Psi^\dagger(1 - i\gamma_5)\partial\Psi/\partial x_a - (\partial\Psi^\dagger/\partial x_a)(1 - i\gamma_5)\Psi\right]/4m. \end{aligned} \tag{200}$$

В отличие от вектора спина дираковского поля, который получается при использовании лагранжева формализма и теоремы Нетер, интегральные комбинации (200) включают производные от биспинора и сохраняются во времени.

Отметим, что операторы (198) можно представить в форме

$$C_\mu = \check{S}_\mu + p_\mu/2,$$

где операторы $\check{S}_\mu$ совпадают с ковариантными операторами спина Фрадкина–Гуда [62].

1. Heaviside O., *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423.
2. Larmor I., Collected papers, London, 1928.
3. Rainich G.I., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106.
4. Лоренц Г.А., В кн.: Принцип относительности. Сб. работ классиков релятивизма, М., Атомиздат, 1973, с. 167.
5. Пуанкаре А., Там же, с. 90.
6. Пуанкаре А., Там же, с. 118.
7. Эйнштейн А., Там же, с. 97.

8. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223.
9. Cuningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
10. Lie S., *Arch. Math.*, 1881, **6**, 328.
11. Овсянников Л.В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
12. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1968.
13. Ибрагимов Н.Х., *Докл. АН СССР*, 1968, **178**, 566.
14. Ибрагимов Н.Х., *Докл. АН СССР*, 1969, **185**, 1220.
15. Фущич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
16. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo cimento*, 1974, **11**, 508.
17. Фущич В.И., *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, 570.
18. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фущич В.И., *ТМФ*, 1976, **29**, 82.
19. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347.
20. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, 844.
21. Фущич В.И., Сегеда Ю.Н., *Докл. АН СССР*, 1977, **232**, 800.
22. Фущич В.И., Онуфрийчук С.П., *Докл. АН СССР*, 1977, **235**, 1056.
23. Фущич В.И., Никитин А.Г., *Докл. АН СССР*, 1978, **238**, 46.
24. Фущич В.Н., В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, Институт математики АН УССР, 1978, 5.
25. Никитин А.Г., Там же, 81.
26. Никитин А.Г., Там же, 96.
27. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, 541.
28. Фущич В.И., Никитин А.Г., См. [24], с. 45.
29. Фущич В.И., В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний (Посвященная 60-летию акад. АН УССР Ю.А. Митропольского), Киев, Наукова думка, 1977, 75.
30. Фущич В.И., *Докл. АН СССР*, 1979, **246**, 846.
31. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1979, **12**, 747.
32. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo cimento*, 1979, **24**, 220.
33. Фущич В.И., *Укр. мат. журн.*, 1981, **33**, 821.
34. Фущич В.И., Владимиров В.А., *Докл. АН СССР*, 1981, **257**, 1105.
35. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Czech. J. Phys. B*, 1982, **32**, 476.
36. Fock V.A., *Fortschr. Phys.*, 1935, **98**, 145.
37. Anderson R.L., Ibragimov N.H., Lie-Bäklund transformations in an applications, Philadelphia, SI-AM, 1979.
38. Боголюбов Н.Н., Лекции по теории симметрии элементарных частиц, М., Изд-во МГУ, 1966.
39. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., Наука, 1969.
40. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М., Наука, 1973.
41. Малкин И.А., Манько В.И., Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем, М., Наука, 1979.
42. Шубин М.А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978.
43. Mignani R., Rekami E., Baldo M., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 12, 568.
44. Боргардт А.А., *Докл. АН СССР*, 1951, **78**, 1113.
45. Lomont J.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710.

46. Moses H.E., *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, 1.
47. Никитин А.Г., Фущич В.И., *ТМФ*, 1978, **4**, 319.
48. Фущич В.И., Никитин А.Г., *ЭЧАЯ*, 1978, **9**, вып. 3, 501.
49. Федоров Ф.И., *Докл. АН СССР*, 1952, **82**, 37.
50. Corson F.M., Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations, N.Y., Haîner, 1953.
51. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
52. Боргардт А.А., *ЖЭТФ*, 1956, **30**, 334.
53. Mayor D.H., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 884.
54. Чеботарев Н.Г., Теория групп Ли, М., Гостехиздат, 1949.
55. Котельников Г.А., В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, Т.1, М., Наука, 1980.
56. Da Silveira, *Nuovo Cimento A*, 1980, **56**, 385.
57. Kadyshevsky V.G., *Nucl. Phys. B*, 1978, **141**, 477.
58. Кадышевский В.Г., *ЭЧАЯ*, 1980, **11**, 5.
59. Данилов Ю.А., Препринт ИЭА-1136, 1968.
60. Jayaraman P., *Lett. Nuovo cimento*, 1976, **17**, 141.
61. Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1914.
62. Fradkin D.M., Good R.H., *Rev. Mod. Phys.*, 1961, **33**, 343.
63. Бейтман Г., Математическая теория распространения электромагнитных волн, Пер. с англ., М., Физматгиз, 1958.
64. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений Максвелла, Киев, Наукова думка, 1983.